UNIVERSITETI I TIRANËS
FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS
DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

PROGRAMI I STUDIMIT: ANALIZË DHE ALGJEBËR

DISERTACION

KOHOMOLOGJIA E GJYSMËGRUPEVE INVERSIVË

Doktoranti: Anjeza PASKU

Udhëheqës Shkencor: Prof. Dr. Xhezair TELITI

Tiranë, 2014

UNIVERSITETI I TIRANËS
FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS
DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

DISERTACION

i paraqitur nga
Msc. Anjeza Pasku
Udhëhequr nga
Prof. Dr. Xhezair Teliti

Për marrjen e gradës shkencore
DOKTOR
Programi i studimit: **Analizë dhe Algjebër**

Tema

Kohomologjia e Gjysmëgrupeve Inversivë

Mbrohet me datë ..../..../2014 para jurisë

1. **Prof.** …..………………………………..……………**Kryetar**
2. **Prof.** ….….……………………………………..…..…..**Anëtar (Oponent)**
3. **Prof.** ….….…………………………………………**Anëtar (Oponent)**
4. **Prof.** …...…………………………………………..**Anëtar**
5. **Prof.** …….………………………………………..…**Anëtar**

Pasqyra e Lëndës

1 Njohuri hyrëse **1**
- 1.1 Limitet dhe kolimitet e funktorëve . . . 1
- 1.2 Funktorët e bashkëngjitur . . . 5
- 1.3 Zgjerimet e Kanit . . . 15
- 1.4 Kriteri Bieri-Eckman për modulet . . . 17
- 1.5 KondItat FP_n dhe bi-FP_n për monoidët . . . 24
- 1.6 Dimensioni kohomologjik . . . 26
- 1.7 Ndryshimi i unazave . . . 26

2 Kondita fundshmërie homologjike për monoidët inversivë **31**
- 2.1 Disa rezultate paraprake . . . 31
- 2.2 Grupet e kohomologjisë dhe dimensioni kohomologjik . . . 33
- 2.3 Kondita FP_∞ për monoidët inversivë . . . 36
- 2.4 Kondita bi-FP_∞ për monoidët e Klifordit . . . 40
- 2.5 Kondita dobësisht bi-FP_∞ . . . 46
- 2.6 Idealet plotësisht të thjeshtë të tipit bi-FP_∞ . . . 47

3 Kondita $\mathbf{FP}_n$ për kategoritë e vogla dhe një zbatim për monoidët inversivë **53**
- 3.1 Të lirët në $\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}$ . . . 53
- 3.2 Kriteri Bieri-Eckmann për funktorët aditivë . . . 54
- 3.3 Një zbatim për monoidët inversivë . . . 57

4 Kohomologjia e gjysmëgrupeve inversivë me koefiçientë pretufat **59**
- 4.1 Njohuri hyrëse . . . 59
- 4.2 S-pretufa si kategori funktorësh . . . 63

5 Aspekte homologjike të paraqitjeve të gjysmëgrupeve dhe një zbatim për grupet **69**
- 5.1 Hyrje . . . 69
- 5.2 Sistemet e reduktimit Nëterianë . . . 71
- 5.3 Sistemet e reduktimit konfluentë . . . 73
- 5.4 Një diskutim mbi λ-konfluencën e grupeve . . . 74

Literatura **78**

Deklaratë

Kapitulli 1 përmban njohuri nga Teoria e Kategorive që kanë të bëjnë kryesisht me veti të funktorëve të bashkëngjitur dhe zgjerimet e Kanit si edhe disa rezultate të Algjebrës Homologjike që lidhen me vetinë homologjike FP_n të moduleve. Përveç vërtetimeve të pohimeve 1.4.10 dhe 1.4.11 të cilat janë të autores, gjithçka tjetër mund të gjendet tek [10], [21], [30], [42], [45] dhe [47].

Rezultatet origjinale të autores ndodhen tek kapitujt 2,3,4 dhe 5 përveç §4.1 ku jepen njohuri hyrëse nga pretufat dhe riparaqitjet e gjysmëgrupeve inversivë me anën e simetrive të pjesshme të një pretufe dhe që gjenden tek [39] dhe [55], si edhe të §5.1 ku përshkruhen disa rezultate të Mitchell tek [50] që kanë të bëjnë me unazën e incidencës së një sistemi reduktimi dhe një rezultat i Isbell nga [22] për ekzaktësinë e funktorit kolimit. Gjithashtu në këtë paragraf gjenden pa vërtetim disa pohime të [20] që nevojiten në vërtetimin e pohimeve të kapitullit.

Falenderime

Dëshiroj të falenderoj dy udhëheqësit e mi, Prof. Asoc. E. Pisha dhe Prof. Xh. Teliti, të parin për punën e palodhur në fazën e parë të doktoratës për të më njohur me gjysmëgrupet inversivë, ndërsa të dytin për ndihmën e pakursyer në përgatitjen e tezës. Një falenderim i veçantë shkon edhe për Prof. Asoc. E. Pasku i cili më ka ndihmuar vazhdimisht për probleme që lidhen me kohomologjinë e gjysmëgrupeve dhe teorinë e kategorive.

Gjithashtu dëshiroj të falenderoj Fakultetin e Shkencave të Natyrës i cili më dha mundësinë që të kryej doktoratën pranë Departamentit të Matematikës së këtij fakulteti.

Abstrakt: Në kapitullin e dytë ne provojmë se *një monoid inversiv S është i tipit FP$_\infty$ vetëm kur përmban një idempotent minimal dhe kur grupi i imazhit maksimal të S-së është po ashtu i tipit FP$_\infty$*. Lidhur me konditën bi-FP$_\infty$, ne provojmë ndër të tjera se *nëse një monoid i Klifordit është i tipit bi-FP$_\infty$, atëherë ai përmban një numër të fundëm idempotentësh dhe grupi i imazhit të tij maksimal është po ashtu i tipit bi-FP$_\infty$*. Gjithashtu provojmë se *nëse një monoid S përmban një ideal plotësisht të thjeshtë I me njësh, atëherë S është i tipit bi-FP$_\infty$ vetëm në qoftë se I dhe filteri $S \setminus I$ janë të tipit bi-FP$_\infty$*. Ky pohim tregon se kondita bi-FP$_\infty$ është më e natyrshme se ajo FP$_\infty$. Në kapitujt e tretë dhe të katërt ne studiojmë dy kategori të veçanta që i shoqërohen një monoidi inversiv S, kategorinë e pjestimit $D(S)$ dhe atë të S-pretufave. Lidhur me to, ne tregojmë se *S-pretufat janë izomorfe me $\mathbf{Ab}^{D(S)}$ duke marrë si rrjedhim i kësaj ekzistencën e një izomorfizmi midis grupeve të kohomologjisë sipas Lausch të S dhe atyre sipas Renault*. Gjithashtu vërtetojmë se *për rastin kur S ka një numër të fundëm idempotentësh, ka vend një analoge e kriterit Bieri-Eckmann për funktorët nga kategoria $\mathbf{Ab}^{D(S)}$* gjë që na lejon të gjejmë një lidhje midis konditës FP$_\infty$ për $D(S)$ me atë për S-në. Në kapitullin e pestë ne japim *një karakterizim algjebrik për një sistem reduktimi $(A, \to)$ që të jetë Noterian në terma të unazës së incidencës $[\mathbb{Z}\mathcal{A}]$ të sistemit* si dhe një tjetër *karakterizim algjebrik për një sistem reduktimi që të jetë konfluent në terma të sheshtësisë së një moduli që lind nga sistemi.*
Fjalë kyçe: Monoid inversiv, ideal, grup i imazhit maksimal, grupet e kohomologjisë, kondita fundshmërie FP$_\infty$, kriteri Bieri-Eckmann, pretufa, sistem reduktimi, konfluencë, Noterian.
Abstract: In the second chapter we prove that *an inverse monoid S is of type FP$_\infty$ if and only if it contains a minimal idempotent and the maximum group image of S is again of type FP$_\infty$*. Regarding the condition bi-FP$_\infty$, we prove among other things that *if a Clifford monoid is of type bi-FP$_\infty$, then it contains finitely many idempotents and its maximum group image is of type bi-FP$_\infty$*. Also we prove that *if a monoid S contains a completely prime ideal I which has a unit element, then S is of type bi-FP$_\infty$ if and only if I and the corresponding filter $S \setminus I$ are both of type bi-FP$_\infty$*. This makes bi-FP$_\infty$ condition a more natural finiteness condition than FP$_\infty$. In the third and fourth chapters we study two particular categories associated to an inverse monoid S, the division category $D(S)$ and that of S-presheaves. Related to these categories we prove that *S-presheaves are isomorphic to $\mathbf{Ab}^{D(S)}$ and obtain as a corollary of this the existence of an isomorphism between the cohomology groups after Lausch of S and those of Renault*. We also prove that *when S has finitely many idempotents, an analogue of the Bieri-Eckmann criteria for functors from $\mathbf{Ab}^{D(S)}$ holds true*, and use this to relate the condition FP$_\infty$ for $D(S)$ to that of S. In the fifth chapter we give *an algebraic characterization for a reduction system $(A, \to)$ to be Noetherian in terms of its incidence ring $[\mathbb{Z}\mathcal{A}]$* and another *algebraic characterization for a reduction system to be confluent in terms of the flatness of the a module arising from the system.*
Key words: Inverse monoid, ideal, maximal group image, cohomology groups, finiteness condition FP$_\infty$, Bieri-Eckmann criteria, presheaves, reduction system, confluent, Noetherian.

Hyrje

Qëllimi i kësaj teze është të hedhë më tej dritë mbi kohomologjinë e disa sistemeve algjebrikë të veçantë siç janë monoidët në përgjithësi apo monoidët inversivë në veçanti, si edhe të sistemeve të reduktimit me anën e të cilave paraqiten monoidët. Tri janë drejtimet në të cilat jemi përqëndruar.

Drejtimi i parë: *Studimi i konditave të tipit FP_n për monoidët inversivë.* Së pari kujtojmë se një monoid S (jo domosdoshmërisht inversiv) do të quhet i tipit majtas-FP_n ($n \geq 0$) në qoftë se ekziston një rezolucion projektiv i tipit të fundëm $P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ në $\mathbb{Z}S$-Mod. S do të quhet i tipit majtas-FP_∞ në qoftë se është i tipit majtas-FP_n për çdo $n \geq 0$. Duali i këtij përkufizimi për konditën djathtas-FP_n do të kërkonte ekzistencën e një rezolucioni të ngjashëm në Mod-$\mathbb{Z}S$. Në fakt, siç është treguar tek [16], këto dy nocione përputhen për monoidët inversivë, kështu që sa herë që themi FP_n për ta, do të nënkuptojmë majtas-FP_n, perveç rasteve të veçanta në të cilat do të vihet paraprakisht në dukje se me çfarë modulesh jemi duke u marrë. Kondita FP_n për monoidët inversivë është përgjithësim i të qënit të tyre me përftim të fundëm pasi është treguar tek [32] se të qënit FP_1 të një monoidi inversiv S është ekuivalente me të qënit e S-së me përftim të fundëm. Interesi kryesor në studimin e monidëve FP_n qëndron në faktin që të qënit FP_n është rrjedhim i faktit që monoidi jepet nga një sistem reduktimi konfluent dhe përfundues. Ndonëse dy vetitë e fundit nuk janë ekuivalente me atë FP_n, shpresohet nga kërkuesit në këtë fushë që kjo e fundit së bashku me ndonjë veti po të natyrës homologjike të ekuivalentohet me dy vetitë e sipërpërmendura gjë që do të përbënte një arritje të rëndësishme në këtë fushë. Duhet theksuar se studimi i vetive homologjike të monoidëve është shumë më i vështirë se ai i grupeve ndaj do të ishte e arsyeshme që problemi i studimit të kohomologjisë së një monoidi të sillej në atë të studimit të kohomologjisë së ndonjë grupi apo familje grupesh që i shoqërohen atij monoidi. Për herë të parë një përqasje e tillë është adaptuar nga Gray dhe Pride tek [15] të cilët tregojnë që një monoid i Klifordit S është i tipit FP_n vetëm kur S përmban një idempotent minimal e dhe nëngrupi maksimal i S që përmban e është i tipit FP_n. Për klasën më të gjërë të gjysmëgrupeve inversivë, ata tregojnë nën supozimin që gjysmëgrupi përmban një idempotent minimal, që është i tipit FP_n vetëm kur nëngrupi i tij maksimal që përmban këtë idempotent është i të njëjtit tip. Ideja jonë për të studiuar kohomologjinë e monoidëve inversivë nëpërmjet grupeve është paksa e ndryshme nga ajo e [15]. Në vend të $\mathcal{H}$-klasave të Grinit të monoidit inversiv S, ne konsiderojmë grupin G të imazhit maksimal të S-së që me përkufizim është S/σ ku σ është kongruenca në S e përbërë nga çiftet (s,t) të tilla që ekziston një idempotent $e \in S$ i tillë që $se = te$. Lidhur me këtë ne kemi treguar në teoremën 2.3.1 se *S është i tipit FP_∞, atëherë dhe vetëm atëherë kur S përmban një idempotent minimal dhe G është i tipit FP_∞.* Aparati që përdorim për vërtetimin e teoremës është disi i sofistikuar dhe shfytëzon ekzistencën e një bashkëngjitje funktorësh $Ab^{\mathbb{Z}G} \underset{\tilde{J}}{\overset{J^*}{\rightleftarrows}} Ab^{\mathbb{Z}S}$ ku $\tilde{J}$ është i bashkëngjitur i majtë i J^*. Kjo së bashku me disa fakte të tjera që lidhen me natyrën e monoidit, na mundëson të vërtetojmë në teoremën 2.2.2 ekzistencën e izomorfizmit $Ext^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \cong Ext^n_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}, \mathbf{J}^*M)$. Ky izomorfizëm është përdorur më tej së bashku me kriterin Bieri-Eckmann për konditën FP_∞ për të përfunduar vërtetimin. Vëmendje të veçantë i është kushtuar dhe dimensionit kohomologjik të një monoidi inversiv. Është treguar në pohimin 2.2.3 se *sa herë një monoid inversiv S përmban një idempotent minimal, dimensioni i tij kohomologjik përputhet me atë të grupit të imazhit maksimal të tij.* Interesant është edhe rrjedhimi 2.2.4 i ketij pohimi i cili pohon se *dimensioni kohomologjik i një monoidi të lirë të Klifordit është një.* Ky rezultat është i ngjashëm me atë të teoremës 4.5 tek [13] dhe tregon që monoidët e lirë të Klifordit janë midis kandidatëve të tjerë për të provuar një analoge të teoremës së Stalling-Swan për gjysmëgrupet inversivë me anë të kohomologjisë së Eilenberg-Mac Lane. Kujtojmë që teorema Stalling-Swan pohon se një grup e ka dimensionin e kohomologjisë një vetëm kur ai është i lirë. Përqasja jonë e studimit të monoidëve inversivë me anën e grupit të vet të imazhit maksimal na çoi në futjen e një koncepti të ri të indeksit për gjysmëgrupet inversivë të ndryshëm nga indeksi i Grinit i diskutuar psh tek [12] dhe [14]. Konkrektisht, themi se *një nëngjysmëgrup i plotë H i një monoidi inversiv S është me indeks të fundëm në S në qoftë se grupi i imazhit maksimal të H ka indeks të fundëm në grupin e imazhit maksimal të S.* Duket se ky përkufizim është adekuat pasi duke përdorur rezultatin e teoremës 2.3.1 ne vërtetojmë në pohimin 2.3.4 se *në qoftë se S është një monoid inversiv dhe H një nëngjysmëgrup me indeks të fundëm në S, atëherë S është i tipit FP_∞ vetëm kur H është i të njëjtit tip*, pohim i cili ka analogun e vet në kohomologjinë e grupeve.

Më tej ne shqyrtojmë konditën bi-FP_n për monoidët e Klifordit të cilët janë monoidë inversivë idempotentët e të cilëve janë qëndrorë. Kujtojmë që një monoid S është i tipit bi-FP_n $(n \geq 0)$ kur ekziston një rezolucion projektiv i tipit të fundëm $P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to \mathbb{Z}S \to 0$ në $\mathbb{Z}S^e$-Mod ku $\mathbb{Z}S^e$ është shënimi i shkurtuar për algjebrën mbështjellëse $\mathbb{Z}S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}S^{opp}$ të unazës monoidale $\mathbb{Z}S$. Sikurse më parë, S do të quhet i tipit bi-FP_∞ kur është bi-FP_n për çdo $n \geq 0$. Kjo konditë fundshmërie është futur për herë të parë nga Otto dhe Kobayashi tek [45] ku mes të tjerash është treguar se bi-FP_n sjell majtas/djathtas-FP_n. Ndërkaq, Kobayshi ka dhënë tek [32] shembullin e një monoidi i cili është i tipit majtas dhe djathtas-FP_∞ por që nuk është bi-FP_∞. Ky është monoidi $L = \{1, c_1, ..., c_n, ...\}$, me njësh 1 ku $c_i \cdot c_j = c_{\min\{i,j\}}$ për çdo $i, j \in \mathbb{N}$. Lidhur me këtë konditë ne tregojmë në teoremën 2.4.3 se *në qoftë se S është një monoid i Klifordit i tipit bi-FP_∞, atëherë ai përmban numër të fundëm idempotentësh dhe grupi i vet i imazhit maksimal G është i tipit bi-FP_∞.* Ndërkaq mbetet problem i hapur vërtetimi i të anasjellës. Megjithatë, në rastin e zinxhirëve të grupeve, dmth të monoidëve inversivë semilatisa e të cilëve formon një zinxhir, kemi rrjedhimin 2.6.4 i cili pohon se *një zinxhir grupesh S është i tipit bi-FP_∞ vetëm kur $|E| < \infty$ dhe për çdo $e \in E$, $\mathcal{H}$-klasa e Grinit H_e është e tipit bi-FP_∞.* Duhet theksuar se ky rezultat është rrjedhim i një pohimi më të përgjithshëm, atij të teoremës 2.6.3 që pohon se *në qoftë se S është një monoid, $I \neq S$ një ideal plotësisht i thjeshtë me njësh dhe N filteri korrespondues, atëherë S është i tipit bi-FP$_\infty$, vetëm kur I dhe N janë të tipit bi-FP$_\infty$*. Përveç rrjedhojës së mësipërme, ky pohim tregon edhe se kondita bi-FP$_\infty$ është më e natyrshme se ajo FP$_\infty$. Po e shpjegojmë më poshtë këtë gjë. Pohimi 3.1 i [33] tregon se në qoftë se një monoid S ka zero, atëherë ai është i tipit majtas dhe djathtas-FP$_\infty$. Një konsekuencë e pakëndshme e kësaj është se nëse një monoidi M pa zero i cili nuk është i tipit majtas apo djathtas-FP$_\infty$, i shtojmë artificialisht një element zero, përftojmë një monoid të ri S i cili do të jetë me patjetër majtas dhe djathtas-FP$_\infty$. Teorema jonë 2.6.3 në fakt tregon se kjo anomali nuk ndodh me konditën bi-FP$_\infty$ pasi nëse një monoidi M pa zero jo të tipit bi-FP$_\infty$ i shtojmë një zero, formohet një monoid S që ka si ideal plotësisht të thjeshtë me njësh zeron e shtuar dhe për filtër ka M. Është e qartë nga teorema se S s'mund të jetë bi-FP$_\infty$ pasi M nuk është i tillë.

Një tjetër konditë homologjike për monoidët është ajo dobësisht-bi-FP$_n$. Një monoid S do të quhet i tipit dobësisht-bi-FP$_n$ ($n \geq 0$) kur ekziston një rezolucion projektiv i tipit të fundëm $P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ në $\mathbb{Z}S^e$-Mod. Monoidi S do të quhet i tipit dobësisht-bi-FP$_\infty$ kur është dobësisht-bi-FP$_n$ për çdo $n \geq 0$. Kjo konditë është futur nga Alonso dhe Hermiller tek [2] dhe është treguar nga Pride tek [57] se të qënit e S dobësisht-bi-FP$_\infty$ është ekuivalente me të qënit njëherazi majtas dhe djathtas-FP$_n$. Në teoremën 2.5.1 ne vërtetojmë se *në qoftë se S është një gjysmëgrup dhe L një ideal me njësh i S-së, atëherë S është e tipit dobësisht bi-FP$_\infty$ vetëm kur L është i po atij tipi.* Ky rezultat ka si analog të vetin teoremën 3 të [15] e cila formulohet si teorema jonë por që ka në formulim konditën majtas FP$_n$ në vend të asaj dobësisht bi-FP$_\infty$. Theksojmë se në vërtetimin e teoremës 2.5.1 si edhe të asaj 2.6.3 është përdorur një rezultat themelor i Adams dhe Rieffel tek [1]. Në një situatë të ngjashme me tonën, Adams dhe Rieffel gjejnë një izomorfizëm midis grupeve të kohomologjive të gjysmëgrupit dhe idealit të tij, i cili së bashku me kriterin Bieri-Eckmann na mundëson vërtetimin e rezultateve tona. Një rrjedhim për monoidët e Klifordit është ai 2.5.3 i cili pohon se *një monoid S i Klifordit është i tipit dobësisht bi-FP$_\infty$ vetëm kur përmban një idempotent minimal ε dhe $\mathcal{H}$-klasa e Grinit H_ε është e tipit dobësisht bi-FP$_\infty$.*

Drejtimi i dytë. *Studimi i kohomologjisë së strukturave që i shoqërohen një monoidi inversiv.* Për të ndjekur këtë drejtim kemi pasur një motivim kryesor. Krahas kohomologjisë së Eilenberg-MacLane-it që ne kemi marrë në konsideratë në këtë tezë, ekzistojnë edhe dy lloje të tjera kohomologjish, ajo sipas Lausch dhe Loganathan, dhe ajo sipas Renault. Nuk do të ndalemi këtu për të përshkruar hollësisht secilën pasi kjo do të bëhet në kapitujt përkatës, por do të tregojmë se në cilat kategori i kanë koeficientët këto kohomologji me qëllim që ti japim kuptim rezultateve tona të kapitujve 3 dhe 4. Së pari, kohomologjia sipas Lausch dhe Loganathan e një monoidi inversiv S është përcaktuar në kategorinë funktoriale $\mathbf{Ab}^{D(S)}$ ku $D(S)$ është kategoria që ka për objekte idempotentët e S dhe morfizmat $e \to f$ janë treshet (e, x, x') ku x' është i anasjelli i x dhe $e \geq xx'$, $x'x = f$. Grupet në fjalë të kohomologjisë jepen nga barazimet $\mathrm{H}^n(D(S), A) = \mathrm{Ext}^n_{D(S)}(\Delta\mathbb{Z}, A)$ për çdo $n \geq 0$ dhe çdo $A \in \mathbf{Ab}^{D(S)}$. Loganathan provoi në [43], pohimi 3.6 që për çdo G-modul në sensin e zakonshëm ka një izomorfizëm kanonik $H^n(G, A) = H^n(D(S), D(\pi)^* A)$, ku $D(\pi)^* : \mathrm{Mod}(G) \to \mathrm{Mod}(D(S))$ është funktori i induktuar nga projeksioni natyral $\pi : S \to G$. Fakti që ky rezultat është analog me rezultatin tonë të teoremës 2.2.2, na shtyu natyrshëm të shohim se si lidhen konditat FP_n për $D(S)$ dhe S me njëra-tjetrën. Kujtojmë nga [17] se një kategori $\mathfrak{D}$ do të quhet e tipit FP_n në qoftë se ekziston një rezolucion projektiv i tipit të fundëm $P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to \Delta\mathbb{Z} \to 0$ në $\mathbf{Ab}^{\mathfrak{D}}$ ku $\Delta\mathbb{Z}$ është funktori konstant në $\mathbb{Z}$. Si fillim vërtetuam në teoremën 3.2.2 kriterin Bieri-Eckmann për një kategori të vogël aditive $\mathfrak{D}$ me një numër të fundëm objektesh që është: *në qoftë se $\mathfrak{D}$ është një kategori e vogël aditive me një numër të fundëm objektesh, M një $\mathfrak{D}$-modul dhe $n \geq 0$, atëherë pohimet e mëposhtme janë ekuivalente: (i) $Ext^k_{\mathfrak{D}}(M, \bullet)$ është i vazhdueshëm në zero për çdo $k \leq n$; (ii) M është i tipit FP_n.* Duke përdorur këtë kriter, izomorfizmin e pohimit 3.6 të [43] dhe teoremën 2.3.1, vërtetuam pohimin 3.3.1 që pohon se *në qoftë se S është një monoid inversiv me një numër të fundëm idempotentësh i tillë që kategoria e pjestimit $D(S)$ është e tipit FP_n për ndonjë $n \geq 0$, atëherë monoidi S është i të njëjtit tip.* Mbeten të hapura dy probleme. Së pari, a mund të hiqet dorë nga kufizimi për të pasur një numër të fundëm idempotentësh? Vërejmë se ky kusht përdoret në vërtetimin e lemës 3.2.1 që i paraprin vërtetimit te kriterit. Së dyti, a ka vend i anasjelli i pohimit 3.3.1? Në fakt ky është pjesë i një problemi më të madh të hapur, atij të krahasimit direkt të dy kohomologjive, asaj të Eilenberg-MacLane me kohomologjinë e Lausch-Loganathan.

Kapitulli i katërt i kushtohet krahasimit të kohomologjisë së Renault dhe asaj të Lausch-Loganathan. Sikurse e thamë, koeficientët në përcaktimin e kohomologjisë së Lausch-Loganathan janë $D(S)$-module kurse ato të përcaktimit të kohomologjisë sipas Renault janë S-pretufat e cila është kategoria që ka për objekte riparaqitjet e S me anë të simetrive të pjesshme të pretufave të grupeve abelianë mbi $E(S)$ dhe morfizmat ndërmjet dy riparaqitjeve $\alpha : S \to \mathcal{T}(X)$ dhe $\beta : S \to \mathcal{T}(Y)$ janë morfizma S-modulesh $\tau : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ ndërmjet S-moduleve korrespondues të tillë që $\forall s \in S$, $\tau(\alpha(s)(x)) = \beta(s)(\tau(x))$. Ideja për të krahasuar dy kohomologjitë merr shtysë nga teoremat 1.1 dhe 1.2 të [35] të cilat sigurojnë se ka vetëm një funktor kohomologjie me burim një kategori abeliane dhe me fund $\mathbf{Ab}$. Në këto kushte, po të tregojmë se S-pretufat është izomorfe me $\mathbf{Ab}^{D(S)}$, kemi mbaruar punë. Kjo arrihet në dy etapa. Së pari tregohet në teoremën 4.2.5 se S-pretufat është izomorfe me $\mathbf{Ab}^{P(S)}$ ku $P(S)$ herësi i $\mathcal{P}(S)$ sipas kongruencës mbi hom-setet e $\mathcal{P}(S)$ të gjeneruar nga çiftet $(e, s) \sim (e, es)$ dhe $(e, e) \sim id_e$ dhe $\mathcal{P}(S)$ është kategoria që ka si objekte idempotentët E të S dhe morfizmat $e \to f$ janë çifte $(e, s) \in E \times S$ të tilla që $f = s^{-1}es$, ndërsa kompozimi jepet nga $(s^{-1}es, t)(e, s) = (e, st)$. Së dyti, tregohet në pohimin 4.2.6 se $P(S) = D(S)$ dhe kjo së bashku me teoremat 1.1 dhe 1.2 të [35] sjellin rezultatin e rrjedhimit 4.2.7 që pohon se *grupet e kohomologjisë të një gjysmëgrupi inversiv të përcaktuara nga Lausch janë izomorfe me ato të përcaktuara nga Renault.*

Drejtimi i tretë. *Interpretimi algjebrik i nocionit të konfluencës dhe një diskutim për λ-konfluencën në grupe.* Konfluenca është një nocion bazë dhe shumë i rëndësishëm në teorinë e sistemeve të reduktimit. Nga pikpamja e algjebristit, do të ishte e dëshirueshme të gjendeshin kushte të nevojshme dhe të mjaftueshme (mundësisht të natyrës algjebrike) nën të cilat një monoid jepet nga një sistem reduktimi konfluent. Dihet se sa herë një monoid jepet nga një paraqitje e fundme sistemi i reduktimit

të së cilës është konfluent dhe përfundues, atëherë monoidi është i tipit bi-FP_∞, fakt ky i vërtetuar nga Kobayashi tek [31] dhe Pasku tek [53]. Fatkeqësisht e anasjella nuk është e vërtetë megjithëse përpjektjet vazhdojnë ende për të kuptuar se në ç'mënyrë të qënit konfluente e paraqitjes së një monoidi influencon vetitë algjebrike të monoidit. Në kapitullin e pestë ne kemi ndërmarrë një hap fillestar në këtë përpjektje duke u munduar të shprehim algjebrikisht nocionin e konfluencës me qëllim që ta përdorim më tej këtë interpretim për të diskutuar në terma algjebrikë problemin e λ-konfluencën në grupe. Për tja arritur kësaj, kemi përdorur disa rezultate të Mitchell dhe Isbell tek [50] dhe [22] që kanë të bëjnë me vetitë homologjike të unazës së incidencës së një kategorie të vogël aditive si dhe me ekzaktësinë e funktorit kolimit. Po shpjegojmë së pari se çfarë është unaza e incidencës e një kategorie aditive. Sa herë është dhënë një kategori e vogël aditive $\mathcal{C}$ ndërtojmë një unazë unitare $[\mathcal{C}]$ bashkësia korresponduese e të cilës është bashkësia e $|\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|$ matricave të trajtës $[\alpha_{p,q}]$ ku $\alpha_{p,q} \in \mathcal{C}(p,q)$ dhe çdo rresht dhe kolonë ka një numër të fundëm elementësh të ndryshëm nga zero. Veprimet e mbledhjes dhe të shumëzimit në $[\mathcal{C}]$ përcaktohen duke përdorur mbledhjen dhe kompozimin në $\mathcal{C}$ në këtë mënyrë: $[\alpha_{p,q}]+[\beta_{p,q}] = [\alpha_{p,q}+\beta_{p,q}]$ dhe $[\alpha_{p,q}] \cdot [\beta_{p,q}] = [\gamma_{a,b}]$ ku $\gamma_{a,b} = \sum\limits_{c\in|\mathcal{C}|} \alpha_{a,c} \cdot \beta_{c,b}$. Është treguar në teoremat 7.1 dhe 7.1* të [50] që kategoria e moduleve të djathtë $Ab^{[\mathcal{C}]}$ lidhet me kategorinë e funktorëve kovariantë aditivë $Ab^{\mathcal{C}}$ me anë të funktorëve ekzaktë $Ab^{[\mathcal{C}]} \underset{R,\,S}{\overset{T}{\rightleftarrows}} Ab^{\mathcal{C}}$ ku R dhe S janë përkatësisht të bashkëngjitur të djathtë dhe të majtë për T. Ngjashmërisht, për rastin kontravariant ekzistojnë çiftet e të bashkëngjiturve $Ab^{[\mathcal{C}]^*} \underset{R^*,\,S^*}{\overset{T^*}{\rightleftarrows}} Ab^{\mathcal{C}^*}$. Duke përdorur bashkëngjitjet e mësipërme, është treguar që për çdo $F \in Ab^{\mathcal{C}}$ dhe $G \in Ab^{\mathcal{C}^*}$ ekziston një ekuivalencë natyrale $S^*G \otimes_{[\mathcal{C}]^*} SF \simeq G \otimes_{\mathcal{C}^*} F$. Nga ana tjetër, në artikullin [22] të Isbell dhe Mitchell është provuar që kategoritë $\mathcal{C}$ për të cilat funktori kolimit $\underrightarrow{Lim}_{\mathcal{C}} : Ab^{\mathcal{C}} \to Ab$ është ekzakt, janë pikërisht ato kategori afinizimi i të cilave aff $\mathcal{C}$ ka komponentë të filtruar. Të gjitha sa thamë ne i sjellim së toku për të karakterizuar algjebrikisht konfluencën në mënyrën e mëposhtme. Për një sistem reduktimi $(A, \to)$ të dhënë shënojmë me $F\Gamma_A$ kategorinë e lirë të përftuar nga grafi i reduktimit Γ_A i sistemit dhe me $\mathcal{A}$ herësin $F\Gamma_A/\sim$ ku $\sim$ është kongruenca e gjeneruar nga të gjitha çiftet (α, β) ku $\alpha, \beta \in F\Gamma_A(a, b)$ dhe a, b variojnë në A. Vërejmë se të thuash që $(A, \to)$ është konfluent është njësoj si të thuash që aff $\mathcal{A}$ i ka komponentët e lidhur të filtruar, atëherë në vend që të shohim direkt për konfluencën e $(A, \to)$, duhet të shohim për konditat nën të cilat aff $\mathcal{A}$ i ka komponentët e filtruar. Duke përdorur bashkëngjitjet e gjetura nga Mitchell në rastin e kategorive $\mathbf{Ab}^{\mathcal{A}}$ dhe $\mathbf{Ab}^{[\mathcal{A}]}$ si edhe ekuivalencën natyrale që rrjedh prej tyre, kemi mundur të vërtetojmë në teoremën 5.3.1 se *një sistem reduktimi* $(A, \to)$ *është konfluent vetëm kur* $S^*\Delta\mathbb{Z}$ *është një* $[\mathbb{Z}\mathcal{A}]^*$ *modul i sheshtë, ku* $\Delta\mathbb{Z}$ *është funktori konstant në* $\mathbb{Z}$ *mbi* $\mathbb{Z}\mathcal{A}^*$.
Një problem i cili ka tërhequr vëmendje vitet e fundit është ai i λ-konfluencës në grupet dhe që shtrohet si më poshtë. Le të jetë $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{r} \rangle$ një paraqitje monoidi për një grup G dhe le të jetë $(\mathcal{P}_g, \to_g)$ sistemi e reduktimit që i korrespondon elementit $g \in G$. Shtrohet pyetja, nëse sistemi $(\mathcal{P}_e, \to_e)$ është konfluent, a është i tillë edhe ai $(\mathcal{P}_g, \to_g)$ për çdo $g \in G$? Ne nuk kemi qënë në gjendje ta vërtetojmë apo ta hedhim

poshtë këtë hamendje, por duke përdorur rezultatin e teoremës 5.3.1, kemi gjetur se për ç'kusht të nevojshëm dhe të mjaftueshëm të natyrës homologjike ndodh kjo në rastin kur $(\mathcal{P}_e, \to_e)$ është konfluent dhe përfundues. Konkretisht, në pohimin 5.4.1 kemi vërtetuar se *po të jetë* $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{r} \rangle$ *një paraqitje monoidi e një grupi* G *e tillë që sistemi i reduktimit* $(\mathcal{P}_e, \to_e)$ *është i plotë, atëherë për çdo* $g \in G$, $(\mathcal{P}_g, \to_g)$ *është konfluent vetëm kur ekziston* $v \in \mathcal{I}_g$ *i tillë që* ${}_{(\varphi_v)}S_e^*\Delta\mathbb{Z} \cong S_g^*\Delta\mathbb{Z}$ *ku me* $\mathcal{I}_g$ *kemi shënuar të gjithë të pareduktueshmit e sistemit* $\mathcal{P}_g$. Në këtë mënyrë vërtetimi i konfluencës kthehet në vërtetimit të një izomorfizmi.

Meqënëse një pjesë e mirë e tezës përdor limitet, kolimitet, funktorët e bashkëngjitur, zgjerimet e Kanit si dhe çështje të Algjebrës Homologjike që lidhen me to siç janë kondicat FP_n dhe kriteri Bieri-Eckmann, funktori i ndryshimit të unazës dhe dimensioni kohomologjik, ne vendosëm që të kemi një kapitull hyrës të zgjeruar ku të përfshijmë të gjitha këto në mënyrë sa më të plotë me qëllim që leximi i pjesës tjetër të tezës të jetë sa më i kuptueshëm.

Kapitulli 1

Njohuri hyrëse

1.1 Limitet dhe kolimitet e funktorëve

Le të jenë dhënë $\mathcal{J}$ dhe $\mathbb{C}$ dy kategori dhe $F : \mathcal{J} \to \mathbb{C}$ një funktor kovariant. Për çdo objekt $L \in \mathbb{C}$ të fiksuar, shënojmë me $L_{\mathcal{J}} : \mathcal{J} \to \mathbb{C}$ funktorin konstant në L, domethënë që $L_{\mathcal{J}}(j) = L$ për çdo $j \in \mathcal{J}$ dhe që $L_{\mathcal{J}}(\alpha) = 1_L$ për çdo shigjetë α të $\mathcal{J}$-së. Me përkufizim çdo transformim natyral i $L_{\mathcal{J}}$ në F do të quhet *kon* nga objekti (*kulmi*) L tek *baza* F. Në qoftë se C është një tjetër objekt i fiksuar i $\mathbb{C}$ dhe $f : C \to L$, atëherë morfizmi f indukton një transformim natyral $f_{\mathcal{J}} : C_{\mathcal{J}} \to L_{\mathcal{J}}$. Familja përkatëse e shigjetave që përcakton këtë transformim do të përbëhet nga vetëm një e tillë, pikërisht shigjeta f.

Përkufizim 1.1.1 Do të quajmë *limit* të funktorit F çiftin (L, λ) ku $L \in \mathbb{C}$ dhe $\lambda : L_{\mathcal{J}} \to F$ është një transformim natyral i quajtur *kon limit* që kënaq vetinë universale të mëposhtme: për çdo transformim natyral (kon) $\xi : C_{\mathcal{J}} \to F$, ekziston vetëm një morfizëm $f : C \to L$ i tillë që $\xi = \lambda f_{\mathcal{J}}$. Zakonisht objekti L shënohet me simbolin $\varprojlim(F)$.

Pohim 1.1.2 *Në qoftë se funktori $F : \mathcal{J} \to \mathbb{C}$ ka limit çiftin (L, λ), atëherë L është unik me afërsinë e izomorfizmit.*

Vërtetim. Vërtetimi bazohet në vetinë universale të limitit. Në qoftë se (L', λ') është një tjetër limit për F, atëherë ekziston shigjeta $f : L' \to L$ e tillë që $\lambda' = \lambda f$. Po të zbatojmë edhe njëherë vetinë universale të L' lidhur me L, gjendet shigjeta $g : L \to L'$ e tillë që $\lambda = \lambda' g$. Nga dy barazimet e fundit marrim $\lambda' = \lambda' g f$ dhe nga vetia universale e L' lidhur me vetveten kemi që $gf = 1_{L'}$. Në mënyrë të ngjashme mund të përftohet barazimi $fg = 1_L$ që tregon se objektet L dhe L' janë izomorfe. ∎

Shëmbull 1.1.3 Le të jetë $\mathcal{J}$ një *kategori diskrete*, domethënë që perveç objekteve dhe morfizmave njësha tek çdo objekt, nuk ka morfizma të tjerë. Do të tregojmë se ekziston limiti i çdo funktori $F : \mathcal{J} \to R$-**Mod** dhe se $\varprojlim(F) = \prod_{i \in \mathcal{J}} F(i)$. Së pari është e qartë që projeksionet $\pi_i : \prod_{i \in \mathcal{J}} F(i) \to F(i)$ luajnë rolin e një transfomimi natyral nga

$\left(\prod_{i\in\mathcal{J}} F(i)\right)_{\mathcal{J}}$ tek F. Në qoftë se $\xi : A_{\mathcal{J}} \to F$ është një transformim natyral, ky mund të identifikohet me një familje morfizmash $\xi_i : A \to F(i)$ për çdo $i \in \mathcal{J}$. Përcaktojmë tani pasqyrimin $f : A \to \prod_{i\in\mathcal{J}} F(i)$ të tillë që për çdo $a \in A$, $f(a) = (\xi_i(a))_{i\in\mathcal{J}}$. Shihet se $\pi f = \xi$ pasi për çdo $i \in \mathcal{J}$, kemi që $\xi_i(a) = \pi_i(f(a))$. Nga ana tjetër mund të shihet lehtësisht se pasqyrimi f i përcaktuar më lart është i vetmi që kënaq barazimin $\pi f = \xi$ rrjedhimisht çifti $(\prod_{i\in\mathcal{J}} F(i), \pi_i)$ është limiti i kërkuar.

Mund të ndërtohen shembuj të ngjashëm me të mësipërmin, psh. në **Set** ekziston limiti i një funktori F me fillim një kategori diskrete $\mathcal{J}$ dhe është pikërisht produkti i drejtë $\prod_{i\in\mathcal{J}} F(i)$. Këta shembuj dhe të tjerë të ngjashëm me ta na motivojnë të futim një kuptim të ri. Në qoftë se $\{C_i | i \in \mathcal{J}\}$ është një familje objektesh në një kategori $\mathbb{C}$, atëherë *produkt* të C_i-ve në $\mathbb{C}$ do të quajmë limitin, në qoftë se ekziston, të funktorit $F : \mathcal{J} \to \mathbb{C}$ që çdo objekti i të kategorisë diskrete $\mathcal{J}$ i lidh objektin C_i të familjes në shqyrtim. Pra produktet janë rast i veçantë i limiteve. Veçantia qëndron në faktin se kategoria $\mathcal{J}$ është diskrete. Që të mos krijohet përshtypja se limitet ekzistojnë vetëm kur $\mathcal{J}$ është diskrete kemi sjellë pohimin e mëposhtëm.

Pohim 1.1.4 *Le të jetë $\mathcal{J}$ një kategori çfarëdo dhe $F : \mathcal{J} \to R$-**Mod** një funktor kovariant. Ekziston $\varprojlim(F)$.*

Vërtetim. Shënojmë me $P = \prod_{i\in\mathcal{J}} F(i)$ dhe si zakonisht me $\pi_i : P \to F(i)$ projeksionet përkatës. Le të jetë tani

$$L = \{(x_i)_{i\in\mathcal{J}} \in P; F(\alpha)(x_i) = x_j \text{ për çdo shigjetë } \alpha : i \to j\},$$

dhe shënojmë me $\lambda_i = \pi_i | L$ për çdo $i \in \mathcal{J}$. Duke pasur parasysh faktin që $F(\alpha)$ është homomorfizëm, mund të tregohet lehtë se L është nënmodul i P dhe për më tepër çdo λ_i është homomorfizëm. Në qoftë se tani $\xi : A_{\mathcal{J}} \to F$ është një transformim natyral, atëherë çdo ξ_i është një homomorfizëm dhe $f : A \to L$ i tillë që $f(a) = (\xi_i(a))_{i\in\mathcal{J}}$ është homomorfizëm dhe i vetmi i tillë që $\lambda_i \circ f = \xi_i$ që tregon se çifti (L, λ) është limit i F në R-**Mod**. $\blacksquare$

Kategoritë për të cilat ekziston në to limiti i çdo funktori kovariant do të quhen *të plota*. Porsa pamë se R-**Mod** është kategori e plotë. Në qoftë se $\mathcal{A}$ është një kategori e plotë dhe $\mathcal{J}$ një kategori çfarëdo, atëherë mund të ndërtohet funktori limit $\varprojlim : \mathcal{A}^{\mathcal{J}} \to \mathcal{A}$ i tillë që $F \mapsto \varprojlim(F)$ ndërsa përcaktimi mbi shigjetat bëhet duke pasur parasysh vetinë universale të limitit. Në qoftë se $\mathcal{J}$ dhe $\mathcal{C}$ janë dy kategori, mund të ndërtohet i ashtëquajturi *funktor diagonal* $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ i cili çdo objekti $c \in \mathcal{C}$ i lidh funktorin $\Delta(c) = c_{\mathcal{J}} : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ që është funktori konstant në objektin c. Në qoftë se $f : c \to c'$ është shigjetë në $\mathcal{C}$, atëherë $\Delta(f) : \Delta(c) \to \Delta(c')$ është transformimi natyral që përbëhet vetëm nga komponentja $f : c \to c'$ në $\mathcal{C}$. Lidhur me dy funktorët e porsa përcaktuar, në rastin kur si $\mathcal{A}$ merret R-**Mod**, ka vend pohimi i mëposhtëm.

Pohim 1.1.5 *Funktorët* $\varprojlim$ *dhe* R-$\mathbf{Mod}^{\mathcal{J}}(\mathbb{Z}_{\mathcal{J}}, \bullet) : R$-$\mathbf{Mod}^{\mathcal{J}} \to R$-$\mathbf{Mod}$ *janë natyralisht izomorfë.*

Vërtetim. Për çdo $F \in R$-$\mathbf{Mod}^{\mathcal{J}}$ ndërtojmë pasqyrimin

$$\Psi : R\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathcal{J}}(\mathbb{Z}_{\mathcal{J}}, F) \to \varprojlim(F) \text{ të tillë që } \tau \mapsto t$$

ku t përcaktohet si më poshtë. Meqë $\mathbb{Z}_{\mathcal{J}}$ është funktori konstant me vlerë $\mathbb{Z}$, atëherë duke qënë se $\mathbb{Z}$ është grup i lirë abelian, dhënia e familjes $\{\tau(i)|i \in \mathcal{J}\}$ që përcakton transformimin τ, është e njëjtë me caktimin për çdo $i \in \mathcal{J}$ të një elementi $\tau_i(1)$ tek çdo $F(i)$ të tillë që për çdo shigjetë $\alpha_{i,j} : i \to j$ në $\mathcal{J}$ të kemi $F(\alpha_{i,j})(\tau_i(1)) = \tau_j(1)$. Por siç u pa tek pohimi 1.1.4, ky përcaktim nuk jep gjë tjetër veçse një element të $\varprojlim(F)$. Është triviale që Ψ është homomorfizëm grupesh dhe injektiv. Syrjektiviteti po ashtu bëhet i qartë po të zbatohet një proçes i anasjellë. Natyraliteti në F tregohet lehtësisht po të kihet parasysh vetia universale e limitit. ■

Po japim tani një shembull më ekzotik se të mëparshmit i cili do të përdoret në kapitullin e dytë.

Shëmbull 1.1.6 (Monomorfizmat si limite) Çdo monomorfizëm në kategorinë $\mathbf{R}$-$\mathbf{Mod}$ është limit i një funktori. Le të jetë $\iota : A \to B$ një monomorfizëm. Shënojmë me $\nu : B \to B/\iota(A)$ epimorfizmin kanonik i cili ka për bërthamë pikërisht modulin $\iota(A)$ dhe me $\theta : B \to B/\iota(A)$ homomorfizmin zero. Shënojmë me $J =\downdownarrows$ kategorinë që ka dy objekte dhe vetëm dy morfizma të ndryshëm nga morfizmat njësha që janë paralelë me njëri-tjetrin. Le të jetë $F : J \to \mathbf{R}$-$\mathbf{Mod}$ funktori që njërin nga dy morfizmat paralelë e çon tek ν dhe tjetrin tek θ. Është e qartë nga përcaktimi i F-së që A së bashku me ι formojnë një kon me kulm A dhe bazë F. Ky kon është kon limit. Vërtet, në qoftë se $f : A' \to A$ është një homomorfizëm i tillë që $\nu f = \theta f$, atëherë $\mathrm{im} f \subseteq \iota(A)$. Tani homomorfizmi $\varphi = \iota^{-1} f : A' \to A$ është i vetmi me cilësinë që $\iota \circ \varphi = f$ prandaj çifti (A, ι) është limiti i F.

Koncepti që do të futim tani është ai dual i limitit. Njëlloj siç bëmë në rastin e përkufizimit të limitit, do të futim edhe këtu kuptimin dual të konit që është ko-koni si dhe të ko-konit limit. Ko-kon nga një funktor $F : \mathcal{J} \to \mathbb{C}$ për tek një objekt $K \in \mathbb{C}$ është një transformim natyral i F për tek $K_{\mathcal{J}}$.

Përkufizim 1.1.7 Le të jenë dhënë $\mathcal{J}$ dhe $\mathbb{C}$ dy kategori dhe $F : \mathcal{J} \to \mathbb{C}$ një funktor kovariant. Do të quajmë *kolimit* të F në $\mathbb{C}$ çiftin (K, λ) ku $K \in \mathbb{C}$ dhe $\lambda : F \to K_{\mathcal{J}}$ një transformim natyral i quajtur *ko-kon limit* që kënaq vetinë universale të mëposhtme: për çdo transformim natyral (ko-kon) $\xi : F \to C_{\mathcal{J}}$ ekziston vetëm një shigjetë $f : K \to C$ e tillë që $f_{\mathcal{J}}\lambda = \xi$. Zakonisht kolimitin e shënojmë me simbolin $\varinjlim(F)$ ose ndonjëherë me $\underset{\to}{Colim}(F)$.

Pohim 1.1.8 *Në qoftë se funktori* $F : \mathcal{J} \to \mathbb{C}$ *ka kolimit çiftin* (K, λ)*, atëherë* K *është unik me afërsinë e izomorfizmit.*

Vërtetim. Le të jetë (K', λ') një tjetër kolimit i funktorit F. Nga vetia universale e K lidhur me K' kemi ekzistencën e një shigjete $f : K \to K'$ të tillë që $f\lambda = \lambda'$ kurse

nga vetia universale e K' lidhur me K kemi ekzistencën e një shigjete $g : K' \to K$ të tillë që $g\lambda' = \lambda$. Nga dy barazimet marrim $gf\lambda = \lambda$ dhe nga vetia universale e K lidhur me K kemi që $gf = 1_K$. Në mënyrë të ngjashme përftojmë që $fg = 1_{K'}$ çka tregon se $K \cong K'$. ■
Nje shembull me interes është dhe i mëposhtmi.

Shëmbull 1.1.9 Le të jetë $(A_i)_{i\in\mathcal{J}}$ një familje objektesh nga **R-Mod**, pra një familje modulesh të majtë. Do të tregojmë se kolimiti $\varinjlim(F)$, ku F është funktori që çdo objekti i i lidh modulin A_i, ekziston dhe është e ashtëquajtura *shumë e drejtë* e moduleve A_i, ose *koprodukt* i familjes A_i, të cilën e shënojmë me simbolin $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$ dhe që me përkufizim ka për elemente familjet e indeksuara $(a_i)_{i\in\mathcal{J}}$ ku $a_i \in A_i$ për çdo $i \in \mathcal{J}$ dhe që janë pothuajse kudo zero. Bashkësia $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$ shndërrohet në modul po të futim veprimet e mbledhjes dhe të shumëzimit me elemente të $\mathbf{R}$ si më poshtë: $(a_i)_{i\in\mathcal{J}} + (b_i)_{i\in\mathcal{J}} = (a_i + b_i)_{i\in\mathcal{J}}$, dhe $r \cdot (a_i)_{i\in\mathcal{J}} = (r \cdot a_i)_{i\in\mathcal{J}}$ për çdo $r \in \mathbf{R}$ dhe $(a_i)_{i\in\mathcal{J}}, (b_i)_{i\in\mathcal{J}} \in \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$. Shënojmë me $\iota_i : A_i \to \bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$ pasqyrimin që $x \mapsto \iota_i(x)$ ku $\iota_i(x)$ është sistemi i indeksuar që në koordinatën me indeks i ka elementin x dhe në të tjerat ka zero. Kjo familje pasqyrimesh është një familje monomorfizmash modulesh dhe kënaq vetinë universale të përkufizmit të kolimitit, pra $\bigoplus\limits_{i\in\mathcal{J}} A_i$ është vërtet koprodukti i familjes A_i.

Shembulli i mësiperm është në fakt një aspekt i veçantë i pohimit të mëposhtëm.

Pohim 1.1.10 *Le të jetë $\mathcal{J}$ një kategori çfarëdo dhe $F : \mathcal{J} \to$ **R-Mod** një funktor kovariant çfarëdo. Ekziston kolimiti $\varinjlim(F)$ në **R-Mod**.*

Vërtetim. Shënojmë me $P = \oplus_{i\in\mathcal{J}} F(i)$ dhe me $\iota_i : F(i) \to P$ injeksionet përkatës. Shënojmë me K nënmodulin e P të gjeneruar nga të gjithë diferencat $\iota_j(F(\alpha)(x)) - \iota_i(x)$ ku $\alpha : i \to j$ është shigjetë në $\mathcal{J}$ dhe $x \in F(i)$ çfarëdo. Le të jetë $L = P/K$ dhe $\pi : P \to L$ epimorfizmi kanonik përkatës. Do të tregojmë se $L = \varinjlim(F)$. Si fillim vërejmë se familja e homomorfizmave $\lambda_i = \pi \circ \iota_i : F(i) \to L$ është një transformim natyral i F në $L_{\mathcal{J}}$. Le të jetë dhënë tani ndonjë transformim natyral $\varphi : F \to A_{\mathcal{J}}$. Shënojmë $\varphi^* : P \to A$ homomorfizmin e vetëm që ai indukton me kushtin që $\varphi^* \circ \iota_i = \varphi_i$ për të gjitha $i \in \mathcal{J}$. Nga fakti që φ është transformim natyral marrim që $\varphi_j(F(\alpha)(x)) = \varphi_i(x)$ për çdo $\alpha : i \to j$ në $\mathcal{J}$ dhe çdo $x \in F(i)$. Kjo sjell që $\mathrm{Ker}\varphi^*$ përmban K dhe si pasojë φ^* faktorizohet në mënyrë të vetme në trajtën $\varphi^* = \bar{\varphi} \circ \pi$. Homomorfizmi $\bar{\varphi}$ kënaq vetinë që për çdo $i \in \mathcal{J}$, $\bar{\varphi} \circ \lambda_i = \bar{\varphi} \circ \pi \circ \iota_i = \varphi^* \circ \iota_i = \varphi_i$ që përfundon vërtetimin. ■
Kategoritë për të cilat ekziston në to kolimiti i çdo funktori do të quhen kategori të *ko-plota*. Ashtu sikurse **R-Mod**, edhe **Ab**, **Grp** dhe **Set** janë të tilla. Ngjashmërisht me rastin e limiteve, mund të përcaktojmë edhe në rastin e kolimiteve funktorin kolimit $\varinjlim : \mathcal{A}^{\mathcal{J}} \to \mathcal{A}$ sa herë që $\mathcal{A}$ është kategori e ko-plotë. Për $\mathcal{A} = R$-**Mod** ka vend ky pohim.

Pohim 1.1.11 *Funktorët $\varinjlim$ dhe $\mathbb{Z}_{\mathcal{J}} \otimes_{\mathcal{J}} \bullet : R\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathcal{J}^*} \to R\text{-}\mathbf{Mod}$ janë natyralisht izomorfë.*

Vërtetim. Para se të kalojme tek vërtetimi i pohimit, kujtojmë nga Algjebra Homologjike se në qoftë se $F \in R\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathcal{J}}$ dhe $G \in R\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathcal{J}^*}$, atëherë $F \otimes_{\mathcal{J}} G = \left(\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} F(i) \otimes_{\mathbb{Z}} G(i) \right) / M$ ku M është nëngrupi i shumës së drejtë i përftuar nga elementë të formës $F(\alpha)(y) \otimes_{\mathbb{Z}} x - y \otimes_{\mathbb{Z}} G(\alpha)(x)$ për çdo $y \in F(i), x \in G(j)$ dhe $\alpha : i \to j$. Në rastin tonë, po të vendosim $\mathbb{Z}_{\mathcal{J}}$ në vend të F, nga fakti që $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} G(i) \cong G(i)$ dhe nga pohimi 1.1.10, duke arsyetuar modulo M nuk përftojmë gjë tjetër veçse modulin $\varinjlim(G)$. Natyraliteti është i lehtë për t'u treguar. ∎

Më tej po japim shembullin e kobërthamave si kolimite të cilin do ta përdorim në kapitullin e dytë.

Shëmbull 1.1.12 (Kobërthamat si kolimite) Kujtojmë se në qoftë se

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} C \longrightarrow 0$$

është varg ekzakt në **R-Mod**, atëherë h quhet *kobërthamë* e f dhe shënohet me $h = \mathrm{coker} f$. Është e qartë që $C \cong B/\mathrm{im} f$. Ashtu si tek shembulli 1.1.6 konsiderojmë të njëjtin funktor $F : J \to \mathbf{R\text{-}Mod}$. Është e qartë që çifti (C, h) është ko-kon me bazë F dhe kulm C. Për të treguar se ai është ko-kon limit supozojmë se $g : B \to D$ është një homomorfizëm i tillë që $gf = g\theta$. Por kjo sjell që $\mathrm{im} f \subseteq \ker g$ dhe rrjedhimisht kemi një homomorfizëm $\tilde{g} : B/\mathrm{im} f \to D$ të induktuar që plotëson kushtin $\tilde{g} \circ h = g$. Ky është qartësisht unik me këtë cilësi.

Shembulli i mëposhtëm tregon se ngjashmërisht me monomorfizmat për të cilat pamë se ishin limite, epimorfizmat do të jenë kolimite.

Shëmbull 1.1.13 (Epimorfizmat si kolimite) Çdo epimorfizëm në **R-Mod** është kolimit i një funktori. Vërtetimin e këtij fakti nuk po e bëjmë pasi ai është dual i atij të shembullit 1.1.6.

1.2 Funktorët e bashkëngjitur

Në algjebrën homologjike me interes janë ata funktorë të cilët ruajnë limitet apo kolimitet pasi me ta lidhen kondita fundshmërie për modulet siç është për shembull ajo FP_∞ që është fuqizim i të qënit të modulit me paraqitje të fundme. Në përfundim të këtij paragrafi ne do të japim kushte të mjaftueshme për një funktor që ai të ruajë limitet dhe kolimitet. Këto kushte kanë të bëjnë me të ashtëquajturat çifte të bashkëngjitura funktorësh. Para se të japim përkufizimin e funktorëve të bashkëngjitur, po japim dy shembuj që jo vetëm motivojnë dhënien e përkufizimit por edhe e bëjnë më të lehtë të kuptuarit e tij.
[i.] Shqyrtojmë situatën e mëposhtme

$$\mathbf{Set} \underset{U}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \mathbf{Vct}_K$$

ku me $\mathbf{Vct}_K$ kemi shënuar kategorinë e hapësirave lineare mbi një fushë K, U është funktori harraq dhe V është funktori që çdo bashkësie X i lidh hapësirën lineare $V(X)$ me bazë X. Dihet nga teoria e hapësirave lineare që çdo pasqyrim $g : X \to U(W)$ zgjerohet në mënyrë të vetme në një transformim linear $f : V(X) \to W$. Korrespondenca $\psi : g \mapsto f$ ka pasqyrim të anasjellë $\varphi : f \mapsto f|_X$, ku $f|_X$ është ngushtimi i f në bazën X. Në këtë mënyrë kemi bijeksionin e mëposhtëm

$$\varphi : \mathbf{Vct}_K(V(X), W) \cong \mathbf{Set}(X, U(W)).$$

Ky pasqyrim është natyral në të dy variablat. Për variablin e parë kjo do të thotë se për çdo pasqyrim $h : X' \to X$ diagrami më poshtë është komutativ

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Vct}_K(V(X), W) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathbf{Vct}_K(Vh,W)"'] & \mathbf{Set}(X, U(W)) \arrow[d, "\mathbf{Set}(h,U(W))"] \\
\mathbf{Vct}_K(V(X'), W) \arrow[r, "\varphi"] & \mathbf{Set}(X', U(W)),
\end{tikzcd}$$

pasi $h^*g = g \circ h$. Njëlloj përkufizohet dhe vërtetohet edhe natyraliteti në variablin e dytë.

[ii.] Në kategorinë **Set** çdo pasqyrim $g : S \times T \to R$ i dy variablave mund të konsiderohet si një pasqyrim $\varphi g : S \to \mathrm{Hom}(T, R)$ i një variabli në S me vlera pasqyrime të një variabli në T. Në mënyrë eksplicite ai është përcaktuar si vijon: $[(\varphi g)s]t = g(s, t)$ për të gjitha $s, t \in S \times T$. Nga sa thamë kemi një bijeksion

$$\varphi : \mathrm{Hom}(S \times T, R) \cong \mathrm{Hom}(S, \mathrm{Hom}(T, R))$$

i cili është natyral në të tri variablat. Në qoftë se mbajmë T të fiksuar dhe përcaktojmë funktorët $F, G : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ të tillë që $F(S) = S \times T$ dhe $G(R) = \mathrm{Hom}(T, R)$, atëherë bijeksioni më sipër merr formën

$$\mathrm{Hom}(F(S), R) \cong \mathrm{Hom}(S, G(R))$$

për të cilin mund të provohet lehtësisht se është natyral në të dy variablat S dhe R. Kalojmë tani në dhënien e përkufizimit formal.

Përkufizim 1.2.1 Le të jenë A dhe X dy kategori. *Bashkëngjitje* e X në A është një treshe $\langle F, G, \varphi \rangle : X \to A$ ku F dhe G janë funktorë

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "F"] & A \arrow[l, shift left, "G"]
\end{tikzcd}$$

ndërsa φ është një bijeksion i cili i lidh çdo çifti objektesh $x \in X$ dhe $a \in A$ një bijeksion bashkësish

$$\varphi = \varphi_{x,a} : A(Fx, a) \cong X(x, Ga) \tag{1.1}$$

i cili është natyral në x dhe në a. Funktorin F do ta quajmë të *bashkëngjitur të majtë* të atij G dhe funktorin G do ta quajmë të *bashkëngjitur të djathtë* të F-së. Imazhin $\varphi(f)$ të çdo shigjete $f : Fx \to a$ me anën e φ-së do ta quajmë të bashkëngjitur të djathtë të f-së. Anasjellas, imazhin $\varphi^{-1}(g)$ të çdo shigjete $g : x \to Ga$ me anën e të anasjellit φ^{-1} të φ do ta quajmë të bashkëngjitur të majtë të g-së.

Natyraliteti i φ-së nënkupton që për çdo $k : a \to a'$ dhe $h : x' \to x$ të dy diagramat e mëposhtëm janë ndërrimtarë.

$$\begin{tikzcd} A(Fx,a) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "A(Fx,k)"'] & X(x,Ga) \arrow[d, "X(x,Gk)"] \\ A(Fx,a') \arrow[r, "\varphi"] & X(x,Ga') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A(Fx,a) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "A(Fh,a)"'] & X(x,Ga) \arrow[d, "X(h,Ga)"] \\ A(Fx',a) \arrow[r, "\varphi"] & X(x',Ga) \end{tikzcd}$$

Po të zëvendësojmë tek (1.1) Fx në vend të a dhe po të shënojmë me $\eta_x = \varphi(1_{Fx})$, mund të shihet që funksioni $x \mapsto \eta_x$ është një transformim natyral $I_X \to GF$ sepse për çdo $x, x' \in X$ dhe për çdo shigjetë $h : x' \to x$ diagrami i mëposhtëm

$$\begin{tikzcd} x' \arrow[r, "\eta_{x'}"] \arrow[d, "h"'] & GFx' \arrow[d, "GFh"] \\ x \arrow[r, "\eta_x"] & GFx \end{tikzcd}$$

është komutativ. Vërtetimi i komutativitetit të këtij diagrami mund të bëhet lehtë duke ndjekur diagramin e mëposhtëm komutativ.

$$\begin{tikzcd} A(Fx',Fx') \arrow[r, "A(Fx',Fh)"] \arrow[d, "\varphi"] & A(Fx',Fx) \arrow[d, "\varphi"] & A(Fx,Fx) \arrow[l, "A(Fh,Fx)"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ X(x',GFx') \arrow[r, "X(x',GFh)"'] & X(x',GFx) & X(x,GFx), \arrow[l, "X(h,GFx)"] \end{tikzcd}$$

Bijeksioni φ mund të shprehet me anën e shigjetave η_x si më poshtë:

$$\varphi(f) = G(f)\eta_x \text{ për çdo } f : Fx \to a; \tag{1.2}$$

sepse nga natyraliteti i φ në variablin e dytë kemi barazimin e mëposhtëm.

$$\varphi(f) = \varphi(f \circ 1_{Fx}) = Gf \circ \varphi 1_{Fx} = Gf \circ \eta_x.$$

Llogaritjet më lart bëhen më evidente po qe se vizualizohen duke ndjekur njëshin tek diagramat e mëposhtëm.

$$\begin{tikzcd} A(Fx,Fx) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "A(Fx,f)"'] & X(x,GFx) \arrow[d, "X(x,Gf)"] \\ A(Fx,a) \arrow[r, "\varphi"] & X(x,Ga) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d] & \eta_x \arrow[d] \\ f \circ 1 \arrow[r] & \varphi \circ f = Gf \circ \eta_x \end{tikzcd}$$

Në mënyrë simetrike me përcaktimin e η_x për çdo $x \in X$, ne mund të përcaktojmë për çdo $a \in A$ një shigjetë ε_a që ka veti të ngjashme me η_x. Për çdo $a \in A$, shënojmë me $\varepsilon_a = \varphi^{-1}(1_{Ga})$. Kjo do të thotë se

$$\varepsilon_a : FGa \to a, \ \varepsilon_a = \varphi^{-1}(1_{Ga}), \ a \in A.$$

Mund të tregohet lehtësisht se ε është një transformim natyral $\varepsilon : FG \to I_A$ dhe se

$$\varphi^{-1}(g) = \varepsilon_a \circ Fg \text{ për çdo } g : x \to Ga.$$

Tani, në qoftë se marrim $x = Ga$ dhe aplikojmë (1.2) sikur në rolin e f të jetë $\varepsilon_a = \varphi^{-1}(1_{Ga})$, atëherë do të marrim

$$1_{Ga} = \varphi(\varepsilon_a) = G(\varepsilon_a) \circ \eta_{Ga}.$$

Kjo do të thotë se transformimi natyral kompozim

$$G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G$$

është transformimi identik. Të gjitha sa thamë mund të përmblidhen në këtë teoremë.

Teoremë 1.2.2 *Çdo bashkëngjitje $\langle F, G, \varphi \rangle : X \to A$ përcakton:*

(i) Një transformim natyral $\eta_x : I_X \to GF$ të tillë që për çdo objekt $x \in X$, η_x është shigjetë universale nga x në G dhe i bashkëngjituri i djathtë i çdo shigjete $f : Fx \to a$ është shigjeta

$$\varphi f = Gf \circ \eta_x : x \to Ga; \tag{1.3}$$

(ii) Një transformim natyral $\varepsilon : FG \to I_A$ të tillë që për çdo objekt $x \in X$, ε_a është një shigjetë universale nga F në a dhe i bashkëngjituri i majtë i çdo shigjete $g : x \to Ga$ është shigjeta

$$\varphi^{-1} g = \varepsilon_a \circ Fg : Fx \to a. \tag{1.4}$$

Për më tepër, kompozimet e mëposhtme janë përkatësisht transformimet identike në G dhe në F

$$G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G, \qquad F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F \tag{1.5}$$

Transformimet η dhe ε do të quhen përkatësisht *njëshi* dhe *ko-njëshi* i bashkëngjitjes. Teorema e mëposhtme tregon se një bashkëngjitje mund të përcaktohet jo domosdoshmërisht nga dhënia e bijeksionit φ por edhe nga njëshi dhe ko-njëshi duke marrë parasysh cilësitë e tyre.

Teoremë 1.2.3 *Çdo bashkëngjitje $\langle F, G, \varphi \rangle : X \to A$ është plotësisht e përcaktuar nga secila prej të dhënave të listës së mëposhtme.*

(i) Funktorët F, G dhe një transformim natyral $\eta : 1_X \to GF$ e tillë që çdo $\eta_x : x \to GFx$ është një shigjetë universale nga x në G. Atëherë φ është përcaktuar nga barazimet (1.3).

(ii) Funktori $G : A \to X$ dhe për çdo objekt $x \in X$ një objekt $F_0 x \in A$ dhe një shigjetë universale $\eta_x : x \to GF_0 x$ nga x në G. Atëherë funktori F si funksion objektesh ka F_0 dhe mbi shigjetat $h : x \to x'$ është përcaktuar nga barazimi $GFh \circ \eta_x = \eta_{x'} \circ h$.

(iii) Funktorët F dhe G dhe një transformim natyral $\varepsilon : FG \to I_A$ të tillë që çdo $\varepsilon_a : FGa \to a$ është shigjetë universale nga F në a. Ndërsa φ^{-1} është përcaktuar nga (1.4).

(iv) Funktori $F : X \to A$ dhe për çdo $a \in A$ një objekt $G_0 a \in X$ dhe një shigjetë universale $\varepsilon_a : FG_0 a \to a$ nga F në a

(v) Funktorët F dhe G dhe një transformim natyral $\eta : I_X \to GF$ dhe $\varepsilon : FG \to I_A$ të tillë që kompozimet (1.5) janë transformimet natyrale identike. Në këtë rast φ është përcaktuar nga (1.3) dhe φ^{-1} nga (1.4).

Për shkak të (v) ne shpesh bashkëngjitjen $\langle F, G, \varphi \rangle : X \to A$ e shënojmë në trajtën $\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle : X \to A$.

Vërtetim. Në qoftë se kemi të dhënat e (i) atëherë fakti që η_x është universale do të thotë që për çdo $f : x \to Ga$ ekziston ekzaktësisht një g e tillë që ta bëjë diagramin djathtas komutativ

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[d, dashed, "g,"] \\ a \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[dr, "f"'] & GFx \arrow[d, dashed, "Gg"] \\ & Ga. \end{tikzcd}$$

Por kjo do të thotë që barazimi $\theta(g) = Gg \circ \eta_x$ përcakton një bijeksion $\theta : A(Fx, a) \to X(x, Ga)$ i cili është natyral në x sepse η është natyral dhe gjithashtu natyral në a sepse G është funktor. Pra θ jep një bashkëngjitje $\langle F, G, \theta \rangle$. Në rast se η ishte njëshi i përftuar nga një bashkëngjitje $\langle F, G, \varphi \rangle$ atëherë, nga përcaktimi i θ-s më lart, marrim që $\varphi = \theta$. Të dhënat e (ii) mund të transformohen në formën e të dhënave të (i) dhe atëherë ato do të përcaktonin një bashkëngjitje. Në fakt tek (ii) na është dhënë vetëm një shigjetë universale $\langle F_0 x, \eta_x \rangle$ për çdo $x \in X$; ne do të tregojmë se ka vetëm një mënyrë për ta bërë F_0 funksion të objekteve të një funktori F me kushtin që $\eta : I_X \to GF$ është transformim natyral. Më konkretisht, për çdo $h : x \to x'$ universaliteti i η_x pohon që ka ekzaktësisht vetëm një shigjetë (ajo e diagramit majtas) që e bën diagramin djathtas ndërrimtar:

$$\begin{tikzcd} F_0 x \arrow[d, dashed] \\ F_0 x' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "h"] & GF_0 x \arrow[d, dashed] \\ x' \arrow[r, "\eta_{x'}"] & GF_0 x' \end{tikzcd}$$

Zgjedhim këtë shigjetë të jetë $Fh : F_0 x \to F_0 x'$; ndërrimtaria sjell që η është natyrale dhe së fundi, është fare e thjeshtë të tregohet se zgjedhja e Fh e bën F funktor.

Vërtetimet e (iii) dhe (iv) janë duale të njëra-tjetrës. Provojmë së fundi (v). Për këtë përdorim η dhe ε për të përcaktuar funksionet

$$A(Fx, a) \underset{\theta}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} X(x, Ga)$$

të tillë që $\varphi f = Gf \circ \eta_x$ për çdo $f : Fx \to a$ dhe $\theta g = \varepsilon_a \circ Fg$ për çdo $g : x \to Ga$. Meqënëse G është funktor dhe η transformim natyral, marrim

$$\varphi\theta g = G\varepsilon_a \circ GFg \circ \eta_x = G\varepsilon_a \circ \eta_{Ga} \circ g.$$

Por supozimi (1.5) sjell që $G\varepsilon_a \circ \eta_{Ga} = 1$, atëherë $\varphi\theta = id$. Në mënyrë të ngjashme marrim $\theta\varphi = id$ që do të thotë se φ është bijeksion me të anasjellë θ. Gjithashtu φ është natyral dhe rrjedhimisht një bashkëngjitje. ■

Rrjedhim 1.2.4 *Çdo dy të bashkëngjitur të majtë të një funktori $G : A \to X$ janë natyralisht izomorfe.*

Vërtetim. Për vërtetimin do të bazohemi në faktin që një shigjetë universale është e vetme me afërsinë e izomorfizmit. Në qoftë se janë dhënë bashkëngjitjet $\langle F, G, \varphi \rangle$ dhe $\langle F', G, \varphi' \rangle$, atëherë siç e kemi parë, për to ekzistojnë shigjetat universale $\eta_x : x \to GFx$ dhe $\eta'_x : x \to GF'x$, dhe atëherë, nga komenti i mësipërm, kemi ekzistencën e një izomorfizmi të vetëm $\theta_x : Fx \to F'x$ të tillë që $G\theta_x \circ \eta_x = \eta'_x$. Së fundi është e lehtë të verifikohet që $\theta : F \to F'$ është natyral. ■

Më tej do të tregojmë se bashkëngjitjet mund të kompozohen dhe se kompozimi i tyre është gjithashtu një bashkëngjitje.

Teoremë 1.2.5 *Jepen dy bashkëngjitje*

$$\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle : X \to A \quad \langle \bar{F}, \bar{G}, \bar{\eta}, \bar{\varepsilon} \rangle : A \to D.$$

Funktorët kompozim japin bashkëngjitjen

$$\langle \bar{F}F, \bar{G}G, G\bar{\eta}F \cdot \eta, \bar{\varepsilon} \cdot \bar{F}\varepsilon\bar{G} \rangle : X \to D.$$

Vërtetim. Duke aplikuar njëherë bashkëngjitjen e dytë dhe pastaj të parën marrim bijeksionet natyrale në $x \in X$ dhe $d \in D$:

$$D(\bar{F}Fx, d) \cong A(Fx, \bar{G}d) \cong X(x, G\bar{G}d)$$

që tregon se $\bar{F}F$ është i bashkëngjitur i majtë i $G\bar{G}$. Po të shënojmë tani $d = \bar{F}Fx$ dhe ti aplikojmë dy bijeksionet më lart mbi njëshin $1 : \bar{F}Fx \to \bar{F}Fx$ shohim se njëshi i bashkëngjitjes kompozim është $x \xrightarrow{\eta_x} GFx \xrightarrow{G\bar{\eta}Fx} G\bar{G}\bar{F}Fx$, domethënë pikërisht $G\bar{\eta}F \cdot \eta$ siç kërkohej. Në mënyrë të ngjashme gjejmë se ko-njëshi është $\bar{\varepsilon} \cdot \bar{F}\varepsilon\bar{G}$ që përfundon teoremën. ■

Më tej po japim një tabelë modeste çiftesh funktorësh të bashkëngjitur njëri nga të cilët është funktori harraq.

Funktori harraq	*I bashkëngjituri i majtë F*
$U : \mathbf{R\text{-}Mod} \to \mathbf{Set}$	$X \to FX$ moduli i lirë me bazë X
$U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$	$X \to FX$ grupi i lirë me bazë X
$U : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$	$G \mapsto G/[G,G]$ grupi faktor komutator
$U : \mathbf{R\text{-}Mod} \to \mathbf{Ab}$	$A \mapsto R \otimes_{\mathbb{Z}} A$
$U : \mathbf{Rng} \to \mathbf{Mon}$	$S \mapsto \mathbb{Z}S$ unaza monoidale

Me interes është të dimë se kush janë të bashkëngjiturit, nëse ka të tillë, të funktorit diagonal Δ. Pohimi i mëposhtëm jep përgjigjen në rastin kur në C ekzistojnë limitet dhe kolimitet e të gjithë funktorëve me burim kategorinë J. Më parë vërejmë se ekzistojnë funktorët $\underrightarrow{Lim} : C^J \to C$ dhe $\underleftarrow{Lim} : C^J \to C$ që çojnë çdo funktor të C^J përkatësisht tek kolimiti dhe limiti i tij. Kurse përcaktimi në shigjetat (transformimet natyrale në këtë rast) bëhet duke pasur parasysh vetinë universale të kolimiteve dhe limiteve përkatësisht.

Pohim 1.2.6 *Funktori $\underrightarrow{Lim}_J : C^J \to C$ është i bashkëngjitur i majtë i $\Delta : C \to C^J$ dhe funktori $\underleftarrow{Lim}_J : C^J \to C$ është i bashkëngjitur i djathtë i $\Delta : C \to C^J$.*

Vërtetim. Vërtetimin do ta bëjmë vetëm për rastin e $\underrightarrow{Lim}_J$ pasi rasti i $\underleftarrow{Lim}_J$ është dual. Do të na nevojitet të tregojmë se për çdo $F \in C^J$ dhe çdo $c \in C$ ekziston një bijeksion natyral $\varphi : C^J(F, \Delta(c)) \cong C(\underrightarrow{Lim}_J(F), c)$. Nga vetia universale e $\underrightarrow{Lim}_J$ për çdo transformim natyral $\tau \in C^J(F, \Delta(c))$ ekziston vetëm një shigjetë $t \in C(\underrightarrow{Lim}_J(F), c)$ që kënaq kushtin $t \circ \lambda = \tau$ ku λ është ko-koni që jep kolimitin $\underrightarrow{Lim}_J(F)$. Përcaktojmë $\varphi(\tau) = t$ i cili është injektiv pasi në qoftë se $\varphi(\tau_1) = t = \varphi(\tau_2)$, atëherë $\tau_1 = t \circ \lambda = \tau_2$. Në qoftë se $t \in C(\underrightarrow{Lim}_J(F), c)$, atëherë kompozimi $\tau = t \circ \lambda$ është një transformim natyral nga F tek $\Delta(c)$, domethënë është nga $C^J(F, \Delta(c))$. Nga përcaktimi i φ-së dhe uniciteti i t tek përkufizimi i $\underrightarrow{Lim}_J(F)$, marrim $\varphi(\tau) = t$ që tregon se φ është syrjeksion. Natyraliteti i φ-së mund të tregohet lehtësisht. Një mënyrë tjetër vërtetimi do të ishte të përdornim pikën (i) të teoremës 1.2.3. Në këtë rast trasnformimi natyral $\eta : 1_{C^J} \to \Delta \circ \underrightarrow{Lim}_J$ është përcaktuar i tillë që për çdo $F \in C^J$, η_F është ko-koni limit që jep $\underrightarrow{Lim}_J(F)$, shigjetë për të cilën dimë se është universale nga F në $(\Delta \circ \underrightarrow{Lim}_J)(F)$.
■

Më tej në këtë paragraf do të vërtetojmë një teoremë e cila jep një kusht të mjaftueshëm që një funktor të ruajë të gjithë kolimitet që mund të ekzistojnë në burimin e vet.

Teoremë 1.2.7 *Në qoftë se funktori $F : A \to X$ ka të bashkëngjitur të djathtë, ndërsa funktori $T : J \to A$ ka një ko-kon limit $\tau : T \to a$ në A, atëherë FT ka ko-kon limit $F\tau : FT \to Fa$.*

Vërtetim. Së pari është evidente që $F\tau$ është një ko-kon në X nga FT në Fa. Në qoftë se G është i bashkëngjitur i djathtë i F, atëherë në qoftë se aplikojmë izomorfizmat e bashkëngjitjes mbi çdo shigjetë të një ko-koni $\sigma : FT \to x$, përftojmë shigjetat $(\sigma_i)^\flat : Ti \to Gx$ për $i \in J$ të cilat formojnë një ko-kon $\sigma^\flat : T \to Gx$ në A. Mirëpo $\tau : T \to a$ është shigjetë universale në bashkësinë e ko-konëve në A që dalin prej funktorit T, atëherë ekziston një shigjetë e vetme $h : a \to Gx$ e tillë që $h\tau = \sigma^\flat$. Po të aplikojmë edhe një herë bashkëngjitjen marrim një shigjetë të vetme $h^\sharp : Fa \to x$ të tillë që $h^\sharp \cdot F\tau = (h\tau)^\sharp = (\sigma^\flat)^\sharp = \sigma$. Uniciteti i shigjetës $h^\sharp$ sjell që $F\tau : T \to Fa$ është shigjetë universale. ∎

E thënë ndryshe, teorema pohon se çdo i bashkëngjitur i majtë ruan kolimitet gjë e cila shkruhet në formën

$$F(\underrightarrow{Lim}_J T) = \underrightarrow{Lim}_J (FT).$$

Sigurisht ka vend edhe dualja e kësaj teoreme që pohon se *çdo funktor që ka të bashkëngjitur të majtë ruan limitet.*

Më tej do të japim disa veti interesante dhe me mjaft përdorim të funktorit kolimit dhe për këtë do të na nevojitet ky përkufizim. Një kategori $\mathcal{J}$ do të quhet *e filtruar* në qoftë se është e tillë që:

(i) Për çdo dy $a, b \in \mathcal{J}$, ekziston një $c \in \mathcal{J}$ dhe shigjetat $a \to c$ e $b \to c$;

(ii) Për çdo çift shigjetash paralele $f, g : a \to b$, ekziston një shigjetë $h : b \to c$ e tillë që $hf = hg$.

Në qoftë se (i) i përkufizimit zëvendësohet me

(i_s) Për çdo kon $s_i : a \to b_i$, ekziston një plotësues ndërrimtar, domethënë një ko-kon $t_i : b_i \to c$ i tillë që $t_i s_i$ është i pavaruar nga i-ja,

atëherë kategoria do të quhet *fortësisht e filtruar.*

Për kategoritë e filtruara së pari ka vend ky pohim.

Pohim 1.2.8 *Funktori* $\underrightarrow{Lim}_{\mathcal{J}} : \mathbf{R}\text{-}Mod^{\mathcal{J}} \to \mathbf{R}\text{-}Mod$ *është ekzakt djathtas, dhe në qoftë se* $\mathcal{J}$ *është e filtruar, atëherë ai është funktor ekzakt.*

Vërtetim. Ekzaktësia djathtas rrjedh direkt nga pohimi 1.2.6 dhe teorema 1.2.7 po të kemi parasysh që kobërthamat janë kolimite (shembulli 1.1.12). Një mënyrë më e shtjellur vërtetimi do të ishte si më poshtë. Për çdo modul M dhe çdo varg ekzakt

$$(A_j) \to (B_j) \to (C_j) \to 0$$

sistemesh kolimite mbi $\mathcal{J}$ në $\mathbf{R}$-Mod, kemi diagramin e mëposhtëm ndërrimtar

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{R^{\mathcal{J}}}(C_j, \Delta M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{R^{\mathcal{J}}}(B_j, \Delta M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{R^{\mathcal{J}}}(A_j, \Delta M) \\
& \| & & \| & & \| \\
0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(\underrightarrow{Lim}_{\mathcal{J}} C_j, M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(\underrightarrow{Lim}_{\mathcal{J}} B_j, M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(\underrightarrow{Lim}_{\mathcal{J}} A_j, M)
\end{array}$$

ku vargu i sipërm është ekzakt dhe homomorfizmat vertikale janë izomorfizma natyralë nga pohimi 1.2.6. Atëherë do të kemi ekzaktësinë e rreshtit të poshtëm, e meqënëse kjo ndodh për çdo modul M do të kemi që edhe vargu

$$\underrightarrow{Lim}_{\mathcal{J}} A_j \to \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{J}} B_j \to \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{J}} C_j \to 0$$

do të jetë ekzakt që provon ekzaktësinë djathtas të $\underrightarrow{Lim}_{\mathcal{J}}$. Për të provuar pjesën e dytë të pohimit po supozojmë se $\mathcal{J}$ është e filtruar dhe duam të vërtetojmë se $\underrightarrow{Lim}_{\mathcal{J}} A_j \to \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{J}} B_j$ është mono sa herë që $A_j \to B_j$ janë mono për çdo $j \in \mathcal{J}$. Vërtet, në qoftë se $[a] \mapsto 0$ ku $a \in A_j$, kjo do të thotë se imazhi b i a-së në B_j kënaq kushtin $[b] = 0$. Atëherë ekziston një morfizëm $j \mapsto j'$ në $\mathcal{J}$ i tillë që $b \mapsto 0$ në $B_{j'}$ pas aplikimit të homomorfizmit korrespondues $B_j \mapsto B_{j'}$. Por në këto kushte imazhi $\bar{a}$ i a-së në $A_{j'}$ pasqyrohet në 0 tek $B_{j'}$ e rrjedhimisht $\bar{a} = 0$. ■

Rrjedhim 1.2.9 *Kolimitet e filtruar ndërrojnë me homologjinë.*

Vërtetim. Vërtet, në qoftë se jepet një kompleks $(C_\bullet, \partial_\bullet)$, ciklet mund ti konsiderojmë si bërthama:

$$0 \longrightarrow Z_n \xrightarrow{incl} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1},$$

kufijtë si kobërthama:

$$Z_{n+1} \xrightarrow{incl} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} B_n \longrightarrow 0,$$

dhe atëherë, homologjia do të jetë kobërthamë:

$$B_n \xrightarrow{incl} Z_n \xrightarrow{\pi} H_n \longrightarrow 0.$$

Le të jetë dhënë një familje kompleksesh e filtruar mbi J

$$\cdots \longrightarrow C^{(i)}_{n+1} \xrightarrow{\partial^{(i)}_{n+1}} C^{(i)}_n \xrightarrow{\partial^{(i)}_n} C^{(i)}_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

e cila indukton kompleksin kolimit

$$\cdots \longrightarrow \underrightarrow{Lim}_J C^{(i)}_{n+1} \xrightarrow{\underrightarrow{Lim}_J \partial^{(i)}_{n+1}} \underrightarrow{Lim}_J C^{(i)}_n \xrightarrow{\underrightarrow{Lim}_J \partial^{(i)}_n} \underrightarrow{Lim}_J C^{(i)}_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

homologjia e n-të e të cilit është $\bar{H}_n = \bar{Z}_n / \bar{B}_n$ ku $\bar{Z}_n = \mathrm{Ker}\underrightarrow{Lim}_J \partial^{(i)}_n$ dhe $\bar{B}_n = \mathrm{Im}\underrightarrow{Lim}_J \partial^{(i)}_{n+1}$. Nga pohimi 1.2.8, $\underrightarrow{Lim}_J$ ruan gjithmonë kobërthamat dhe ruan bërthamat sa herë J është e filtruar, rrjedhimisht $\bar{Z}_n = \underrightarrow{Lim}_J \mathrm{Ker}\partial^{(i)}_n$ dhe $\bar{B}_n = \underrightarrow{Lim}_J \mathrm{Im}\partial^{(i)}_{n+1}$, gjë që sjell se $\bar{H}_n = \underrightarrow{Lim}_J \mathrm{Ker}\partial^{(i)}_n / \underrightarrow{Lim}_J \mathrm{Im}\partial^{(i)}_{n+1}$. Por sikurse pamë më lart, homologjia është kobërthamë dhe $\underrightarrow{Lim}_J$ ruan kobërthamat, rrjedhimisht marrim $\bar{H}_n = \underrightarrow{Lim}_J (\mathrm{Ker}\partial^{(i)}_n / \mathrm{Im}\partial^{(i)}_{n+1}) = \underrightarrow{Lim}_J H^{(i)}_n$ siç edhe kërkohej. ■

Një veti tjetër interesante që lidhet me kategoritë e filtruara është që kolimitet e filtruar ndërrojnë me limitet e fundëm. Më konkretisht, le të jenë dhënë P një kategori e fundme, J një kategori e filtruar dhe $F : P \times J \to R$-**Mod** një funktor. Ekziston një pasqyrim kanonik k i cili plotëson diagramin

$$\begin{tikzcd}
F(p,j) \arrow[d, "\mu_{p,j}"'] & \underleftarrow{Lim}_P F(p,j) \arrow[l, "\nu_{p,j}"'] \arrow[r, "\mu_j"] \arrow[d, dashed, "\alpha_j"] & \underrightarrow{Lim}_J \underleftarrow{Lim}_P F(p,j) \arrow[d, dashed, "k"] \\
\underrightarrow{Lim}_J F(p,j) & \underleftarrow{Lim}_P \underrightarrow{Lim}_J F(p,j) \arrow[l, "\nu_p"'] \arrow[r, equal] & \underleftarrow{Lim}_P \underrightarrow{Lim}_J F(p,j)
\end{tikzcd}$$

Një k e tillë ekziston vërtet. Së pari, ν dhe $\nu_{\bullet,j}$ për çdo j janë kone limite, po ashtu μ dhe $\mu_{p,\bullet}$ për çdo p ko-kone limite. Meqënëse ν është kon në p ndërsa μ natyral në p, atëherë për çdo $j \in J$, kompozimi $\mu_{p,j}\nu_{p,j}$ është kon në p, dhe si pasojë universaliteti i ν sjell ekzistencën e një shigjete α_j që e bën katrorin majtas ndërrues. Meqënëse $\mu_{p,\bullet}$ është kon në j, ashtu do të jetë edhe α nga universaliteti i μ, atëherë ekziston k që e bën katrorin djathtas ndërrues.
Në këto kushte ka vend kjo teoremë.

Teoremë 1.2.10 *Në qoftë se P është kategori e fundme dhe J është e filtruar, atëherë për çdo funktor $F : P \times J \to R$-**Mod** pasqyrimi kanonik*

$$k : \underrightarrow{Lim}_J \underleftarrow{Lim}_P F(p,j) \to \underleftarrow{Lim}_P \underrightarrow{Lim}_J F(p,j)$$

është një izomorfizëm.

Vërtetim. Nga ndërtimi i teoremës 1.1.10 kemi që

$$\underrightarrow{Lim}_J F(p,j) \cong \oplus_j F(p,j)/K \tag{1.6}$$

ku K është nënmoduli i $\oplus_j F(p,j)$ i përftuar nga të gjithë diferencat $x - x'$ ku $x \in F(p,j)$, $x' \in F(p,j')$ sa herë që ekzistojnë shigjetat $u : j \to k$ dhe $u' : j' \to k$ të tilla që $F(p,u)(x) = F(p,u')(x')$. Shënojmë me (x,j) klasën e ekuivalencës së një elementi $x \in F(p,j)$. Meqënëse J është e filtruar, kondita (i) e përkufizimit të kategorisë së filtruar sjell që çdo listë e fundme $(x_1, j_1), ..., (x_m, j_m)$ klasash ekuivalence mund të shkruhet në formën $(y_1, k), ..., (y_m, k)$ për një indeks të dytë k. Kondita (ii) e përkufizmit siguron që çdo barazim midis klasave në listën e dytë ka vend mbas aplikimit të një shigjete të dytë $w : k \to k'$ të marrë në mënyrë të përshtatshme. Për çdo funktor $G : P \to R$-**Mod**, pohimi 1.1.4 tregon se $\underleftarrow{Lim}_P G(p) = \text{Cone}(*, G)$, ku $\text{Cone}(*, G)$ bashkësia e të gjithë koneve τ mbi G me kulm $* = \prod_{p \in P} G(p)$. Në qoftë se $G(p) = \underrightarrow{Lim}_J F(p,j)$ ku P është e fundme, çdo kon i tillë konsiston në një numër të fundëm elementësh të $\underrightarrow{Lim}_J F(p,j)$ dhe kondita që τ është kon, sjell ekzistencën e një numri të fundëm ekuacionesh ndërmjet këtyre elementëve. Meqë J është e filtruar, ajo çka porsa thamë nënkupton që çdo kon τ përbëhet nga elementë të formës $\tau_p = (y_p, k')$ për një indeks të vetëm k', ku $y_p \in F(p,k')$ në fakt përcakton një kon $y : * \to F(\bullet, k')$. Ky kon është element i $\underleftarrow{Lim}_P F(p,k')$ dhe klasa e tij e ekuivalencës (y,k') është element i $\underrightarrow{Lim}_J \underleftarrow{Lim}_P$. Atëherë pasqyrimi

$$\tau \mapsto (y, k') \in \underrightarrow{Lim}_J \underleftarrow{Lim}_P F(p,j),$$

i cili është i pavarur nga zgjedhja e bërë, është inversi i dyanshëm i k-së. ■

1.3 Zgjerimet e Kanit

Situata me të cilën do të merremi në këtë paragraf është përgjithësimi i një situate mjaft të njohur në Algjebrën Homologjike që ka të bëjë me gjetjen e një të bashkëngjituri të djathtë dhe të majtë të funktorit të ndryshimit të unazës. Në qoftë se është dhënë një funktor $K : M \to C$ dhe një kategori A, atëherë ekziston një funktor $A^K : A^C \to A^M$ i tillë që çdo transformimi natyral $\sigma : S \to S'$ i lidh transformimin natyral $\sigma K : SK \to S'K$. Problemi ynë do të jetë të gjejmë të bashkëngjitur të djathtë dhe të majtë të A^K. Në fillim do të trajtojmë këtë problem për të bashkëngjiturit e djathtë.

Përkufizim 1.3.1 Në qoftë se janë dhënë funktorët $K : M \to C$ dhe $T : M \to A$, *zgjerim i djathtë i Kanit i T lidhur me K* është një çift $R, \varepsilon : RK \to T$ ku $R \in A^C$ dhe ε është një transformim natyral i cili është universal i konsideruar si shigjetë nga $A^K : A^C \to A^M$ tek $T \in A^M$.

Për funktorin R që është unik (për shkak të universalitetit të ε) do të rezervojmë shënimin $\mathrm{Ran}_K T$. Universaliteti këtu ka kuptimin e mëposhtëm. Për çdo çift $S, \alpha : SK \to T$ ekziston vetëm një transformim natyral $\sigma : S \to R$ i tillë që $\alpha = \varepsilon \cdot \sigma K : SK \to T$. Korrespondenca $\sigma \to \varepsilon \cdot \sigma K$ përcakton një bijeksion:

$$\mathrm{Nat}(S, \mathrm{Ran}_K T) \cong \mathrm{Nat}(SK, T). \tag{1.7}$$

Emri zgjerim i *djathtë* është zgjedhur për shkak të ndodhjes së $\mathrm{Ran}_K T$ në të djathtë tek bijeksioni i mësipërm. Ndërkaq dimë se shigjetat universale nga $A^K : A^C \to A^M$ tek të gjithë objektet $T \in A^M$ formojnë një të bashkëngjitur të majtë të A^K. Nga kjo rrjedh që në qoftë se çdo $T \in A^M$ ka zgjerim të djathtë të Kanit lidhur me K: $\langle R, \varepsilon_T : RK \to T \rangle$, atëherë korrespondenca $T \mapsto R$ është pasqyrimi që përcakton të bashkëngjiturin e djathtë të A^K dhe se ε është njëshi përkatës.
Në teoremën që pason do të tregojmë se si një zgjerim i djathtë i Kanit mund të shihet si limit. Në qoftë se $K : M \to C$ është funktor, kujtojmë se për çdo $c \in C$ kemi ndërtuar kategorinë presje $(c \downarrow K)$ me objekte çiftet $< f, m >$, të shkruara f për shkurtim, ku $f : c \to Km$. Përcaktojmë funktorin projeksion $Q : (c \downarrow K) \to M$ me funksion objektesh të tillë që $< f, m > \mapsto m$.

Teoremë 1.3.2 *Në qoftë se janë dhënë funktorët $K : M \to C$ dhe $T : M \to A$ të tillë që kompozimi $(c \downarrow K) \to M \to A$ ka limit në A për çdo $c \in C$ koni limit i të cilit është λ dhe le të jetë*

$$Rc = \varprojlim((c \downarrow K) \xrightarrow{Q} M \xrightarrow{T} A) = Lim_f Tm,\ \ f \in (c \downarrow K). \tag{1.8}$$

limiti në fjalë. Çdo $g : c \to c'$ indukton një shigjetë të vetme

$$Rg : \varprojlim TQ \to \varprojlim TQ' \tag{1.9}$$

e cila është ndërrimtare me konin limit. Këto formula përcaktojnë një funktor $R : C \to A$ dhe për çdo $n \in M$, komponentët $\lambda_{1_{Kn}} = \varepsilon_n$ të koneve limite përcaktojnë një transformim natyral $\varepsilon : RK \to T$ dhe çifti R, ε është nje zgjerim i djathtë i Kanit lidhur me K.

Vërtetim. Si fillim shohim se në ç'mënyrë përcaktohet Rg tek (1.9). Në qoftë se jepet $g : c \to c'$ dhe projeksioni $Q' : (c' \downarrow K) \to A$, atëherë çdo $f' : c' \to Km$ përcakton $f'g : c \to Km \in (c \downarrow K)$. Komponentët $\lambda_{f'g} : Rc \to Tm$ formojnë një kon me kulm Rc dhe meqë koni λ' është universal, do të ekzistojë një shigjetë e vetme Rg e cila e bën diagramin

$$\begin{tikzcd} Rc = \varprojlim TQ \arrow[r, "\lambda_{fg'}"] \arrow[d, dashed, "Rg"] & Tm \arrow[d, equal] \\ Rc' = \varprojlim TQ' \arrow[r, "\lambda'_{f'}"] & Tm \end{tikzcd} \tag{1.10}$$

ndërrimtar për çdo f'. Kjo zgjedhje e R e bën atë funktor. Më tej, 1_{Kn} është element i $(Kn \downarrow K)$ kështu që koni limit λ ka një komponent $\lambda_{1_{Kn}} : RKn \to Tn$ të cilin e quajmë ε_n. Për çdo $h : n \to n'$ formojmë diagramin

$$\begin{tikzcd} RKn \arrow[r, "\lambda_{1_{Kn}}"] \arrow[d, "RKh"'] \arrow[dr, "\lambda_{Kh}"] & Tn \arrow[d, "Th"] \\ RKn' \arrow[r, "\lambda'_{1_{Kn'}}"'] & Tn' \end{tikzcd} \tag{1.11}$$

trekëndëshi i poshtëm i të cilit është ndërrimtar nga vetë përkufizimi i Rg për $g = Kh$, kurse i sipërmi është ndërrimtar nga fakti që λ është kon. Kjo tregon se katrori është ndërrimtar që do të thotë se $\varepsilon : RK \to T$ është natyral. Le të jetë $S : C \to A$ një tjetër funktor dhe $\alpha : SK \to T$ një transformim natyral. Do të ndërtojmë tani $\sigma_c : Sc \to Rc$ nga diagrami më poshtë ku f është shigjeta $f : c \to Km$.

$$\begin{tikzcd} Rc = \mathrm{Lim}_f Tm \arrow[r, "\lambda_f"] & Tm \arrow[r, "Th"] & Tm' \\ Sc \arrow[u, dashed, "\sigma_c"] \arrow[ur] \arrow[r, "Sf"'] & SKm \arrow[u, "\alpha_m"'] \arrow[r, "SKh"'] & SKm' \arrow[u, "\alpha_{m'}"'] \end{tikzcd} \tag{1.12}$$

Për çdo shigjetë $h :< f, m >\to< f', m' >$ të $(c \downarrow K)$, ku $f' = Kh \circ f$, kuadrati i djathtë është ndërrues sepse α është natyral. Kjo sjell që shigjetat diagonale $\alpha_m \circ Sf : Sc \to Tm$ formojnë një kon me kulm Sc. Atëherë ekziston një σ_c e vetme siç tregohet në (1.12). Për të provuar se σ është natyral për çdo $g : c \to c'$ formojmë diagramin

$$\begin{tikzcd} Rc \arrow[r, "Rg"] \arrow[rr, bend left, "\lambda_{f'g}"] & Rc' \arrow[r, "\lambda'_{f'}"] & Tm \\ Sc \arrow[u, "\sigma_c"] \arrow[r, "Sg"'] \arrow[rr, bend right, "S(f'\circ g)"'] & Ac' \arrow[u, "\sigma_{c'}"] \arrow[r, "Sf'"'] & SKm \arrow[u, "\alpha_m"'] \end{tikzcd} \tag{1.13}$$

për çdo $f' : c' \to Km$ në $(c' \downarrow K)$. Kuadrati i djathtë dhe ai i jashtëm janë ndërrimtare nga vetë përkufizimi i σ, ai i sipërm nga përkufizimi i Rg tek (1.9). Për pasojë kuadrati majtas bëhet ndërrimtar pas kompozimit me $\lambda'_{f'}$ për të gjitha $\lambda'_{f'}$. Por dimë se λ' është kon limit, rrjedhimisht kuadrati majtas është ndërrimtar. Përkufizimi (1.12) i σ i aplikuar për $c = Kn$, $f = 1_{Kn}$ dhe $m = n$ tregon që $\alpha_n = \lambda_{1_{Kn}}\sigma_{Kn}$, e si rrjedhim që $\alpha = \varepsilon \cdot \sigma K$ për ndonjë σ. Nga ana tjetër, diagrami (1.13) tregon se σ është e vetme me vetinë e mësipërme, kjo sepse vetia përcakton komponenten σ_{Kn} të σ; për të përcaktuar komponentet e tjera zëvendësojmë $c' = Kn$, $f' = 1_{Kn}$ dhe $m = n$ tek (1.13). Kuadrati i majtë ndërron në qoftë se σ është natyral, dhe atëherë $\lambda_g \circ \sigma_c$ është plotësisht e përcaktuar për të gjitha $g : c \to Kn$. Por λ është kon limit, kështu që σ_c është plotësisht e përcaktuar. Pra si përfundim, ε është shigjetë universale çka deshëm të vërtetonim. ■

Rrjedhimi i mëposhtëm është evident.

Rrjedhim 1.3.3 *Në qoftë se A është e plotë, çdo funktor $T : M \to A$ ka një zgjerim të Kanit lidhur me çdo $K : M \to C$, dhe A^K ka të bashkëngjitur të djathtë.*

Zgjerimi i majtë i Kanit $L = \mathrm{Lan}_K T$ përshkruhet ngjashmërisht si një çift $L, \eta : T \to LK$ ku η është shigjetë universale nga T në A^K. Kjo indukton një bijeksion

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Lan}_K T, S) \cong \mathrm{Nat}(T, SK) \tag{1.14}$$

i cili është natyral në $S \in A^C$. Kur ekzistojnë kolimitet në A, L jepet me anën e barazimit

$$Lc = \underrightarrow{Lim}((K \downarrow c) \xrightarrow{P} M \xrightarrow{T} A) \tag{1.15}$$

ku P është projeksioni $\langle m, Km \to c\rangle \mapsto m$.

Pohimi që pason tregon se kolimitet dhe limitet po ashtu mund të përshkruhen me anën e zgjerimeve të Kanit që tregon se koncepti i këtyre zgjerimeve mbart në vetvete mjaft përgjithësi.

Teoremë 1.3.4 *Një funktor $T : M \to A$ ka një kolimit atëherë dhe vetëm atëherë kur ai ka një zgjerim të majtë të Kanit lidhur me të vetmin funktor $K_1 : M \to \mathbf{1}$, dhe atëherë $\underrightarrow{Lim}T$ është vlera e $Lan_{K_1}T$ mbi të vetmin objekt të kategorisë $\mathbf{1}$.*

Vërtetim. Një funktor $S : \mathbf{1} \to A$ është thjesht një objekt $a \in A$, dhe një transformim natyral $\alpha : T \to SK_\mathbf{1}$ për $K_\mathbf{1} : M \to \mathbf{1}$ është thjesht një kon me bazë T dhe kulm a. Meqënëse zgjerimi i majtë i Kanit është i tillë që $\eta : T \to LK_\mathbf{1}$ është shigjetë universale, kjo siguron automatikisht një kon universal me bazë T e rrjedhimisht kolimitin e funktorit T. ■

Simetrikisht zgjerimet e djathtë të Kanit lidhur me të njëjtin $K_\mathbf{1}$ japim limitet.

1.4 Kriteri Bieri-Eckman për modulet

Në këtë paragraf do të shohim se si kriteri Bieri-Eckman për modulet karakterizon konditën FP_n $(n \in \mathbb{N}_*)$ për modulet tërësisht me anën e funktorëve Tor dhe Ext.

Para se të japim përkufizimin e konditës FP_n dhe më pas kriterin, po rendisim disa rezultate nga teoria e moduleve me paraqitje të fundme.

Pohim 1.4.1 *Konditat e mëposhtme për një* $\mathbf{R}$*-modul* M *janë të njëvlershme.*

(i) Ekziston një varg ekzakt $R^m \to R^n \to M \to 0$ *ku* $m, n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) Ekziston një varg ekzakt $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ *ku* P_0 *dhe* P_1 *janë module projektivë dhe me përftim të fundëm;*

(iii) M *është me përftim të fundëm, dhe për çdo epimorfizëm* $\varepsilon : P \to M$ *ku* P *është projektiv dhe me përftim të fundëm,* $\ker\varepsilon$ *është me përftim të fundëm.*

Vërtetimi i këtij pohimi bazohet në të ashtëquajturen Lema e Schanuel-it.

Lemë 1.4.2 *Le të jenë dhënë* $0 \to K \to P \to M \to 0$ *dhe* $0 \to K' \to P' \to M \to 0$ *vargje ekzaktë ku* P *dhe* P' *janë projektivë. Atëherë* $P \oplus K' \cong P' \oplus K$*.*

Vërtetim. Le të jetë Q pullback-u i epimorfizmave të diagramit

$$\begin{tikzcd} & P' \arrow[d, "\pi'"] \\ P \arrow[r, "\pi"'] & M, \end{tikzcd}$$

domethënë, Q është nënmoduli i $P \times P'$ i përbërë nga çiftet (x, x') të tillë që $\pi(x) = \pi'(x')$. Mund të tregohet lehtë tani se ekziston një diagram ndërrimtar

$$\begin{tikzcd} & K' \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & K' \arrow[d, tail] \\ K \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & Q \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & P' \arrow[d, two heads] \\ K \arrow[r, tail] & P \arrow[r, two heads] & M \end{tikzcd}$$

me rreshta dhe kolona ekzakte. Meqënëse P dhe P' janë projektivë, dy vargjet ekzakte që përmbajnë Q duhet të ndahen dhe në këtë mënyrë marrim $P \oplus K' \cong Q \cong P' \oplus K$.
■

Vërtetimi i pohimit 1.4.1. Implikimet $(iii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii)$ janë evidente. Për të provuar $(ii) \Rightarrow (iii)$, vërejmë së pari se M është, në kushtet (ii), me patjetër me përftim të fundëm, meqë P_0 është me përftim të fundëm. Po të aplikojmë lemën e Schanuel-it marrim $P \oplus \ker\{P_0 \to M\} \cong P_0 \oplus \ker\varepsilon$. Por krahu i majtë është me përftim të fundëm nga supozimi, rrjedhimisht i tillë do të jetë edhe $\ker\varepsilon$. ■
Moduli M do të quhet *me paraqitje të fundme* në qoftë se për të plotësohen konditat e pohimit 1.4.1. Zakonisht themi se kondita (i) e pohimit jep një paraqitje me n *gjeneratorë dhe* m *relatorë*. Ky përkufizim mund të përgjithësohet më tej si vijon.

Përkufizim 1.4.3 Një modul M do të quhet i tipit FP_n ($n \geq 0$) në qoftë se ekziston një rezolucion projektiv i pjesshëm $P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ ku P_i-të janë me përftim të fundëm. M do të quhet i tipit FP_∞ në qoftë se është i tipit FP_n për çdo $n \geq 0$.

Është e qartë që FP_0 është e njëjtë me të qënit të modulit me përftim të fundëm, kurse FP_1 e njëjtë me të qënit të tij me paraqitje të fundme. Pohimi 1.4.1 mund të përgjithësohet në mënyrë që të hapë shtegun për përdorimin e përkufizimit të ri.

Pohim 1.4.4 *Për çdo modul M dhe $n \geq 0$ konditat e mëposhtme janë të njëvlershme:*

(i) Ekziston një rezolucion i pjesshëm $F_n \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$ ku çdo F_i është i lirë me rank të fundëm;

(ii) M është FP_n;

(iii) M është me përftim të fundëm, dhe për çdo rezolucion të pjesshëm projektiv $P_k \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ ku P_i janë me përftim të fundëm dhe $k < n$, $ker\{P_k \to P_{k-1}\}$ është me përftim të fundëm.

Para se të bëjmë vërtetimin e këtij pohimi do të vërtetojmë një përgjithësim të lemës së Schanuel-it.

Lemë 1.4.5 *Le të jenë dhënë*

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

dhe

$$0 \to P'_n \to P'_{n-1} \to \cdots \to P'_0 \to M \to 0$$

dy vargje ekzakte ku P_i dhe P'_i janë projektivë për çdo $i \leq n-1$. Atëherë,

$$P_0 \oplus P'_1 \oplus P_2 \oplus P'_3 \oplus \cdots \cong P'_0 \oplus P_1 \oplus P'_2 \oplus P_3 \oplus \cdots$$

Rrjedhimisht, në qoftë se P_i dhe P'_i janë me përftim të fundëm për $i \leq n-1$, atëherë P_n është me përftim të fundëm vetëm në qoftë se P'_n është i tillë.

Vërtetim. Vërtetimin do ta bëjmë me induksion sipas n. Le të jenë K dhe K' përkatësisht bërthamat e $P_{n-2} \to P_{n-3}$ dhe $P'_{n-2} \to P'_{n-3}$. Nga supozimi induktiv kemi

$$K \oplus Q \cong K' \oplus Q'$$

ku

$$Q = P'_{n-2} \oplus P_{n-3} \oplus \cdots$$

dhe

$$Q' = P_{n-2} \oplus P'_{n-3} \oplus \cdots$$

Nga ana tjetër kemi vargjet ekzakte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_n \arrow[r] & P_{n-1} \oplus Q \arrow[r] & K \oplus Q \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_n \arrow[r] & P'_{n-1} \oplus Q' \arrow[r] & K' \oplus Q' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Meqënëse $P_{n-1} \oplus Q$ dhe $P'_{n-1} \oplus Q'$ janë projektivë, atëherë lema e Schanuel-it sjell që

$$P_n \oplus P'_{n-1} \oplus Q' \cong P'_n \oplus P_{n-1} \oplus Q,$$

që është izomorfizmi i kërkuar. ■

Vërtetimi i pohimit 1.4.4. Implikimi $(i) \Rightarrow (ii)$ është trivial. Shohim tani $(ii) \Rightarrow (iii)$. Në qoftë se M është i tipit FP_n, atëherë për çdo $k < n$ ekziston një rezolucion projektiv i pjesshëm $P_k \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ ku P_i janë me përftim të fundëm dhe $\ker\{P_k \to P_{k-1}\}$ është me përftim të fundëm. Nga lema e mësipërme rrjedh që çdo rezolucion projektiv i pjesshëm $P'_k \to \cdots \to P'_0 \to M \to 0$ me P'_i me përftim të fundëm, e ka $\ker\{P'_k \to P'_{k-1}\}$ me përftim të fundëm, dhe atëherë ka vend (iii). Së fundi shohim $(iii) \Rightarrow (i)$: Në qoftë se (iii) është e vërtetë atëherë ne mund ta ndërtojmë rezolucionin $F_n \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$ hap pas hapi. ■

Pohimi i mëposhtëm tregon se çfarë ndodh nëse konditat e pohimit 1.4.4 plotësohen për të gjitha $n \geq 0$.

Pohim 1.4.6 *Konditat e mëposhtme për një modul M janë ekuivalente:*

(i) M ka një rezolucion të lirë dhe me përftim të fundëm.

(ii) M ka një rezolucion projektiv dhe me përftim të fundëm.

(iii) M është i tipit FP_∞.

Vërtetim. Implikimet $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ janë evidente. Në qoftë se (iii) është e vërtetë atëherë mund të përdorim pohimin 1.4.4 (iii) për të ndërtuar hap pas hapi një rezolucion të lirë të tipit të fundëm, e rrjedhimisht kemi që $(iii) \Rightarrow (i)$. ■

Për të vërtetuar rezultatin kryesor të këtij paragrafi që është teorema 1.4.12, do të japim pa vërtetim edhe disa pohime nga [42] të cilat do të nevojiten në vërtetimin e kriterit Bieri-Eckmann për modulet FP_∞.

Lemë 1.4.7 *Për një modul $M \in$ **Mod**-R pohimet e mëposhtme janë të njëvlershme.*

(a) M është me përftim të fundëm.

*(b) Për çdo familje $(X_i)_{i\in I}$ nga R-**Mod**, homomorfizmi*

$$\varphi : M \otimes_R \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} (M \otimes X_i) \text{ i tillë që } m \otimes_R (x_i)_{i\in I} \mapsto (m \otimes_R x_i)_{i\in I},$$

është një syrjeksion natyral.

(c) *Për çdo bashkësi I homomorfizmi natyral $\varphi : M \otimes_R R^I \to (M \otimes_R R)^I = M^I$ është syrjektiv.*

Lemë 1.4.8 *Për një modul $M \in$ **Mod**-R pohimet e mëposhtme janë të njëvlershme.*

(a) *M është me paraqitje të fundme.*

(b) *Për çdo familje $(X_i)_{i\in I}$ nga R-**Mod**, homomorfizmi*

$$\varphi : M \otimes_R \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I}(M \otimes X_i) \text{ i tillë që } m \otimes_R (x_i)_{i\in I} \mapsto (m \otimes_R x_i)_{i\in I},$$

është një izomorfizëm natyral.

(c) *Për çdo bashkësi I homomorfizmi natyral $\varphi : M \otimes_R R^I \to (M \otimes_R R)^I = M^I$ është izomorfizëm.*

Lemë 1.4.9 *Për një modul $M \in R$-**Mod** pohimet e mëposhtme janë të njëvlershme.*

(a) *M është me paraqitje të fundme.*

(b) *Funktori Hom$(M, \bullet) : R$-**Mod** $\to$ **Ab** ruan kolimitet e filtruar.*

Vërtetimet e tre pohimeve që pasojnë janë tonat. Ekzistojnë edhe vërtetime të tjera për to, psh tek [11], por ne vendosëm të japim vërtetime që bazohen në njohuri që përfshihen vetëm në tezë.

Pohim 1.4.10 *Për një modul $M \in$ **Mod**-R dhe $n \geq 1$ pohimet e mëposhtme janë të njëvlershme.*

(i) *M është i tipit FP_n.*

(ii) *$Tor_k(M, \bullet)$ ruan produktet e drejtë për $0 \leq k \leq n-1$.*

Vërtetim. $(i) \Rightarrow (ii)$: Shohim në fillim rastin kur $n = 1$. Duke qënë se M është e tipit FP_1, ajo do të jetë me paraqitje të fundme, atëherë nga lemma 1.4.8 kemi që $M \otimes_R \bullet$ ruan produktet e drejtë. Mirëpo nga ana tjetër, $M \otimes_R \bullet \simeq \mathrm{Tor}_0(M, \bullet)$, prandaj kemi të vërtetë pohimin për $n = 1$. Së dyti, për $n \geq 2$, meqënëse M është FP_n, do të ekzistojë një rezolucion i lirë me përftim të fundëm

$$\mathcal{P} : R^{k_n} \to R^{k_{n-1}} \to \cdots \to R^{k_1} \to R^{k_0} \to M \to 0.$$

Për çdo familje $(X_i)_{i\in I} \in R$-**Mod** dhe për çdo $0 \leq k \leq n-1$, dimë se $\mathrm{Tor}_k(M, \prod_{i\in I} X_i) =$ Homologjinë$(\mathcal{P} \otimes_R \prod_{i\in I} X_i)$. Nga ana tjetër kemi diagramin e mëposhtëm ndërrimtar

$$\begin{tikzcd}
R^{k_n} \otimes_R \prod_{i\in I} X_i \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_n"] & R^{k_{n-1}} \otimes_R \prod_{i\in I} X_i \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & R^{k_0} \otimes_R \prod_{i\in I} X_i \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"] & 0 \\
\prod_{i\in I}(R^{k_n} \otimes_R X_i) \arrow[r] & \prod_{i\in I}(R^{k_{n-1}} \otimes_R X_i) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \prod_{i\in I}(R^{k_0} \otimes_R X_i) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ku pasqyrimet vertikale janë izomorfizma nga [7], §3, shëmbulli 3, rreshti i sipërm është kompleksi $\mathcal{P} \otimes_R \prod_{i \in I} X_i$ dhe për çdo $0 \leq k \leq n-1$ homologjia e rreshtit të poshtëm është izomorfe me $\prod_{i \in I} \mathrm{Tor}_k(M, X_i)$. Rrjedhimisht marrim izomorfizmin e kërkuar $\mathrm{Tor}_k(M, \prod_{i \in I} X_i) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Tor}_k(M, X_i)$.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Vërtetimin do ta kryejmë me induksion sipas $n \geq 1$. Rastet $n = 1$ dhe $n = 2$ do të kërkojnë trajtim të veçantë. Për $n = 1$ kemi që $\mathrm{Tor}_0(M, \bullet)$ ruan produktet e drejtë. Meqë $\mathrm{Tor}_0(M, \bullet) \simeq M \otimes_R \bullet$, mund të shfrytëzojmë lemën 1.4.8 nga e cila marrim që M është e tipit FP_1. Tregojmë vërtetësinë e pohimit për $n = 2$, domethënë se sa herë që $\mathrm{Tor}_1(M, \bullet)$ dhe $\mathrm{Tor}_0(M, \bullet)$ ruajnë produktet e drejtë, atëherë M është e tipit FP_2. Nga më sipër kemi që M është e tipit FP_1 e për pasojë ekziston një rezolucion i lirë me përftim të fundëm

$$R^{k_1} \to R^{k_0} \to M \to 0.$$

Po të shënojmë me K bërthamën e pasqyrimit të skajit të majtë, marrim vargun e shkurtër ekzakt

$$0 \to K \to R^{k_0} \to M \to 0. \tag{1.16}$$

Vargu i parë i gjatë ekzakt i Tor i induktuar prej tij, do të ketë si pjesë fundore vargun ekzakt të mëposhtëm

$$0 \to \mathrm{Tor}_1(M, X) \to K \otimes_R X \to R^{k_0} \otimes_R X \to M \otimes_R X \to 0$$

Për $X = \prod_{i \in I} X_i$, kemi diagramin e mëposhtëm komutativ

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Tor}_1(M, \prod_{i \in I} X_i) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & K \otimes_R \prod_{i \in I} X_i \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & R^{k_0} \otimes_R \prod_{i \in I} X_i \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & M \otimes_R \prod_{i \in I} X_i \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \prod_{i \in I} \mathrm{Tor}_1(M, X_i) \arrow[r] & \prod_{i \in I} K \otimes_R X_i \arrow[r] & \prod_{i \in I} R^{k_0} \otimes_R X_i \arrow[r] & \prod_{i \in I} M \otimes_R X_i
\end{tikzcd}$$

ku izomorfizmat e skajeve janë nga supozimi induktiv, kurse i treti nga fakti që R^{k_0} është i lirë me përftim të fundëm. Gjithashtu të dy rreshtat janë ekzakte dhe në këto kushte mund të zbatojmë lemën 5, prej së cilës kemi që pasqyrimi φ është izomorfizëm që do të thotë se K është FP_1 e rrjedhimisht M është FP_2. Së fundi do të vërtetojmë implikimin e pohimit tonë për $n \geq 3$. Po të kemi parasysh se tek (1.16) R^{k_0} është i sheshtë, marrim për çdo $2 \leq k \leq n-1$ dhe çdo modul X izomorfizmin

$$\mathrm{Tor}_{k-1}(K, X) \cong \mathrm{Tor}_k(M, X). \tag{1.17}$$

Kurse, nga vërtetimi i rastit $n = 2$, kemi që $\mathrm{Tor}_0(K, \bullet)$ ruan produktet e drejtë. Nëse tani tek (1.17) marrim $X = \prod_{i \in I} X_i$, shohim se për $1 \leq k-1 \leq n-2$, $\mathrm{Tor}_{k-1}(K, \prod_{i \in I} X_i) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Tor}_{k-1}(K, X_i)$ e cila së bashku me faktin që $\mathrm{Tor}_0(K, \bullet)$ ruan produktet e drejtë dhe supozimin induktiv, na jep që K është e tipit FP_{n-1}, e për rrjedhojë M është e tipit FP_n. ■

Pohim 1.4.11 *Për një modul $M \in R$-**Mod** dhe $n \geq 1$ pohimet e mëposhtme janë të njëvlershme.*

(i) M është i tipit FP_n.

(ii) $Ext^k(M, \bullet)$ ruan kolimitet e filtruar për $0 \leq k \leq n-1$.

Vërtetim. $(i) \Rightarrow (ii)$: Shohim në fillim rastin kur $n = 1$. Duke qënë se M është e tipit FP_1, ajo do të jetë me paraqitje të fundme, atëherë nga lemma 1.4.9 $\mathrm{Hom}(M, \bullet)$ ruan kolimitet e filtruar, e rrjedhimisht e njëjta gjë ndodh me $\mathrm{Ext}^0(M, \bullet)$ si ekuivalenti i $\mathrm{Hom}(M, \bullet)$. Le të jetë tani $n \geq 2$ dhe

$$R^{s_n} \to R^{s_{n-1}} \to \cdots \to R^{s_1} \to R^{s_0} \to M \to 0$$

një rezolucion i lirë me përftim të fundëm i M-së me gjatësi n. Për çdo familje të drejtuar modulesh $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ kemi diagramin e mëposhtëm ndërrimtar

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(R^{s_0}, \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} X_i) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}(R^{s_{n-1}}, \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} X_i) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(R^{s_n}, \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} X_i) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} \mathrm{Hom}(R^{s_0}, X_i) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} \mathrm{Hom}(R^{s_{n-1}}, X_i) \arrow[r] & \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} \mathrm{Hom}(R^{s_n}, X_i)
\end{tikzcd}$$

ku homomorfizmat vertikale janë izomorfizma pasi për çdo $0 \leq k \leq n$,

$$\underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} \mathrm{Hom}(R^{s_k}, X_i) \cong \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} (X_i^{s_k}) \cong (\underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} X_i)^{s_k}$$

meqë kolimitet e filtruar ndërrojnë me produktet e drejtë të fundëm (teorema 1.2.10), dhe nga ana tjetër, qartësisht kemi që

$$(\underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} X_i)^{s_k} \cong \mathrm{Hom}(R^{s_k}, \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} X_i).$$

Ndërkaq për çdo $0 \leq k \leq n-1$, homologjia e kompleksit të rreshtit të sipërm të diagramit nuk është veçse $\mathrm{Ext}^k(M, \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} X_i)$, ndërsa ajo e atij të poshtëm është $\underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} \mathrm{Ext}^k(M, X_i)$ sepse dimë që homologjia ndërron me kolimitet e filtruar.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Vërtetimin do ta kryejmë me induksion sipas $n \geq 1$. Rastet $n = 1$ dhe $n = 2$ do të kërkojnë trajtim të veçantë. Për $n = 1$ kemi që $\mathrm{Ext}^0(M, \bullet)$ ruan kolimitet e filtruar, dhe meqënëse $\mathrm{Ext}^0(M, \bullet) \simeq \mathrm{Hom}(M, \bullet)$, atëherë nga lema 1.4.9 kemi që M është FP_1. Më tej tregojmë vërtetësinë e pohimit për $n = 2$, domethënë të tregojmë se sa herë që $\mathrm{Ext}^0(M, \bullet)$ dhe $\mathrm{Ext}^1(M, \bullet)$ ruajnë kolimitet e filtruar, kemi që M është e tipit FP_2. Duke qënë se M është e tipit FP_1 meqë $\mathrm{Ext}^0(M, \bullet)$ ruan kolimitet e filtruar, atëherë ekziston një rezolucion

$$R^{s_1} \to R^{s_0} \to M \to 0$$

dhe po të jetë K bërthama e pasqyrimit të fundit majtas, kemi edhe vargun e shkurtër ekzakt

$$0 \to K \to R^{s_0} \to M \to 0. \tag{1.18}$$

Nga teorema e vargut të dytë ekzakt për Ext kemi vargun e mëposhtëm ekzakt

$$0 \to \mathrm{Hom}(M, X) \to \mathrm{Hom}(R^{s_0}, X) \to \mathrm{Hom}(K, X) \to \mathrm{Ext}^1(M, X) \to 0.$$

Për çdo familje të drejtuar modulesh $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$, marrim diagramin ndërrimtar

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(M, \varinjlim_{\mathcal{I}} X_i) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}(R^{s_0}, \varinjlim_{\mathcal{I}} X_i) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}(K, \varinjlim_{\mathcal{I}} X_i) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & \mathrm{Ext}^1(M, \varinjlim_{\mathcal{I}} X_i) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \arrow[d, "="] \\
\varinjlim_{\mathcal{I}} \mathrm{Hom}(M, X_i) \arrow[r] & \varinjlim_{\mathcal{I}} \mathrm{Hom}(R^{s_0}, X_i) \arrow[r] & \varinjlim_{\mathcal{I}} \mathrm{Hom}(K, X_i) \arrow[r] & \varinjlim_{\mathcal{I}} \mathrm{Ext}^1(M, X_i) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Nga kushtet kemi që homomorfizmi i parë vertikal majtas dhe ai i dytë djathtas janë izomorfizma, si tek vërtetimi i kushtit të nevojshëm del se homomorfizmi i dytë vertikal majtas është po ashtu izomorfizëm, dhe atëherë lema 5 sjell që ψ është izomorfizëm që do të thotë se K është me paraqitje të fundme, dhe rrjedhimisht M është e tipit FP_2. Supozojmë tani se për çdo $n \geq 3$ dhe për çdo $0 \leq k \leq n-1$, $\mathrm{Ext}^k(M, \bullet)$ ruan kolimitet e filtruar dhe duam të tregojmë se M është e tipit FP_n. Meqë tek (1.18) R^{s_0} është projektiv do të kemi që për $1 \leq k \leq n-2$,

$$\mathrm{Ext}^k(K, X) \cong \mathrm{Ext}^{k+1}(M, X),$$

e rrjedhimisht $\mathrm{Ext}^k(K, \bullet)$ ruan kolimitet e filtruar për çdo $1 \leq k \leq n-2$, ndërkaq, si tek vërtetimi i rastit $n = 2$, $\mathrm{Ext}^0(K, \bullet)$ ruan kolimitet e filtruar, dhe atëherë nga supozimi induktiv do të kemi se K është e tipit FP_{n-1}. Kjo sjell që M është e tipit FP_n siç dëshironim. ■

Një funktor F : **R-Mod** $\to$ **R-Mod** do të quhet *i vazhdueshëm* në qoftë se ai ruan të gjithë kolimitet e filtruar, domethënë që $F(\varinjlim(M)) = \varinjlim(F(M))$ për çdo funktor $M : \mathcal{J} \to$ **R-Mod** ku $\mathcal{J}$ është kategori e filtruar. Një rrjedhim i rëndësishëm i pohimeve 1.4.10 dhe 1.4.11 është teorema e mëposhtme

Teoremë 1.4.12 *(Kriteri Bieri-Eckmann) Le të jetë $M \in R$-**Mod**. Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente.*

(i) M është i tipit FP_∞.

(ii) Për çdo $n \geq 0$, $Ext^n_R(M, \bullet)$ ruan kolimitet e filtruar (është i vazhdueshëm).

(iii) Për çdo $n \geq 0$, $Tor_n^{R^{opp}}(M, \bullet)$ ruan produktet e drejtë.

Vërejtje 1.4.13 Interesi ynë për pikën (iii) të teoremës 1.4.12 është përdorimi i saj në vërtetimin e kushtit të mjaftueshëm të teoremës 2.3.1. Në atë rast, rolin e unazës R e luan unaza monoidale $\mathbb{Z}S$ ku S është një monoid inversiv. Dihet që për monoidët inversivë $\mathbb{Z}S \cong \mathbb{Z}S^{opp}$ ku rolin e izomorfizmit e luan pasqyrimi $s \mapsto s^{-1}$. Për këtë arsye $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}S^{opp}}(M, \bullet)$ tek (iii) i teoremës 1.4.12 zëvendësohet me $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}S}(M, \bullet)$.

1.5 Konditat FP_n dhe bi-FP_n për monoidët

Rezultatet e përgjithshme të paragrafit të mësipërm do ti zbatojmë përgjatë tezës për monoidët dhe për këtë arsye do të japim në këtë paragraf përkufizimet e koditave FP_n dhe bi-FP_n për ta.

Një monoid S do të quhet i tipit FP_n për $n \geq 0$ kur $\mathbb{Z}S$-moduli trivial $\mathbb{Z}$ është i tipit FP_n në kategorinë $\mathbb{Z}S$-Mod. Ai do të quhet i tipit FP_∞ kur është i tipit FP_n për çdo $n \geq 0$.

Shëmbull 1.5.1 (Monoidët e tipit FP_n ku $n = 0, 1$) Të gjithë monoidët janë të tipit FP_0. Një grup G është i tipit FP_1 vetëm kur është me përftim të fundëm (folklor). Një monoid inversiv është i tipit FP_1 vetëm kur është me përftim të fundëm [32].

Shëmbull 1.5.2 (Monoidët e fundëm janë të tipit FP_∞) Çdo monoid i fundëm S është i tipit FP_∞. Në këtë rast si rezolucion i lirë me përftim të fundëm shërben i ashtëquajturi bar rezolucioni johomogjen:

$$\bar{\mathbf{B}} : \cdots \longrightarrow \bar{B}_n \xrightarrow{\partial_n} \bar{B}_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bar{B}_1 \xrightarrow{\partial_1} \bar{B}_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

ku për çdo $n \geq 0$, $\bar{B}_n$ është $\mathbb{Z}S$-moduli i majtë i lirë me bazë bashkësinë e n-sheve $[x_1|x_2|...|x_n]$ të elementëve të S dhe pasqyrimet që figurojnë aty jepen nga formulat:

$$\partial_n[x_1|x_2|...|x_n] = x_1[x_2|...|x_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[x_1|...|x_i x_{i+1}|...|x_n] + (-1)^n[x_1|...|x_{n-1}]$$

dhe

$$\varepsilon[] = 1.$$

Ekzaktësia e vargut ($\bar{\mathbf{B}}$) provohet duke treguar se familja e pasqyrimeve

$$\bar{\Delta}_{-1}(1) = [], \bar{\Delta}_n(x[x_1|, ..., |x_n]) = [x|x_1|...|x_n] \text{ për } n \geq 0$$

përbën një homotopi kontraktuese. Së fundi, secila prej $\bar{B}_n$ është me rank të fundëm pasi S ka një numër të fundëm elementësh, prandaj S është e tipit FP_∞.

Me interes për ne janë edhe monoidët e tipit bi-FP_n. Monoidi S do të quhet i tipit *bi-FP_n* në qoftë se $\mathbb{Z}S$ është i tipit FP_n në kategorinë $\mathbb{Z}S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}S^{opp}$-Mod. Ky përkufizim është dhënë për herë të parë nga Otto dhe Kobayashi tek [45]. Në qoftë se monoidi është i tipit bi-FP_n për çdo $n \geq 0$, atëherë ai do të quhet i tipit *bi-FP_∞* . Ka vend pohimi i mëposhtëm.

Pohim 1.5.3 *([45], Pohimi 4.2) Në qoftë se monoidi S është i tipit bi-FP_n për ndonjë $n \geq 0$, atëherë ai është i tipit FP_n.*

Vërtetim. Le te jetë

$$C_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow \mathbb{Z}S \longrightarrow 0 \tag{1.19}$$

një rezolucion i lirë me rank të fundëm i $\mathbb{Z}S$, pra një kompleks ekzakt ku secila C_k është një shumë e drejtë e fundme kopjesh të $\mathbb{Z}S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}S^{opp}$. Është e qartë që (1.19) mund të shihet edhe si një rezolucion i lirë i $\mathbb{Z}S$ në Mod-$\mathbb{Z}S$. Po të tensorojmë tani (1.19) me $\mathbb{Z}S$ modulin e majtë trivial $\mathbb{Z}$, atëherë përftojmë kompleksin

$$C_n \otimes_{\mathbb{Z}S} \mathbb{Z} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \otimes_{\mathbb{Z}S} \mathbb{Z} \longrightarrow C_0 \otimes_{\mathbb{Z}S} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{1.20}$$

në $\mathbb{Z}S$-Mod i cili është ekzakt sepse për çdo $k > 0$, $H_k(C_k \otimes_{\mathbb{Z}S} \mathbb{Z}) = Tor_k^{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}S, \mathbb{Z}) = 0$ meqënëse (1.19) është një rezolucion i lirë i $\mathbb{Z}S$. Gjithashtu (1.20) është me rank të fundëm meqënëse i tillë ka qenë edhe (1.19). ■

1.6 Dimensioni kohomologjik

Në qoftë se $M \in R$-**Mod**, do të quajmë dimension projektiv të M-së të cilin e shënojmë me proj $\dim_R M$, inferiorin e $n \geq 0$ të tilla që M ka një rezolucion projektiv me gjatësi n:

$$0 \to P_n \to \cdots \to P_0 \to 0.$$

Në qoftë se M nuk ka një rezolucion të tillë të fundëm, do të themi që proj $\dim_R M = \infty$. Para se të japim përkufizmin e dimensionit kohomologjik të një monoidi do të na nevojitet kjo lemë.

Lemë 1.6.1 *Kondităt e mëposhtme janë ekuivalente:*

(i) *proj* $\dim_R M \leq n$.

(ii) $Ext_R^i(M, \bullet) = 0$ *për* $i > n$.

(iii) $Ext_R^{n+1}(M, \bullet) = 0$.

(iv) *Në qoftë se* $0 \to K \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ *është një varg ekzakt modulesh ku të gjitha* P_i*-të janë projektivë, atëherë* K *është projektive.*

Vërtetim. Vargu i implikimeve $(iv) \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ është i qartë nga përkufizimet, kështu që mbetet për t'u vërtetuar $(iii) \Rightarrow (iv)$. Le të jetë dhënë një rezolucion projektiv si tek (iv), atëherë e plotësojmë atë në mënyrë të çfardoshme në një rezolucion projektiv të pafundëm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & P_n \arrow[r] \arrow[d, two heads] & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& L \arrow[ur, hook] & K \arrow[ur, hook] & & & & &
\end{tikzcd}$$

Për çdo R-modul N, një $(n+1)$-ko-cikël nga $\mathrm{Hom}_R(P_{n+1}, N)$ është një pasqyrim $P_{n+1} \to N$ kompozimi i të cilit me $P_{n+2} \to P_{n+1}$ është zero. Për pasojë çdo ko-cikël mund të konsiderohet si një pasqyrim $\varphi : L \to N$. Ky kocikël do të jetë një ko-kufi në qoftë se φ zgjerohet në një pasqyrim $P_n \to N$. Kjo do të thotë se (iii) sjell që çdo pasqyrim mbi L zgjerohet në P_n. Kjo në veçanti ndodh me identikun në L, dhe atëherë $P_n = L \oplus K$, çka sjell që K është projektive. ■

Interesi ynë është për modulet mbi unazat monoidale $\mathbb{Z}S$. Me përkufizim do të themi se një monoid S ka *dimension kohomologjik*, që e shënojme me cd$S$, numrin $n \in \mathbb{N}_*$ në qoftë se n është më i vogli numër natyror ose zero i tillë që çdo njëra nga kondităt e lemës të jetë e vërtetë.

1.7 Ndryshimi i unazave

Problemi të cilin do të trajtojmë në këtë paragraf është ai i studimit të efektit që ka mbi grupin Ext_R^n ndryshimi i unazës $\mathbf{R}$. Më konkretisht, le të jenë $\mathbf{R}$ dhe $\mathbf{R}'$ dy unaza dhe $U : \mathbf{R}'$-**Mod** $\to$ **R-Mod** një funktor aditiv. Ka vend teorema e mëposhtme.

Teoremë 1.7.1 *(i) Në qoftë se U ka të bashkëngjitur të majtë F :* **R-Mod** $\to$ **R′-Mod** *dhe në qoftë se U ruan epimorfizmat, atëherë F çon projektivët në projektivë.*
(ii) Në qoftë se U ka të bashkëngjitur të djathtë $\bar{F}$: **R-Mod** $\to$ **R′-Mod** *dhe në qoftë se U ruan injeksionet, atëherë $\bar{F}$ çon injektivët tek injektivët.*

Vërtetimi i teoremës është rrjedhim i menjëhershëm i lemës së mëposhtme (dhe dualit të saj), i teoremës 1.2.7, për aplikimin e së cilës kemi parasysh që në një kategori modulesh monomorfizmat janë limite dhe epimorfizmat janë kolimite, dhe së fundi i faktit që çdo funktor aditiv i cili ruan bërthamat dhe kobërthamat është ekzakt.

Lemë 1.7.2 *Le të jetë dhënë $\langle F, G, \varphi \rangle : C \to D$ një bashkëngjitje. Në qoftë se G pasqyron epit në epi, atëherë F pasqyron projektivët në projektivë.*

Vërtetim. Për çdo objekt projektiv P në C konsiderojmë diagramin në D,

$$\begin{tikzcd} & F(P) \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, two heads, "\nu"] & B \end{tikzcd}$$

Po të aplikojmë mbi të G-në dhe pastaj të bëjmë kompozimin $Gf \circ \eta_P = \varphi f$ marrim diagramin e mëposhtëm

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\varphi f"] \\ GA \arrow[r, two heads, "G\nu"] & GB \end{tikzcd}$$

tek i cili, nga supozimi, $G\nu$ është përsëri epi. Nga vetia projektive e objektit P tani ekziston një shigjetë $\psi' : P \to GA$ në C e tillë që $G\nu \circ \psi' = \varphi f$. Po të shënojmë me $\psi = \varphi^{-1}(\psi')$, e cila është një shigjetë nga $D(FP, A)$, barazimi i fundit shkruhet $G\nu\varphi(\psi) = \varphi f$. Po të kemi parasysh ndërrimtarinë e diagramit

$$\begin{tikzcd} D(FP,A) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "D(FP,\nu)"'] & C(P,GA) \arrow[d, "C(P,G\nu)"] \\ D(FP,B) \arrow[r, "\varphi"] & C(P,GB) \end{tikzcd}$$

marrim barazimin $\varphi(\nu\psi) = \varphi f$ e meqë φ është injektiv përfundimisht kemi që $f = \nu\psi$ e cila vërteton projektivitetin e FP. ■

Vërejtje 1.7.3 Në mënyrë të ngjashme mund të vërtetohet edhe duali i kësaj leme për injektivët.

Le të jetë U tani një funktor që kënaq kushtet e teoremës 1.7.1 ndërsa A dhe B dy module nga përkatësisht **R-Mod** dhe **R′-Mod**. Zgjedhim një rezolucion projektiv të A-së

$$\mathbf{P} : \cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0$$

dhe konsiderojmë kompleksin

$$\mathbf{FP}: \cdots \longrightarrow FP_n \longrightarrow FP_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow FP_0$$

i cili nga teorema 1.7.1 është kompleks projektiv nga $\mathbf{R'}$-**Mod** por ndoshta jo aciklik. Megjithatë, meqënëse F është ekzakt djathtas (meqë F ka të bashkëngjitur të djathtë ai ruan kolimitet e për pasojë kobërthamat në veçanti (shiko shembullin 1.1.12)), do të kemi

$$H_0(\mathbf{FP}) = FA.$$

Tani le të jetë $\mathbf{P'}$ një rezolucion projektiv i FA dhe $\psi : \mathbf{FP} \to \mathbf{P'}$ pasqyrimi i komplekseve i induktuar nga 1_{FA}. Duke kombinuar këtë me bashkëngjitjen $\langle F, U, \varphi\rangle$ përftojmë ko-kompleksin

$$\mathrm{Hom}_{R'}(\mathbf{P'}, B') \xrightarrow[\psi]{} \mathrm{Hom}_{R'}(\mathbf{FP}, B') \xrightarrow[\varphi]{\sim} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}, UB')$$

dhe duke kaluar në homologji përftojmë homomorfizmat

$$\mathbf{\Psi^n} : \mathrm{Ext}^n_{R'}(FA, B') \to \mathrm{Ext}^n_R(A, UB') \text{ për } n = 0, 1, 2, ... \tag{1.21}$$

të cilët janë natyralë në A dhe B'. Vërejmë tani se nëse F ruan injeksionet, domethënë nëse F është ekzakt, atëherë $\mathbf{FP}$ është rezolucion projektiv i FA dhe për pasojë $\mathbf{\Psi}$ është një izomorfizëm natyral i përcaktuar në mënyrë të vetme nga φ. Teoria që zhvilluam deri tani mund të aplikohet në këtë situatë specifike. Le të jetë dhënë $\gamma : R \to R'$ një homomorfizëm unazash. Dihet që çdo R' modul M' mund të konsiderohet si R modul nëpërmjet γ duke pozuar

$$rm' = \gamma(r)m' \text{ ku } r \in R \text{ dhe } m' \in M'. \tag{1.22}$$

Këtë modul do ta shënojmë me $U^\gamma M'$ dhe në këtë mënyrë përcaktohet një funktor $U^\gamma : R'$-**Mod** $\to R$-**Mod** të cilin do ta quajmë *funktori i ndryshimit të unazave* i induktuar nga $\gamma : R \to R'$. Kjo është arsyeja që paragrafi në shtjellim ka këtë titull. Për U^γ ka vend pohimi i mëposhtëm.

Teoremë 1.7.4 *Funktori* $U^\gamma : R'$-**Mod** $\to R$-**Mod** *ruan epimorfizmat dhe ka të bashkëngjitur të majtë funktorin* $F : R$-**Mod** $\to R'$-**Mod** *të përcaktuar nga barazimi*

$$FM = R' \otimes_R M, \text{ ku } M \in R\text{-}\mathbf{Mod}; \tag{1.23}$$

këtu R' *është konsideruar si* R *modul i djathtë nëpërmjet* γ, *dhe* FM *fiton strukturën e një* R' *moduli nga faktori* R' *që ka majtas produktit tensorial.*

Vërtetim. Në mënyrë të qartë U^γ ruan epimorfizmat. Për të vërtetuar ekzistencën e një bashkëngjitjeje, së pari kujtojmë që nga teorema themelore e produktit tensorial kemi izomorfizmin natyral

$$\Gamma : R'\text{-}\mathbf{Mod}(R' \otimes_R M, B') \cong R\text{-}\mathbf{Mod}(M, R'\text{-}\mathbf{Mod}(R', B')).$$

Nga ana tjetër mund të ndërtohet një pasqyrim

$$\Delta : R\text{-}\mathbf{Mod}(M, R'\text{-}\mathbf{Mod}(R', B')) \to R\text{-}\mathbf{Mod}(M, U^\gamma B')$$

i tillë që

$$\Delta(\xi) = \tilde{\xi} \text{ ku } \tilde{\xi}(x) = \xi(x)(1')$$

ku $1'$ është njëshi i R' dhe $x \in M$ e $\xi \in R\text{-}\mathbf{Mod}(M, R'\text{-}\mathbf{Mod}(R', B'))$ janë çfarëdo. Vërtetimin e faktit që Δ është izomorfizëm natyral po e mënjanojmë pasi është rutinë. Së fundi, kompozimi i dy izomorfizmave natyrale Γ dhe Δ jep bashkëngjitjen e kërkuar. ■

E zbatuar në rastin konkret tani (1.21) ka formën

$$\Psi : \mathrm{Ext}^n_{R'}(R' \otimes_R A, B') \to \mathrm{Ext}^n_R(A, U^\gamma B').$$

Ka vend rezultati i mëposhtëm.

Pohim 1.7.5 *Në qoftë se R' është i sheshtë si R modul i djathtë nëpërmjet γ, atëherë*

$$\Psi : Ext^n_{R'}(R' \otimes_R A, B') \xrightarrow{\sim} Ext^n_R(A, U^\gamma B')$$

është një izomorfizëm natyral.

Vërtetim. Në kushtet e dhëna, funktori F i përcaktuar nga (1.23) është ekzakt. ■

Në të njëjtën mënyrë me të cilën u veprua për të përftuar (1.21) mund të zbatohet rezultati i teoremës 1.7.1 (ii) për të përftuar homomorfizma natyrale të trajtës

$$\bar{\Psi} : \mathrm{Ext}^n_{R'}(A', \bar{F}B) \to \mathrm{Ext}^n_R(UA', B). \tag{1.24}$$

Për më tepër $\bar{\Psi}$ është izomorfizëm natyral në qoftë se $\bar{F}$ ruan syrjeksionet, pra kur është ekzakt. Do ti kthehemi sërish funktorit $U^\gamma : R'\text{-}\mathbf{Mod} \to R\text{-}\mathbf{Mod}$. Ka vend kjo teoremë për të.

Teoremë 1.7.6 *Funktori U^γ ruan injeksionet dhe ka të bashkëngjitur të djathtë $\bar{F} : R\text{-}\mathbf{Mod} \to R'\text{-}\mathbf{Mod}$ të dhënë nga barazimi*

$$\bar{F}M = R\text{-}\mathbf{Mod}(R', M) \text{ ku } M \in R\text{-}\mathbf{Mod}; \tag{1.25}$$

këtu R' konsiderohet si R modul i majtë nëpërmjet γ, dhe $\bar{F}M$ fiton strukturën e një R' moduli me anën e strukturës si R' modul i djathtë që ka R'.

Vërtetim. Ngjashmërisht me vërtetimin e teoremës 1.7.4, ndërtojmë pasqyrimin

$$\Omega : R'\text{-}\mathbf{Mod}(B', R\text{-}\mathbf{Mod}(R', M)) \to R\text{-}\mathbf{Mod}(U^\gamma B', M)$$

të tillë që

$$\Omega(\xi) = \tilde{\xi} \text{ ku } \tilde{\xi}(x) = \xi(x)(1')$$

për çdo $x \in U^\gamma B'$ dhe $\xi \in R'\text{-}\mathbf{Mod}(B', R\text{-}\mathbf{Mod}(R', M))$. Vërtetohet se ai është izomorfizëm natyral që provon bashkëngjitjen. ■

Po të zbatojmë homomorfizmin (1.24) në kushtet e teoremës 1.7.6, përftojmë homomorfizmin natyral

$$\bar{\Psi} : \mathrm{Ext}^n_{R'}(A', R\text{-}\mathbf{Mod}(R', B)) \to \mathrm{Ext}^n_R(U^\gamma A', B).$$

Ngjashmërisht me pohimin 1.7.5 ka vend ky

Pohim 1.7.7 *Në qoftë se R' është projektiv si R modul i majtë nëpërmjet γ, atëherë*

$$\bar{\Psi} : Ext^n_{R'}(A', R\text{-}\mathbf{Mod}(R', B)) \xrightarrow{\sim} Ext^n_R(U^\gamma A', B)$$

është izomorfizëm natyral.

Kapitulli 2

Kondita fundshmërie homologjike për monoidët inversivë

2.1 Disa rezultate paraprake

Një mënyrë e dobishme për të kërkuar informacion të natyrës homologjike për një monoid inversiv është të studiojmë vetitë homologjike të nëngrupeve të tyre maksimalë dhe të shohim se deri në çfarë mase ato pëcaktojnë veti të caktuara të monoidit. Ka prova të ndryshme të dhëna tek [15] që kjo përqasje është vërtet e dobishme. Në këtë artikull autorët kanë treguar që një monoid i Klifordit S është i tipit FP_n vetëm kur S përmban një idempotent minimal e dhe nëngrupi maksimal i S që përmban e është i tipit FP_n. Për klasën më të gjërë të gjysmëgrupeve inversivë, ata tregojnë nën supozimin që gjysmëgrupi përmban një idempotent minimal, që është i tipit FP_n vetëm kur nëngrupi i tij maksimal që përmban këtë idempotent është i të njëjtit tip. Ndryshe nga [15], në këtë kapitull ne bëjmë një lidhje midis vetive homologjike të një monoidi inversiv S me ato të grupit të imazhit maksimal të tij G. Ne provojmë që S është i tipit FP_∞ vetëm kur S përmban një idempotent minimal dhe G është i tipit FP_∞. Ne gjithashtu tregojmë që dimensioni kohomologjik i një monoidi të lirë të Klifordit dhe ai i grupit të imazhit maksimal të tij përputhen. Në këtë rast ne tregojmë se dimensioni kohomologjik është një, dhe kjo gjë e bën një monoid të lirë të Klifordit një tjetër kandidat për të provuar një teoremë analoge të Stalling Swan për gjysmëgrupet inversivë. Në përfundim të këtij kapitulli përcaktojmë indeksin e një nënmonoidi të plotë të një monoidi inversiv me anë të grupeve të imazhit maksimal të tyre dhe tregojmë që në qoftë se indeksi është i fundëm, atëherë, monoidi është i tipit FP_∞ vetëm kur nënmonoidi i tij është i të njëjtit tip. Kjo veti ka homologen e saj në teorinë e kohomologjisë së grupeve. Këto rezultate sigurojnë mjaftueshëm prova se grupi i imazhit maksimal i një monoidi inversiv përmban informacion vital të natyrës homologjike i cili mund të përdoret për të studiuar vetitë homologjike të vetë monoidit, dhe prandaj meriton të studiohet më tej.
Me përkufizim S është një gjysmëgrup inversiv në qoftë se për çdo element x ekziston një element i vetëm x^{-1} i tillë që $x = xx^{-1}x$ dhe $x^{-1} = x^{-1}xx^{-1}$. Një veti kyçe e gjysmëgrupeve inversivë është që idempotentët e tyre ndërrojnë. Në qoftë se S është

një monoid inversiv dhe E semilatisa e tij e idempotentëve, atëherë shënojmë me G grupin e imazhit maksimal të S; domethënë $G \cong S/\sigma$ ku σ është kongruencë mbi S e përcaktuar si vijon. Për çdo $a, b \in S$, $a\sigma b$ atëherë dhe vetëm atëherë kur ekziston $e \in E$ e tillë që $ae = be$, ose njësoj, në qoftë se ekziston $f \in E$ e tillë që $fa = fb$. Do të shënojmë me ν epimorfizmin kanonik përkatës. Njëshi i G do të shënohet me 1.
Përpara se të meremi me studimin e lidhjes së grupeve të kohomologjisë së S-së dhe të G-së, do të shqyrtojmë një situatë më të përgjithshme. Le të jenë K dhe L monoidë të konsideruara si kategori të vogla me një objekt të vetëm, të shënuara përkatësisht me $*_K$ dhe $*_L$, dhe me morfizma, elementët e monoidëve përkatës, dhe supozojmë që $\mu : K \to L$ është një epimorfizëm çfardo monoidesh. Përcaktojmë $J : K \to L$ mbi objektet $J(*_K) = *_L$ dhe për çdo $s \in K$ përcaktojmë $J(s) = \mu(s)$, dhe mund të tregohet lehtë që J është funktor duke përdorur faktin që ai rrjedh nga një epimorfizëm monoidesh. Funktori J indukton një funktor $J^* : \mathbf{Ab}^L \to \mathbf{Ab}^K$ sipas rregullit $J^*(M) = MJ$, për çdo L-modul $M \in \mathbf{Ab}^L$.
Ndërtimi i mëposhtëm është një rast i veçantë i kategorisë presje [47]. Shënojmë me $\Im \downarrow *_L$ kategorinë e J-objekteve mbi $*_L$ si vijon. Një objekt i $\Im \downarrow *_L$ është një çift $(*_K, a)$ ku $a : *_L \to *_L$ është një morfizëm në L. Morfizmi $s : (*_K, a) \to (*_K, b)$ është një morfizëm $s : *_K \to *_K$ i tillë që diagrami

$$\begin{tikzcd}
J(*_K) = *_L \arrow[rr, "J(s)"] \arrow[dr, "a"'] & & J(*_K) = *_L \arrow[dl, "b"] \\
& *_L &
\end{tikzcd}$$

është komutativ. Me fjalë të tjera, gjendet një morfizëm $s : (*_K, a) \to (*_K, b)$ në qoftë se $bJ(s) = a$.

Lemë 2.1.1 *Në qoftë se kategoria presje $\Im \downarrow *_L$ është e filtruar, atëherë J^* ka të bashkëgjitur të majtë $\widetilde{J}$ dhe të dy funktorët janë ekzaktë.*

Vërtetim. Meqënëse të gjitha kolimitet ekzistojnë në $\mathbf{Ab}$, atëherë duali i teoremës 1.3.2 tregon që çdo funktor $T \in \mathbf{Ab}^K$ ka një zgjerim të majtë të Kanit $Lan_J T$ sipas J të përcaktuar nga

$$Lan_J T(*_L) = \underrightarrow{Lim}(\Im \downarrow *_L \xrightarrow{P} K \xrightarrow{T} \mathbf{Ab}), \tag{2.1}$$

ku P është projeksioni $(*_K, a) \mapsto *_K$. Tani argumenti dual i dhënë në teoremën 1.3.2 tregon që funksioni $T \mapsto Lan_J T$ përcakton një të bashkëngjitur të majtë $\widetilde{J}$ të J^*. Si i bashkëngjitur i majtë, $\widetilde{J}$ ruan kobërthamat, kështu për të provuar që ai është ekzakt mbetet të tregojmë që $\widetilde{J}$ ruan monomorfizmat gjithashtu. Le të jetë $T_1 \hookrightarrow T_2$ monomorfizëm në $\mathbf{Ab}^K$, atëherë pohimi 3.1, f. 258 tek [48] tregon që morfizmi i induktuar $T_1 P \to T_2 P$ është gjithashtu monomorfizëm në $\mathbf{Ab}^{\Im \downarrow *_L}$. Duke e kondideruar $\mathbf{Ab}$ si kategorinë e $\mathbb{Z}$ moduleve të djathtë dhe duke kujtuar që $\Im \downarrow *_L$ është e filtruar, ne mund të zbatojmë pohimin 1.2.8 për të treguar që morfizmi tjetër i induktuar $\underrightarrow{Lim}(T_1 P) \to \underrightarrow{Lim}(T_2 P)$ është monomorfizëm e cila nga (2.1) është e njëjta gjë si të thuash që $Lan_J T_1(*_L) \to Lan_J T_2(*_L)$ është gjithashtu monomorfizëm. Pohimi 3.1, f.

258 tek [48] përsëri tregon që $Lan_J T_1 \to Lan_J T_2$ është monomorfizëm duke provuar kështu ekzaktësinë e $\widetilde{J}$. Do të tregojmë gjithashtu që J^* është ekzakt. Për këtë kujtojmë fillimisht që J^* ruan bërthamat si i bashkëngjitur i djathtë. Mbetet të tregojmë që ruan epimorfizmat gjithashtu. Vërtet, në qoftë se $M_1 \twoheadrightarrow M_2$ është epimorfizëm në $\mathbf{Ab}^L$, atëherë homomorfizmi i induktuar $M_1 J(*_K) = M_1 \to M_2 = M_2 J(*_K)$ është homomorfizëm syrjektiv K-modulesh të majtë. ■

Do të shënojmë me K^{opp} dualin e kategorisë (monoidit) K. Do të japim këtu për ta përdorur më vonë lemat e mëposhtme vërtetimi i të cilave mund të gjendet në mënyrë më të përgjithësuar në [50].

Lemë 2.1.2 *Për çdo monoid K, ekzistojnë izomorfizma ndërmjet kategorive:* $\mathbf{Ab}^{K\times K^{opp}} \cong \left(\mathbf{Ab}^K\right)^{K^{opp}} \cong \left(\mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}K}\right)^{\mathbb{Z}K^{opp}} \cong \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}K\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}K^{opp}}$.

Këtej e tutje $\mathbb{Z}K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}K^{opp}$ do të quhet *algjebra mbështjellëse* e $\mathbb{Z}K$ dhe do të shënohet për shkurtim me $\mathbb{Z}K^e$. Në mënyrë të ngjashme kemi lemën e mëposhtme.

Lemë 2.1.3 *Për çdo monoid S, ekziston një izomorfizëm ndërmjet kategorive aditive $\mathbf{Ab}^S$ dhe $\mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}S}$, ku $\mathbb{Z}S$ është aditivizimi i S.*

2.2 Grupet e kohomologjisë dhe dimensioni kohomologjik

Përderisa po përpiqemi të bëjmë një lidhje midis vetive homologjike të një monoidi inversiv me ato të grupit të imazhit maksimal të tij, është e natyrshme të konsiderojmë kohomologjinë e Eilenberg-MacLane të monoidëve e cila me përkufizim jepet nga

$$H^n(S, M) = Ext^n_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}, M).$$

Këtu S është një monoid, M është S-modul i majtë dhe $\mathbb{Z}$ është S-moduli trivial. Lema e mëposhtme është thelbësore në vërtetimin e teoremës 2.2.2.

Lemë 2.2.1 *$\Im \downarrow *_G$ është e filtruar dhe në qoftë se S përmban një idempotent minimal, atëherë $\Im \downarrow *_G$ është fortësisht e filtruar.*

Vërtetim. Le të jenë $(*_S, a)$ dhe $(*_S, b)$ dy objekte të $\Im \downarrow *_G$. Mund të zgjedhim α dhe $\beta \in S$ të tilla që $\mu(\alpha) = a$ dhe $\mu(\beta) = b$, atëherë, nga përkufizimi $\alpha : (*_S, a) \to (*_S, 1)$ dhe $\beta : (*_S, b) \to (*_S, 1)$ janë shigjeta në $\Im \downarrow *_G$. Së dyti, në qoftë se $s_1, s_2 : (*_S, a) \to (*_S, b)$ janë shigjeta paralele, atëherë kemi $b\mu(s_1) = a = b\mu(s_2)$, që do të thotë që $s_1 \sigma s_2$ dhe si rezultat gjendet një $e \in E$ i tillë që $es_1 = es_2$. Por në mënyrë evidente, $e : (*_S, b) \to (*_S, b)$ është shigjetë në $\Im \downarrow *_G$, për rrjedhojë barazimi i mësipërm është barazim shigjetash në $\Im \downarrow *_G$. Kjo tregon që $\Im \downarrow *_G$ është kategori e filtruar. Së fundi, supozojmë që S përmban një idempotent minimal ε dhe le të jetë $s_i : (*_S, a) \to (*_S, a_i)$ ku $i \in I$ një kon i dhënë në $\Im \downarrow *_G$. Për çdo $i \in I$, zgjedhim $t_i \in S$ të tillë që $\mu(t_i) = a_i$. Për çdo i dhe $j \in I$ kemi që $a_i\mu(s_i) = a = a_j\mu(s_j)$, prandaj $\mu(t_i s_i) = \mu(t_j s_j)$. Atëherë ekziston një idempotent $e_{ij} \in E$ i tillë që $e_{ij} t_i s_i = e_{ij} t_j s_j$.

Duke shumëzuar në të majtë me ε dhe duke kujtuar që ε është idempotent minimal, përftojmë $\varepsilon t_i s_i = \varepsilon t_j s_j$. Si më parë, $\varepsilon : (*_S, 1) \to (*_S, 1)$ është shigjetë në $\Im \downarrow *_G$, për rrjedhojë familja e shigjetave εt_i ku $i \in I$ është plotësimi ndërrimtar i konit të dhënë duke treguar që $\Im \downarrow *_G$ është fortësisht e filtruar. ■

Teorema e mëposhtme është analoge e teoremës 4.1 të [54] për monoidët inversivë në përgjithësi dhe gjithashtu analoge e pohimit 3.6 të [43] e cila lidh kohomologjinë e Lausch të një monoidi inversiv me kohomologjinë e Eilenberg-Mac Lane të grupit të imazhit maksimal të tij.

Teoremë 2.2.2 *Për çdo monoid inversiv S, për çdo $n \geq 0$ dhe çdo $\mathbb{Z}G$ modul të majtë M gjendet një izomorfizëm natyral*

$$Ext^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \cong Ext^n_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}, \mathbf{J}^* M) \tag{2.2}$$

ku $\mathbf{J}^* = \mathcal{I}_S J^* \mathcal{I}_G^{-1}$, dhe $\mathcal{I}_G$, $\mathcal{I}_S$ janë izomorfizmat e lemës 2.1.3 dhe $\mathbb{Z}$ është modul trivial.

Vërtetim. Nga lema 2.1.1 dhe ajo 2.2.1 kemi ekzistencen e funktorit $\tilde{J}$. Kompozimi $\widetilde{\mathbf{J}} = \mathcal{I}_G \widetilde{J} \mathcal{I}_S^{-1} : \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}S} \to \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}G}$ është ekzakt meqënëse $\mathcal{I}_G$ dhe $\mathcal{I}_S^{-1}$ janë ekzaktë. Në të njëjtën mënyrë ne mund të përftojmë një tjetër funktor ekzakt $\mathbf{J}^* = \mathcal{I}_S J^* \mathcal{I}_G^{-1}$: $\mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}G} \to \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}S}$. Në fakt ky funktor është funktori i ndryshimit të unazave sipas [21]. Meqënëse çdo izomorfizëm është i bashkëngjitur i të anasjellit të tij, nga teorema 1, f. 103 tek [47] shohim që $\widetilde{\mathbf{J}}$ është i bashkëngjitur i majtë i $\mathbf{J}^*$. Tani mund të zbatojmë teoremën 12.1, f. 162 të [21] për të përftuar për çdo $n \geq 0$ një izomorfizëm natyral

$$\Phi^n : Ext^n_{\mathbb{Z}G}(\widetilde{\mathbf{J}}N, M) \to Ext^n_{\mathbb{Z}S}(N, \mathbf{J}^* M) \tag{2.3}$$

për çdo $M \in \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}G}$ dhe $N \in \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}S}$. Po të zëvendësojmë N me $\mathbb{Z}S$-modulin e majtë trivial $\mathbb{Z}$, atëherë $\widetilde{\mathbf{J}}N$ përputhet me $\mathbb{Z}G$ modulin trival $\mathbb{Z}$. Vërtet, siç është provuar në [21], funktori i ndryshimit të unazave $\mathbf{J}^*$ ka të bashkëngjitur të majtë (i cili duhet të jetë natyralisht izomorf me $\widetilde{\mathbf{J}}$) i dhënë nga rregulli $N \mapsto \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}S} N$. Për $N = \mathbb{Z}$ shohim që çdo gjenerator $g \otimes_{\mathbb{Z}S} z$ i $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}S} \mathbb{Z}$ mund të reduktohet si më poshtë: $g \otimes_{\mathbb{Z}S} z = 1 \otimes_{\mathbb{Z}S} s \cdot z = 1 \otimes_{\mathbb{Z}S} z$ ku $s \in \mu^{-1}(g)$. Për rrjedhim, $\widetilde{\mathbf{J}}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$. Duke aplikuar (2.3) për $N = \mathbb{Z}$, marrim izomorfizmin natyral $Ext^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \cong Ext^n_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}, \mathbf{J}^* M)$. ■

Izomorfizmi i teoremës 2.2.2 tregon që cd$G \leq$ cd$S$. Do të provojmë në pohimin më poshtë që në rastin e monoidëve inversivë të cilët përmbajnë një idempotent minimal dimensionet kohomologjikë janë të njëjtë dhe më pas përftojmë si një rrjedhim që monoidët e lirë të Klifordit e kanë dimensionin kohomologjik një.

Pohim 2.2.3 *Le të jetë S monoid inversiv që përmban një idempotent minimal ε. Atëherë dimensioni kohomologjik i S dhe ai i grupit të imazhit maksimal të tij G përputhen.*

Vërtetim. Fillimisht japim strategjinë e vërtetimit dhe pastaj do të procedojmë me detajet teknike. Thelbi i vërtetimit është të tregojmë që $\mathbf{J}^*\mathbb{Z}G$ është projektiv si $\mathbb{Z}S$

modul i majtë nëpërmjet μ dhe më pas përdorim pohimin 1.7.7 i cili jep në këtë rast një izomorfizëm natyral $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}S}(\mathbf{J}^*\mathbb{Z}G, B)) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}, B)$ për çdo $n \geq 0$ dhe $B \in \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}S}$. Kjo implikon menjëherë që $\mathrm{cd}S \leq \mathrm{cd}G$. Kjo, së bashku me vërejtjen pas teoremës 2.2.2, sjellin që $\mathrm{cd}S = \mathrm{cd}G$. Le të tregojmë tani që $\mathbf{J}^*\mathbb{Z}G$ është projektiv. Nga teorema 2.2.2 shohim që $\mathbf{J}^*\mathbb{Z}G$ është një $\mathbb{Z}S$ modul i sheshtë, kështu që për të provuar që ai është projektiv është e mjaftueshme të tregojmë që ai është me paraqitje të fundme. Vërtet, ekziston një varg ekzakt

$$\mathbb{Z}S \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}S \xrightarrow{\tilde{\mu}} \mathbf{J}^*\mathbb{Z}G \to 0 \tag{2.4}$$

ku $\tilde{\mu}$ është zgjerim linear i μ dhe ψ përcaktohet nga $\psi(s) = s - s\varepsilon$. Është e lehtë të shihet që ψ është homomorfizëm $\mathbb{Z}S$ modulesh të majtë i cili pasqyron në mënyrë syrjektive $\mathbb{Z}S$ në $\mathrm{Ker}(\tilde{\mu})$. E fundit rrjedh lehtë nga fakti që $\mathrm{Ker}(\tilde{\mu})$ gjenerohet si një grup abelian nga elementët e trajtës $s - s\varepsilon$. ■

Kujtojmë nga [18] që një monoid i lirë i Klifordit mbi një bashkësi X është bashkësia

$$CM_X = \{(u, A) \in FG_X \times \mathcal{P}(X) | c(u) \subseteq A\},$$

ku FG_X është grupi i lirë mbi X, $\mathcal{P}(X)$ është bashkësia e të gjitha nënbashkësive të X, dhe me $c(u)$ shënojmë përmbajtjen e fjalës u, domethënë, bashkësinë e të gjitha shkronjave nga X që paraqiten tek fjala u. Shumëzimi mbi CM_X përcaktohet nga

$$(v, B)(u, A) = (vu, B \cup A).$$

Rrjedhim 2.2.4 *Në qoftë se CM_X është monoidi i lirë i Klifordit mbi një bashkësi X, atëherë dimensioni kohomologjik i CM_X dhe ai i grupit të imazhit maksimal të tij $G = CM_X/\sigma$ përputhen dhe janë të barabarta me një.*

Vërtetim. Siç mund ta shohim nga më sipër, një monoid i lirë i Klifordit pëmban idempotentin minimal $(1, X)$, për rrjedhim nga pohimi 2.2.3 kemi që $\mathrm{cd}CM_X = \mathrm{cd}G$, pra na mbetet të tregojmë që $\mathrm{cd}G = 1$. Kjo mund të arrihet në qoftë se provojmë që G është i lirë mbi ndonjë bashkësi. Në fakt ajo është e lirë mbi bashkësinë e klasave të ekuivalencës $\{(\overline{x, \{x\}}) | x \in X\}$ modulo σ. Kjo mund të provohet lehtë duke përdorur vetinë universale të CM_X siç përshkruhet në diagramin më poshtë

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & CM_X \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & CM_X/\sigma \arrow[dl, dashed, "\tilde{\varphi}"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

ku H është një grup çfardo dhe $f : X \to H$ është pasqyrim çfardo, $\iota(x) = (x, \{x\})$, μ epimorfizmi natyral, φ është morfizëm monoidesh i cili zgjeron në mënyrë të vetme f dhe $\tilde{\varphi}$ është e dhënë nga $\tilde{\varphi}((\overline{u, c(u)})) = \varphi((u, c(u)))$. ■

Rrjedhimi 2.2.4 është analog i teoremës 4.5 tek [13] dhe tregon që monoidët e lirë të Klifordit janë midis kandidatëve të tjerë për të provuar një analoge të teoremës së Stalling Swan për gjysmëgrupet inversivë me anë të kohomologjisë së Eilenberg-Mac Lane. Megjithatë duhet përmendur që, ngjashmërisht me kohomologjinë e Lausch, rasti i dimensionit zero për kohomologjinë e Eilenberg MacLane është mjaft e ndryshme nga ajo e grupeve. Në mënyrë më të shtjellur, për monoidët inversivë E-unitarë kemi këtë rrjedhim

Rrjedhim 2.2.5 *Le të jetë S një monoid inversiv E-unitar. Atëherë S e ka dimensionin kohomologjik zero vetëm kur S është një semilatisë me zero.*

Vërtetim. Nga teorema 2.2.2 grupi i imazhit maksimal G duhet të jetë zero, për rrjedhojë për çdo $s \in S$, $(s, 1_S) \in \sigma$. Meqënëse S është E-unitar, rrjedh që s është idempotent. Fakti që S ka një zero rrjedh nga [37] dhe gjithashtu nga [16]. E anasjella është evidente. ■

Ky rrjedhim është analog i teoremës 4.4 tek [13] dhe gjithashtu analoge e një rezultati nga [41].
Mund të nxjerrim një aplikim tjetër të teoremës 2.2.2 në rastin e monoidëve inversivë abelianë. Kujtojmë nga [51] problemin e mëposhtëm të diskutuar aty për monoidët abelianë në përgjithësi. Në qoftë se S është një monoid abelian dhe T imazhi homomorfik maksimal me thjeshtim i tij, atëherë për çdo $\mathbb{Z}S$ modul D ndërtojmë $\mathbb{Z}T$ modulin $D' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}T, D)$. Është e mirënjohur ekzistenca e një homomorfizmi natyral $H^n(T, D') \to H^n(S, D)$. Në qoftë se D është $\mathbb{Z}S$ modul trivial, atëherë D' është thjesht D e parë si një $\mathbb{Z}T$ modul trivial. Homomorfizmi i mësipërm tregohet që është izomorfizëm për D triviale dhe $n = 1, 2$ por nuk ka qënë e njohur deri tani çfarë ndodh për $n \geq 3$. Në qoftë se S është monoid inversiv abelian, atëherë është e qartë që T është vetë G, grupi i imazhit maksimal të S. Në këtë rast ne mund të përdorim izomorfizmin (2.2) për të përftuar një izomorfizëm $Ext^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, D') \cong Ext^n_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}, \mathbf{J}^* D')$. Rrjedhimi i mëposhtëm tani është i menjëhershëm.

Rrjedhim 2.2.6 *Në qoftë se S është një monoid inversiv abelian dhe G grupi i imazhit maksimal të tij, atëherë për çdo $\mathbb{Z}S$ modul trivial D gjendet një izomorfizëm natyral $H^n(S, D) \cong H^n(G, D)$ për çdo $n \in \mathbb{N}$.*

2.3 Kondita FP_∞ për monoidët inversivë

Kujtojmë nga §1.5 i kapitullit të parë se një monoid çfardo S do të quhet i tipit FP_n për $n \geq 0$ në qoftë se moduli trivial $\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}S$-**Mod** është i tipit FP_n. Në qoftë se S është FP_n për çdo $n \geq 0$, atëherë do të themi se S është e tipit FP_∞. Vërtetimi i teoremës 2.3.1 do të përdorë kriterin Bieri-Eckmann për vetinë FP_∞ të moduleve.

Teoremë 2.3.1 *Le të jetë S monoid inversiv dhe G grupi i imazhit maksimal të tij. Në qoftë se S është e tipit FP_∞, atëherë S përmban një idempotent minimal dhe G është i tipit FP_∞. Anasjellas, në qoftë se S përmban një idempotent minimal dhe G është i tipit FP_∞, atëherë S është i tipit FP_∞.*

Vërtetim. Në veçanti S është i tipit FP_1, për rrjedhojë gjendet një rezolucion i pjesshëm i lirë i tipit të fundëm i $\mathbb{Z}S$ modulit trivial $\mathbb{Z}$:

$$\oplus_{i\in I_1}\mathbb{Z}S \to \oplus_{i\in I_0}\mathbb{Z}S \to \mathbb{Z} \to 0. \tag{2.5}$$

Mund ta konsiderojmë $\mathbb{Z}E$ si $\mathbb{Z}S$ modul të djathtë nëpërmjet konjugimit të S mbi E: $e\cdot s = s^{-1}es$ për çdo $s\in S$ dhe $e\in E$. Në qoftë se tensorojmë (2.5) nga e majta me $\mathbb{Z}E$ duke e parë atë si $\mathbb{Z}E$ modul të majtë dhe si një $\mathbb{Z}S$ modul të djathtë, përftojmë vargun ekzakt të mëposhtëm në $\mathbb{Z}E$-**Mod**

$$\oplus_{i\in I_1}\mathbb{Z}E\otimes_{\mathbb{Z}S}\mathbb{Z}S \to \oplus_{i\in I_0}\mathbb{Z}E\otimes_{\mathbb{Z}S}\mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}E\otimes_{\mathbb{Z}S}\mathbb{Z} \to 0. \tag{2.6}$$

Më pas do të provojmë që $\mathbb{Z}E\otimes_{\mathbb{Z}S}\mathbb{Z}$ është $\mathbb{Z}E$ moduli trivial $\mathbb{Z}$. Vërtet, çdo gjenerator $e\otimes_{\mathbb{Z}S} z$ mund të reduktohet si vijon: $e\otimes_{\mathbb{Z}S} z = 1_S\otimes_{\mathbb{Z}S} e\cdot z = 1_S\otimes_{\mathbb{Z}S} z$, për rrjedhim $\mathbb{Z}E\otimes_{\mathbb{Z}S}\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}$ si grupe abelianë. Nga ana tjetër, veprimi i çdo idempotenti f mbi gjeneratorin $1_S\otimes_{\mathbb{Z}S} z$ e lë të fiksuar këtë gjenerator. Në mënyrë të ngjashme tregohet që $\mathbb{Z}E\otimes_{\mathbb{Z}S}\mathbb{Z}S\cong\mathbb{Z}E$. Vërtet, çdo gjenerator $e\otimes_{\mathbb{Z}S} s$ i $\mathbb{Z}E\otimes_{\mathbb{Z}S}\mathbb{Z}S$ mund të reduktohet si vijon: $e\otimes_{\mathbb{Z}S} s = s^{-1}es\otimes_{\mathbb{Z}S} 1_S$ që tregon se elementët e $\mathbb{Z}E\otimes_{\mathbb{Z}S}\mathbb{Z}S$ janë $\mathbb{Z}$-kombinime lineare të elementëve të trajtës $e\otimes_{\mathbb{Z}S} 1_S$. Nga kjo është e lehtë të shihet tani pse $\mathbb{Z}E\otimes_{\mathbb{Z}S}\mathbb{Z}S\cong\mathbb{Z}E$ si $\mathbb{Z}E$ module të majtë. Tani duke përdorur ekzaktësinë e (2.6) dhe izomorfizmat e mësipërm, përftojmë vargun ekzakt të mëposhtëm

$$\oplus_{i\in I_1}\mathbb{Z}E \to \oplus_{i\in I_0}\mathbb{Z}E \to \mathbb{Z} \to 0,$$

duke provuar kështu që E është i tipit FP_1. Rezultati kryesor i [32] tregon që E është unitarisht me përftim të fundëm dhe më pas në të njëjtën mënyrë si në vërtetimin e teoremës 9 tek [15] mund të tregojmë që E përmban një idempotent minimal.
Për të provuar që G është i tipit FP_∞, ne duhet të provojmë që $Ext^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},\bullet)$ ndërron me kolimitet e filtruar. Le të jetë $\varinjlim M_i$ një kolimit i filtruar i një diagrami modulesh M_i ku $i\in I$. Atëherë kemi izomorfizmin natyral të mëposhtëm

$$\begin{aligned}
Ext^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},\varinjlim M_i) &\cong Ext^n_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z},\mathbf{J}^*\varinjlim M_i) && \text{nga (2.2)}\\
&\cong Ext^n_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z},\varinjlim \mathbf{J}^*M_i) && \mathbf{J}^* \text{ ka të bashkëngjitur të djathtë [21]}\\
&\cong \varinjlim Ext^n_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z},\mathbf{J}^*M_i) && S \text{ është i tipit } FP_\infty\\
&\cong \varinjlim Ext^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},M_i) && \text{nga natyraliteti i (2.2),}
\end{aligned}$$

e cila tregon se G është i tipit FP_∞ siç edhe kërkohej.
Përpara se të provojmë të anasjellën nën hipotezën e dhënë, do të bëjmë një vëzhgim. Do të shënojmë me $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}S$ modulin trivial të djathtë $\mathbb{Z}$ dhe me $\mathbb{Z}'$, $\mathbb{Z}G$ modulin trivial të djathtë $\mathbb{Z}$. Për çdo grup abelian C, $\mathbb{Z}S$ moduli i majtë $\mathbf{J}^*\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}',C)$ dhe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},C)$ përputhen. Sigurisht që, si grupe abelianë ata janë të barabartë. Për të parë që ata janë të barabartë edhe si module, kujtojmë që veprimi i S mbi elementët f të $\mathbf{J}^*\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}',C)$ është përcaktuar duke pozuar $s\cdot f(x)=\mu(s)\cdot f(x)=f(x\cdot\mu(s))$ për çdo $s\in S$ dhe $x\in\mathbb{Z}'$. Por nga përkufizimi i $\mathbb{Z}'$, $f(x\cdot\mu(s))=f(x)$, dhe si rezultat $s\cdot f=f$ e cila nënkupton që $\mathbf{J}^*\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}',C)$ është trivial si një $\mathbb{Z}S$ modul i majtë.

Ngjashmërisht, ne mund të provojmë që grupi abelian $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, C)$ është trivial si një $\mathbb{Z}S$ modul i majtë, për rrjedhojë kemi barazimin. Për çdo $\mathbb{Z}S$ modul të majtë A dhe çdo grup abelian C kemi izomorfizmat natyralë të mëposhtëm.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}' \otimes_{\mathbb{Z}G} \widetilde{\mathbf{J}}A, C) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\widetilde{\mathbf{J}}A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}', C)) && \text{shoqërimtaria e bashkëngjitjes} \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}S}(A, \mathbf{J}^{*}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}', C)) && \text{nga lema 2.1.1} \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}S}(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, C)) && \text{nga vëzhgimi ynë} \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}S} A, C) && \text{shoqërimtaria e bashkëngjitjes.}
\end{aligned}$$

Rrjedh që kemi izomorfizmin natyral në $\mathbf{Ab}$

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}' \otimes_{\mathbb{Z}G} \widetilde{\mathbf{J}}A, \bullet), \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \bullet) \cong \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}S} A, \bullet), \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \bullet).$$

Lema Yoneda tani implikon ekzistencën e një izomorfizmi natyral

$$\mathbb{Z}' \otimes_{\mathbb{Z}G} \widetilde{\mathbf{J}}A \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}S} A.$$

Meqënëse $\widetilde{\mathbf{J}}$ ruan rezolucionet projektive (teorema 12.1, f. 162 e [21]), natyraliteti i izomorfizmit të mësipërm implikon që për çdo $n \geq 0$ gjenden këta izomorfizma natyralë

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}', \widetilde{\mathbf{J}}A) \cong \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}, A). \tag{2.7}$$

Ngjashmërisht mund të provohet që për çdo $K \in \mathbf{Ab}^G$ ka një izomorfizëm natyral

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}', \mathcal{I}_G K) \cong \mathrm{Tor}_n^{G}(\mathcal{I}_G^{-1}\mathbb{Z}', K). \tag{2.8}$$

Për të provuar që $\mathbb{Z}S$ moduli trivial $\mathbb{Z}$ është i tipit FP_∞ duhet të tregojmë që $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}, \bullet)$ ndërron me produktet e drejtë. Le të A_i për $i \in I$ një familje $\mathbb{Z}S$ modulesh të majtë. Izomorfizmat natyralë të mëposhtëm janë të vërteta.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}, \prod_{i\in I} A_i) &\cong \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}', \widetilde{\mathbf{J}}\prod_{i\in I} A_i) && \text{nga (2.7)} \\
&\cong \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}', \mathcal{I}_G\widetilde{J}\mathcal{I}_S^{-1}(\prod_{i\in I} A_i)) && \text{nga përkufizimi i } \widetilde{\mathbf{J}} \\
&\cong \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}', \mathcal{I}_G\widetilde{J}(\prod_{i\in I} \mathcal{I}_S^{-1}A_i) && \\
&\cong \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}', \mathcal{I}_G\underrightarrow{Lim}((\prod_{i\in I} \mathcal{I}_S^{-1}A_i)P)) && \text{nga lema 2.1.1} \\
&\cong \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}', \mathcal{I}_G\underrightarrow{Lim}(\prod_{i\in I}(\mathcal{I}_S^{-1}A_iP))) && (\prod_{i\in I}\mathcal{I}_S^{-1}A_i)P \cong \prod_{i\in I}(\mathcal{I}_S^{-1}A_iP) \\
&\cong \mathrm{Tor}_n^{G}(\mathcal{I}_G^{-1}\mathbb{Z}', \underrightarrow{Lim}(\prod_{i\in I}(\mathcal{I}_S^{-1}A_iP))) && \text{nga (2.8)} \\
&\cong \mathrm{Tor}_n^{G}(\mathcal{I}_G^{-1}\mathbb{Z}', \prod_{i\in I}\underrightarrow{Lim}\mathcal{I}_S^{-1}A_iP) && \text{lema 2.2.1 e pohimi 9.5.3 i [56]} \\
&\cong \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}', \mathcal{I}_G\prod_{i\in I}\underrightarrow{Lim}\mathcal{I}_S^{-1}A_iP) && \\
&\cong \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}', \prod_{i\in I}\mathcal{I}_G\underrightarrow{Lim}\mathcal{I}_S^{-1}A_iP) && \mathcal{I}_G \text{ është i bashkëgjitur i djathtë} \\
&\cong \prod_{i\in I}\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}', \mathcal{I}_G\underrightarrow{Lim}\mathcal{I}_S^{-1}A_iP) && G \text{ është i tipit } FP_\infty
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cong \prod_{i\in I} \mathrm{Tor}_n^G(\mathcal{I}_G^{-1}\mathbb{Z}', \underrightarrow{Lim}\mathcal{I}_S^{-1}A_iP) \\
&\cong \prod_{i\in I} \mathrm{Tor}_n^G(\mathcal{I}_G^{-1}\mathbb{Z}', \widetilde{J}\mathcal{I}_S^{-1}A_i) \\
&\cong \prod_{i\in I} \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}', \mathcal{I}_G\widetilde{J}\mathcal{I}_S^{-1}A_i) \\
&\cong \prod_{i\in I} \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}', \widetilde{\mathbf{J}}A_i) && \text{nga përkufizimi i } \widetilde{\mathbf{J}} \\
&\cong \prod_{i\in I} \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}, A_i) && \text{nga (2.7).}
\end{aligned}
$$

Tani duke krahasuar anën a majtë dhe të djathtë të vargut të mësipërm të izomorfizmave, marrim rezultatin e kërkuar. ■

Vërejtje 2.3.2 Mund ta kishim shmangur vërtetimin e sofistikuar të së anasjellës së teoremës 2.3.1 e cila bazohet në faktin që $\Im \downarrow *_G$ është fortësisht e filtruar dhe në vend të kësaj mund të kishim zbatuar rezultatin e [11] i cili pohon që $\mathrm{Hom}_R(M, \bullet)$ ndërron me kolimitet e drejtuar sa herë që M është një R-modul i majtë me paraqitje të fundme. Mund ta zbatojmë këtë për $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}S}(\mathbf{J}^*\mathbb{Z}G, \bullet)$ meqënëse dimë nga pohimi 2.2.3 që $\mathbf{J}^*\mathbb{Z}G$ është me paraqitje të fundme. Vërtetimi do të ishte si më poshtë.

$$
\begin{aligned}
Ext_{\mathbb{Z}S}^n(\mathbb{Z}, \underrightarrow{Lim}M_i) &\cong \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(\mathbb{Z}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}S}(\mathbf{J}^*\mathbb{Z}G, \underrightarrow{Lim}M_i)) && \text{nga pohimi 1.7.7} \\
&\cong \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(\mathbb{Z}, \underrightarrow{Lim}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}S}(\mathbf{J}^*\mathbb{Z}G, M_i)) && \text{nga lema 1.4.9} \\
&\cong \underrightarrow{Lim}\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(\mathbb{Z}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}S}(\mathbf{J}^*\mathbb{Z}G, M_i)) && \mathbb{Z}G \text{ është i tipit } \mathrm{FP}_\infty \\
&\cong \underrightarrow{Lim}Ext_{\mathbb{Z}S}^n(\mathbb{Z}, M_i) && \text{nga pohimi 1.7.7,}
\end{aligned}
$$

rrjedhimisht, S është i tipit FP_∞.

Të qënit i tipit FP_∞ i grupit të imazhit maksimal të një monoidi inversiv nuk sjell që ky monoid përmban një idempotent minimal. Është vërtetuar tek [44] se çdo grup është në fakt grupi i imazhit maksimal të një monoidi inversiv. Po përshkruajmë më poshtë se si ndërtohet monoidi me atë cilësi duke bërë më pas të qartë arsyen përse ai nuk mund të përmbajë një idempotent minimal. Le të jetë $\langle X : R\rangle$ një paraqitje çfardo e një grupi të pafundëm G i cili mund të zgjidhet të jetë i tipit FP_∞ dhe $\Gamma(X, R)$ grafi i Kejlit i kësaj paraqitjeje. Përcaktojmë $M(X, R)$ bashkësinë e çifteve (Γ, g) ku $g \in G$ dhe Γ është një nëngraf i lidhur dhe i fundëm i $\Gamma(X, R)$ që përmban 1 dhe g si kulme. Në $M(X, R)$ përcaktojmë veprimin $(\Gamma, g)\cdot(\Gamma', g') = (\Gamma \cup g\cdot\Gamma', gg')$. Me këtë veprim $M(X, R)$ shndërohet në një monoid inversiv idempotentët e të cilit janë çiftet $(\Gamma, 1)$ ku Γ është një nëngraf i lidhur dhe i fundëm i $\Gamma(X, R)$ që përmban 1, dhe që ka për grup të imazhit të tij maksimal grupin G. Duke marrë parasysh që grafi i Kejlit është i pafundëm, mund të shihet se $M(X, R)$ s'mund të përmbajë një idempotent minimal.
Rezultatin e teoremës së mësipërme do ta përdorim për të treguar që vetia FP_∞ sillet në mënyrë të mirë lidhur me nëngjysmëgrupet inversivë me indeks të fundëm në kuptimin e mëposhtëm.

Përkufizim 2.3.3 Le të jetë H një nëngjysmëgrup inversiv i plotë i një monoidi inversiv S. Do të themi që H është me indeks të fundëm në S në qoftë se grupi i imazhit maksimal të H ka indeks të fundëm në grupin e imazhit maksimal të S.

Ky përkufizim ka kuptim meqënëse grupi i imazhit maksimal të H është izomorf me një nëngrup të grupit të imazhit maksimal të S gjë që mund të kontrollohet lehtë.

Pohim 2.3.4 *Le të jetë S një monoid inversiv dhe H një nëngjysmëgrup me indeks të fundëm në S. Atëherë, S është i tipit FP_∞ vetëm kur H është i të njëjtit tip.*

Vërtetim. Në qoftë se S është i tipit FP_∞ atëherë ai përmban një idempotent minimal e dhe grupi i imazhit maksimal të tij $\mathcal{S}$ është i të njëjtit tip. Meqënëse H është nëngjysmëgrup inversiv i plotë i S, ai do të përmbajë e. Nga ana tjetër, siç e përmendëm më parë, $\mathcal{H} \leq \mathcal{S}$ ku $\mathcal{H}$ është grupi i imazhit maksimal të H, dhe nga kondita $[\mathcal{S} : \mathcal{H}] < \infty$. Pohimi 5.1 në [10] implikon tani që $\mathcal{H}$ është i tipit FP_∞ dhe për rrjedhojë H është i po atij tipi. Anasjellas, në qoftë se H është i tipit FP_∞, atëherë H dhe rrjedhimisht S përmban një idempotent minimal. Nga ana tjetër, $\mathcal{H}$ është i tipit FP_∞, atëherë $\mathcal{S}$ është i të njëjtit tip meqë $[\mathcal{S} : \mathcal{H}] < \infty$. Rezultati i teoremës 2.3.1 përfundon vërtetimin. ■

2.4 Kondita bi-FP$_\infty$ për monoidët e Klifordit

Sikurse e pamë në §1.5 të kapitullit të parë, një monoid do të quhet i tipit bi-FP$_n$ për $n \geq 0$, në qoftë se $\mathbb{Z}S$ bimoduli $\mathbb{Z}S$ është i tipit FP$_n$ në kategorinë $\mathbb{Z}S^e$-**Mod**. Ai do të quhet i tipit bi-FP$_\infty$ në qoftë se është bi-FP$_n$ për çdo $n \geq 0$.
Do të zbatojmë ndërtimin e përgjithshëm të kategorisë presje $\Im \downarrow *_L$ të përshkruar në hyrje në një situatë specifike. Le të jetë S një monoid inversiv, G grupi i imazhit maksimal të tij dhe $\mu : S \to G$ epimorfizmi kanonik. Konsiderojmë monoidët $S \times S^{opp}$ dhe $G \times G^{opp}$ të para si kategori me një objekt të vetëm të shënuar me $\bullet$ dhe $\circ$ përkatësisht. Si më parë shënojmë me J funktorin e përcaktuar mbi objektet duke çuar $\bullet$ në $\circ$ dhe mbi morfizma nga $J(s_1, s_2) = (\mu(s_1), \mu(s_2))$. Lema e mëposhtme është thelbësore në vërtetimin e teoremës 2.4.2.

Lemë 2.4.1 *$\Im \downarrow \circ$ është e filtruar.*

Vërtetim. Le të jenë $(\bullet, (a_1, a_2))$ dhe $(\bullet, (b_1, b_2))$ dy objekte në $\Im \downarrow \circ$. Mund të zgjedhim α_1, α_2 dhe $\beta_1, \beta_2 \in S$ të tilla që $\mu(\alpha_i) = a_i$ dhe $\mu(\beta_i) = b_i$, atëherë, nga përkufizimi $(\alpha_1, \alpha_2) : (\bullet, (a_1, a_2)) \to (\bullet, (1_G, 1_G))$ dhe $(\beta_1, \beta_2) : (\bullet, (b_1, b_2)) \to (\bullet, (1_G, 1_G))$ janë shigjeta në $\Im \downarrow \circ$. Së dyti, në qoftë se $(s_1, s_2), (t_1, t_2) : (\bullet, (a_1, a_2)) \to (\bullet, (b_1, b_2))$ janë shigjeta paralele, atëherë kemi $b_1\mu(s_1) = a_1 = b_1\mu(t_1)$ dhe $b_2\mu(s_2) = a_2 = b_2\mu(t_2)$, e cila do të thotë që $s_1\sigma t_1$ dhe $s_2\sigma t_2$, dhe si rezultat ekzistojnë $e, f \in E$ të tilla që $es_1 = et_1$ dhe $fs_2 = ft_2$. Por është e qartë, $(e, f) : (\bullet, (b_1, b_2)) \to (\bullet, (b_1, b_2))$ është një shigjetë në $\Im \downarrow \circ$, për rrjedhim kemi barazimin $(e, f)(s_1, s_2) = (e, f)(t_1, t_2)$ i cili është barazim shigjetash në $\Im \downarrow \circ$. Kjo tregon që $\Im \downarrow \circ$ është kategori e filtruar. ■
Teorema e mëposhtme është analoge e teoremës 2.2.2 për rastin e bi-moduleve.

Teoremë 2.4.2 *Për çdo monoid inversiv S, për çdo $n \geq 0$ dhe çdo $\mathbb{Z}G$ bi-modul M ekziston një izomorfizëm natyral*

$$Ext^n_{\mathbb{Z}G^e}(\mathbb{Z}G, M) \cong Ext^n_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}S, \mathbf{J}^*M) \tag{2.9}$$

ku $\mathbf{J}^* = \mathcal{I}_S J^* \mathcal{I}_G^{-1}$*, dhe* $\mathcal{I}_G$*,* $\mathcal{I}_S$ *janë izomorfizmat e lemës 2.1.2.*

Vërtetim. Nga lema 2.1.1 dhe ajo 2.4.1 kemi ekzistencën e funktorit $\tilde{J}$. Kompozimi $\widetilde{\mathbf{J}} = \mathcal{I}_G \widetilde{J} \mathcal{I}_S^{-1} : \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}S^e} \to \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}G^e}$ është ekzakt meqënëse $\mathcal{I}_G$ dhe $\mathcal{I}_S^{-1}$ janë ekzaktë. Në të njëjtën mënyrë ne mund të ndërtojmë një tjetër funktor ekzakt $\mathbf{J}^* = \mathcal{I}_S J^* \mathcal{I}_G^{-1} : \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}G^e} \to \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}S^e}$. Në fakt ky funktor është funktori i ndryshimit të unazave sipas [21]. Meqënëse çdo izomorfizëm është i bashkëgjitur i të anasjellit të tij, shohim nga teorema 1, f. 103 tek [47] që $\widetilde{\mathbf{J}}$ është i bashkëngjtur i majtë i $\mathbf{J}^*$. Tani mund të zbatojmë teoremën 12.1, f. 162 tek [21] për të përftuar për çdo $n \geq 0$ një izomorfizëm natyral

$$\Phi^n : Ext^n_{\mathbb{Z}G^e}(\widetilde{\mathbf{J}}N, M) \to Ext^n_{\mathbb{Z}S^e}(N, \mathbf{J}^* M) \tag{2.10}$$

për çdo $M \in \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}G^e}$ dhe $N \in \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}S^e}$. Në qoftë se marrim N të barabartë me $\mathbb{Z}S$, atëherë $\widetilde{\mathbf{J}}N$ përputhet me $\mathbb{Z}G$. Vërtet, siç është provuar në [21], funktori i ndryshimit të unazave $\mathbf{J}^*$ ka të bashkëngjitur të majtë (i cili duhet të jetë natyralisht izomorf me $\widetilde{\mathbf{J}}$) i dhënë sipas rregullit $N \mapsto \mathbb{Z}G^e \otimes_{\mathbb{Z}S^e} N$. Do të tregojmë që për $N = \mathbb{Z}S$ kjo e fundit është izomorfe me $\mathbb{Z}G$. Për të parë këtë, përcaktojmë fillimisht $\psi : \mathbb{Z}G^e \times \mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}G$ mbi gjeneratorët sipas rregullit $\psi((a \otimes b), s) = a\mu(s)b$. Ky është bilinear sepse në qoftë se $s_1 \otimes s_2 \in \mathbb{Z}S^e$, $a \otimes b \in \mathbb{Z}G^e$ dhe $s \in S$, atëherë

$$\begin{aligned} \psi((a \otimes b).(s_1 \otimes s_2), s) &= \psi(a\mu(s_1) \otimes \mu(s_2)b, s) \\ &= a\mu(s_1)\mu(s)\mu(s_2)b, \end{aligned}$$

dhe

$$\begin{aligned} \psi((a \otimes b), (s_1 \otimes s_2).s) &= \psi(a \otimes b, s_1 s s_2) \\ &= a\mu(s_1 s s_2)b. \end{aligned}$$

Rrjedhimisht kemi një homomorfizëm grupesh abelianë

$$\theta : \mathbb{Z}G^e \otimes_{\mathbb{Z}S^e} \mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}G,$$

i cili është një homomorfizëm $\mathbb{Z}G^e$ modulesh të majtë. Vërtet, për çdo $a \otimes b, a_1 \otimes b_1 \in \mathbb{Z}G^e$ dhe çdo $s \in S$ kemi

$$\begin{aligned} \theta((a_1 \otimes b_1).((a \otimes b) \otimes s)) &= \theta((a_1 a \otimes b b_1) \otimes s) \\ &= a_1 a\mu(s) b b_1, \end{aligned}$$

dhe

$$\begin{aligned} (a_1 \otimes b_1).\theta((a \otimes b) \otimes s) &= (a_1 \otimes b_1).(a\mu(s)b) \\ &= a_1 a\mu(s) b b_1. \end{aligned}$$

Më pas përcaktojmë

$$\theta' : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G^e \otimes_{\mathbb{Z}S^e} \mathbb{Z}S \text{ me anë të } g \mapsto (g \otimes 1_G) \otimes 1_S.$$

Është e qartë që θ' është homomorfizëm grupesh. Ai është gjithashtu një homomorfizëm $\mathbb{Z}G^e$ modulesh të majtë sepse në qoftë se $g_1 \otimes g_2 \in \mathbb{Z}G^e$ dhe $g \in G$, atëherë

$$\begin{aligned}\theta'((g_1 \otimes g_2).g) &= \theta'(g_1 g g_2) \\ &= (g_1 g g_2 \otimes 1_G) \otimes 1_S,\end{aligned}$$

dhe

$$\begin{aligned}(g_1 \otimes g_2).\theta'(g) &= (g_1 \otimes g_2).((g \otimes 1_G) \otimes 1_S) \\ &= (g_1 g \otimes g_2) \otimes 1_S \\ &= (g_1 g \otimes 1_G) \otimes (1_S \otimes \gamma_2).1_S \qquad \text{ku } \gamma_2 \text{ është një parafytyrë e } g_2 \\ &= (g_1 g \otimes 1_G) \otimes (\gamma_2 \otimes 1_S).1_S \\ &= (g_1 g g_2 \otimes 1_G) \otimes 1_S.\end{aligned}$$

Së fundi është e dukshme që θ' është i anasjellë i djathtë i θ dhe gjithashtu i anasjellë i majtë sepse në qoftë se $a \otimes b \in \mathbb{Z}G^e$ dhe $s \in S$, atëherë

$$\begin{aligned}\theta'\theta((a \otimes b) \otimes s) &= \theta'(a\mu(s)b) \\ &= (a\mu(s)b \otimes 1_G) \otimes 1_S \\ &= (a \otimes 1_G).(1_S \otimes \beta) \otimes s \qquad \text{ku } \mu(\beta) = b \\ &= (a \otimes b) \otimes s,\end{aligned}$$

duke përfunduar kështu vërtetimin. ■
Kujtojmë që një monoid i Klifordit është një monoid inversiv tek i cili idempotentët janë qëndrorë. Vërtetimi i teoremës 2.4.3 do të përdorë karakterizimin Bieri-Eckmann për vetinë bi-FP$_\infty$ për modulet M me anë të funktorëve $\mathrm{Ext}(M, \bullet)$ dhe $\mathrm{Tor}(M, \bullet)$.

Teoremë 2.4.3 *Le të jetë S një monoid i Klifordit dhe G grupi i imazhit maksimal të tij. Në qoftë se S është i tipit bi-FP$_\infty$, atëherë S përmban numër të fundëm idempotentësh dhe G është i tipit bi-FP$_\infty$.*

Vërtetim. Në veçanti S është i tipit bi-FP$_1$, për rrjedhojë ekziston një rezolucion i pjesshëm i lirë i tipit të fundëm $\mathbb{Z}S^e$ modulesh të majtë i $\mathbb{Z}S$-së:

$$\oplus_{i \in I_1} \mathbb{Z}S^e \to \oplus_{i \in I_0} \mathbb{Z}S^e \to \mathbb{Z}S \to 0. \tag{2.11}$$

Mund ta shohim $\mathbb{Z}E$ si $\mathbb{Z}S$ modul të djathtë duke përcaktuar: $e \cdot s = ess^{-1}$ për çdo $s \in S$ dhe $e \in E$. Në qoftë se tensorojmë (2.11) nga e majta me $\mathbb{Z}E^e$ të parë si $\mathbb{Z}E^e$ modul të majtë dhe si $\mathbb{Z}S^e$ modul të djathtë, përftojmë më poshtë vargun ekzakt në $\mathbb{Z}E^e$-**Mod**

$$\begin{gathered}\oplus_{i \in I_1} \mathbb{Z}E^e \otimes_{\mathbb{Z}S^e} \mathbb{Z}S^e \to \\ \oplus_{i \in I_0} \mathbb{Z}E^e \otimes_{\mathbb{Z}S^e} \mathbb{Z}S^e \to \mathbb{Z}E^e \otimes_{\mathbb{Z}S^e} \mathbb{Z}S \to 0.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Do të tregojmë tani që $\mathbb{Z}E^e \otimes_{\mathbb{Z}S^e} \mathbb{Z}S \cong \mathbb{Z}E$ si $\mathbb{Z}E^e$ modulesh të majtë. Për këtë përcaktojmë

$$\psi : \mathbb{Z}E^e \times \mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}E \text{ duke pozuar } \psi(e \otimes f, s) = efss^{-1},$$

dhe do të tregojmë që ψ është bilinear. Vërtet, për çdo $e, f \in E$, $s, s_1, s_2 \in S$ kemi

$$\begin{aligned}\psi(e \otimes f, (s_1 \otimes s_s).s) &= \psi(e \otimes f, s_1 s s_2) \\ &= ef(s_1 s s_2)(s_1 s s_2)^{-1} \\ &= efs_1 s s_2 s_2^{-1} s^{-1} s_1^{-1} \\ &= efs_1 s_1^{-1} s_2 s_2^{-1} s s^{-1} \qquad \text{sepse idempotentët janë qëndrorë,}\end{aligned}$$

dhe

$$\begin{aligned}\psi((e \otimes f).(s_1 \otimes s_2), s) &= \psi(es_1 s_1^{-1} \otimes f s_2 s_2^{-1}, s) \\ &= es_1 s_1^{-1} f s_2 s_2^{-1} s s^{-1} \\ &= efs_1 s_1^{-1} s_2 s_2^{-1} s s^{-1}.\end{aligned}$$

Për rrjedhojë kemi një homomorfizëm grupesh abelianë

$$\theta : \mathbb{Z}E^e \otimes_{\mathbb{Z}S^e} \mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}E$$

të induktuar nga ψ i cili është gjithashtu një homomorfizëm $\mathbb{Z}E^e$ modulesh të majtë. Vërtet, për çdo $e, e_1, f, f_1 \in E$ dhe $s \in S$ kemi

$$\begin{aligned}\theta((e_1 \otimes f_1).((e \otimes f) \otimes s)) &= \theta((e_1 e \otimes f_1 f) \otimes s) \\ &= e_1 e f_1 f s s^{-1},\end{aligned}$$

dhe

$$\begin{aligned}(e_1 \otimes f_1)\theta((e \otimes f) \otimes s) &= (e_1 \otimes f_1)(efss^{-1}) \\ &= e_1(efss^{-1})f_1 \\ &= e_1 e f_1 f s s^{-1}.\end{aligned}$$

Përcaktojmë tani

$$\theta' : \mathbb{Z}E \to \mathbb{Z}E^e \otimes_{\mathbb{Z}S^e} \mathbb{Z}S \text{ nga } \theta'(e) = (1_E \otimes 1_E) \otimes e.$$

Është e qartë që, θ' është homomorfizëm grupesh abelianë dhe një homomorfizëm $\mathbb{Z}E^e$ modulesh të majtë meqënëse për çdo $f_1, f_2, e \in E$ kemi

$$\begin{aligned}\theta'((f_1 \otimes f_2).e) &= \theta'(f_1 e f_2) \\ &= (1_E \otimes 1_E) \otimes f_1 e f_2,\end{aligned}$$

dhe

$$\begin{aligned}(f_1 \otimes f_2)\theta'(e) &= (f_1 \otimes f_2)((1_E \otimes 1_E) \otimes e) \\ &= (f_1 \otimes f_2) \otimes e \\ &= (1_E \otimes 1_E) \otimes f_1 e f_2.\end{aligned}$$

Është evidente që θ' është i anasjellë i djathtë i θ. Ai është gjithashtu i anasjellë i majtë sepse në qoftë se $e, f \in E$ dhe $s \in S$, atëherë nga njëra anë kemi

$$\begin{aligned}\theta'\theta((e \otimes f) \otimes s) &= \theta'(efss^{-1}) \\ &= (1_E \otimes 1_E) \otimes efss^{-1},\end{aligned}$$

dhe nga ana tjetër

$$\begin{aligned}(e \otimes f) \otimes s &= (e \otimes f) \otimes (1_S \otimes s).1_S \\ &= (e \otimes fss^{-1}) \otimes 1_S \\ &= (1_E \otimes 1_E) \otimes efss^{-1}.\end{aligned}$$

Kemi vërtetuar kështu që $\mathbb{Z}E^e \otimes_{\mathbb{Z}S^e} \mathbb{Z}S \cong \mathbb{Z}E$ si $\mathbb{Z}E^e$ modulesh të majtë. Në një mënyrë të ngjashme mund të tregojmë që $\mathbb{Z}E^e \otimes_{\mathbb{Z}S^e} \mathbb{Z}S^e \cong \mathbb{Z}E^e$. Për këtë më parë duhet të përcaktojmë

$$\psi : \mathbb{Z}E^e \times (\mathbb{Z}S^e) \to \mathbb{Z}E^e \text{ të tillë që } ((e \otimes f), (s_1 \otimes s_2)) \mapsto (es_1s_1^{-1} \otimes fs_2s_2^{-1}).$$

Ky është bilinear meqënëse për çdo $e, f \in E$ dhe $s_1, s_2, t_1, t_2 \in S$ kemi

$$\begin{aligned}\psi(e \otimes f, (t_1 \otimes t_2).(s_1 \otimes s_2)) &= \psi(e \otimes f, t_1s_1 \otimes s_2t_2) \\ &= e(t_1s_1)^{-1} \otimes f(s_2t_2)^{-1} \\ &= et_1s_1s_1^{-1}t_1^{-1} \otimes fs_2t_2t_2^{-1}s_2^{-1} \\ &= es_1s_1^{-1}t_1t_1^{-1} \otimes fs_2s_2^{-1}t_2t_2^{-1} \quad \text{idempotentët janë qëndrorë,}\end{aligned}$$

dhe

$$\begin{aligned}\psi((e \otimes f)(t_1 \otimes t_2) \otimes (s_1 \otimes s_2)) &= \psi((et_1t_1^{-1} \otimes ft_2t_2^{-1}) \otimes (s_1 \otimes s_2)) \\ &= et_1t_1^{-1}s_1s_1^{-1} \otimes ft_2t_2^{-1}s_2s_2^{-1}.\end{aligned}$$

Kemi kështu homomorfizmin e grupeve abelianë

$$\theta : \mathbb{Z}E^e \otimes_{\mathbb{Z}S^e} \mathbb{Z}S^e \to \mathbb{Z}E^e$$

të induktuar nga ψ i cili është gjithashtu një homomorfizëm $\mathbb{Z}E^e$ modulesh të majtë meqënëse për çdo $e_1, e_2, e, f \in E$ dhe $s_1, s_2 \in S$ kemi

$$\begin{aligned}\theta((e_1 \otimes f_1)((e \otimes f) \otimes (s_1 \otimes s_2))) &= \theta((e_1e \otimes f_1f) \otimes (s_1 \otimes s_2)) \\ &= e_1es_1s_1^{-1} \otimes f_1fs_2s_2^{-1},\end{aligned}$$

dhe

$$\begin{aligned}(e_1 \otimes f_1)\theta((e \otimes f) \otimes (s_1 \otimes s_2)) &= (e_1 \otimes f_1)(es_1s_1^{-1} \otimes fs_2s_2^{-1}) \\ &= e_1es_1s_1^{-1} \otimes f_1fs_2s_2^{-1}.\end{aligned}$$

Përcaktojmë tani

$$\theta' : \mathbb{Z}E^e \to \mathbb{Z}E^e \otimes_{\mathbb{Z}S^e} \mathbb{Z}S^e$$

nga barazimi

$$\theta'(e \otimes f) = (1_E \otimes 1_E) \otimes (e \otimes f).$$

Është e qartë që θ' është homomorfizëm grupesh abelianë dhe homomorfizëm $\mathbb{Z}E^e$ modulesh të majtë meqënëse për çdo $e, e_1, f, f_1 \in E$ kemi

$$\begin{aligned}\theta'((e_1 \otimes f_1)(e \otimes f)) &= \theta'(e_1 e \otimes f_1 f)\\ &= (1_E \otimes 1_E) \otimes (e_1 e \otimes f_1 f),\end{aligned}$$

dhe

$$\begin{aligned}(e_1 \otimes f_1)\theta'(e \otimes f) &= (e_1 \otimes f_1)((1_E \otimes 1_E) \otimes (e \otimes f))\\ &= (e_1 \otimes f_1) \otimes (e \otimes f)\\ &= (1_E \otimes 1_E) \otimes (e_1 e \otimes f_1 f).\end{aligned}$$

Është e qartë që, θ' është i anasjellë i djathtë i θ dhe gjithashtu i anasjellë i majtë i θ sepse në qoftë se $e, f \in E$ dhe $s_1, s_2 \in S$, atëherë nga njëra anë kemi që

$$\begin{aligned}\theta'\theta((e \otimes f) \otimes (s_1 \otimes s_2)) &= \theta'(es_1 s_1^{-1} \otimes fs_2 s_2^{-1})\\ &= (1_E \otimes 1_E) \otimes (es_1 s_1^{-1} \otimes fs_2 s_2^{-1}),\end{aligned}$$

dhe nga ana tjetër

$$\begin{aligned}(e \otimes f) \otimes (s_1 \otimes s_2) &= (es_1 s_1^{-1} \otimes fs_2 s_2^{-1}) \otimes (1_S \otimes 1_S)\\ &= (1_E \otimes 1_E) \otimes (es_1 s_1^{-1} \otimes fs_2 s_2^{-1}),\end{aligned}$$

duke vërtetuar kështu që $\theta' = \theta^{-1}$. Ekzaktësia (2.12) dhe izomorfizmat e mësipërm implikojnë vargun ekzakt të mëposhtëm

$$\oplus_{i \in I_1} \mathbb{Z}E^e \to \oplus_{i \in I_0} \mathbb{Z}E^e \to \mathbb{Z}E \to 0,$$

në kategorinë e $\mathbb{Z}E^e$ moduleve të majtë e cila tregon që E është bi-FP_1 dhe pastaj nga [32] E ka për të qënë me gjenerim të fundëm e për rrjedhojë e fundme.
Për të vërtetuar që G është i tipit bi-FP_∞ do të përdorim kriterin Bieri-Eckmann, pra do të na duhet të tregojmë që $Ext^n_{\mathbb{Z}G^e}(\mathbb{Z}G, \bullet)$ ndërron me kolimitet e filtruar. Le të jetë $\underrightarrow{lim} M_i$ një kolimit i filtruar i një diagrami bi-modulesh M_i ku $i \in I$. Atëherë kemi izomorfizmat natyralë të mëposhtëm

$$\begin{aligned}Ext^n_{\mathbb{Z}G^e}(\mathbb{Z}G, \underrightarrow{Lim} M_i) &\cong Ext^n_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}S, \mathbf{J}^* \underrightarrow{Lim} M_i) && \text{nga (2.9)}\\ &\cong Ext^n_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}S, \underrightarrow{Lim} \mathbf{J}^* M_i) && \mathbf{J}^* \text{ ka të bashkëngjitur të djathtë [21]}\\ &\cong \underrightarrow{Lim} Ext^n_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}S, \mathbf{J}^* M_i) && S \text{ është i tipit bi-FP}_\infty\\ &\cong \underrightarrow{Lim} Ext^n_{\mathbb{Z}G^e}(\mathbb{Z}G, M_i) && \text{nga natyraliteti i (2.9)},\end{aligned}$$

e cila tregon që G është i tipit bi-FP_∞ siç kërkohej. ■

2.5 Kondita dobësisht bi-FP_∞

Një monoid do të quhet *dobësisht bi-FP_n* ku $n \geq 0$, në qoftë se moduli trivial $\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}S^e$-**Mod** është i tipit FP_n, dhe i tipit dobësisht bi-FP_∞ në qoftë se është dobësisht bi-FP_n për çdo $n \geq 0$. Kjo konditë është futur nga Alonso dhe Hermiller tek [2]. Është provuar nga Pride tek [57] se dobësisht bi-FP_n është ekuivalente me majtas dhe djathtas FP_n. Në këtë paragraf do të tregojmë se vetia dobësisht bi-FP_n transmetohet nga idealet me njësh të një monoidi tek vetë monoidi, dhe anasjellas. Për ta treguar këtë do të na nevojiten disa njohuri shtesë.
Tek [1] është vërtetuar rezultati i mëposhtëm të cilin po e citojmë në vazhdim. Le të jenë $\mathcal{S} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ dhe $\mathcal{T} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ funktorë aditivë ndërmjet dy kategorive abeliane të tillë që $\mathcal{S}$ është i bashkëngjitur i majtë i $\mathcal{T}$. Po qe se supozojmë se $\mathcal{S}$ dhe $\mathcal{T}$ janë ekzaktë dhe se $\mathcal{A}$ ka mjaftueshëm projektivë, atëherë ka vend izomorfizmi.

$$Ext_{\mathcal{A}}(A, \mathcal{T}B) \cong Ext_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}A, B). \tag{2.13}$$

Le të jetë S një monoid dhe L ideal i tij që përmban një element unitar të shënuar me ε. Shënojmë me $\mu : S \to L$ pasqyrimin e tillë që $s \mapsto s\varepsilon$. Është e qartë që ky është një epimorfizëm monoidesh i cili indukton një epimorfizëm të unazave $\mathbb{Z}\mu : \mathbb{Z}S^e \to \mathbb{Z}L^e$ me anën e rregullit $x \otimes y \mapsto x\varepsilon \otimes \varepsilon y$ e për pasojë kemi funktorin $\mathcal{S} : \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}L^e} \to \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}S^e}$ të ndryshimit të unazave i cili është qartësisht ekzakt. Nga ana tjetër mund të përcaktojmë $\mathcal{T} : \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}S^e} \to \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}L^e}$ të tillë që $\mathcal{T}(A) = \varepsilon A\varepsilon$. Edhe ky është funktor ekzakt dhe provohet të jetë i bashkëngjitur i djathtë i $\mathcal{S}$. Në këto kushte rezulton se

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}, A) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}L^e}(\mathbb{Z}, \varepsilon A\varepsilon), \tag{2.14}$$

ku $\mathbb{Z}$ është $\mathbb{Z}S^e$ moduli trivial. Izomorfizmi (2.14) që paraqitëm këtu është përgjithësimi për bi-modulet i izomorfizmit

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}S}(\mathbb{Z}, A) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}L}(\mathbb{Z}, \varepsilon A), \tag{2.15}$$

për modulet të vërtetuar tek [1], ku përsëri $\mathbb{Z}$ është $\mathbb{Z}S$ moduli trivial.
Teorema e mëposhtme është analoge e teoremës 3 të [15] e cila formulohet si teorema jonë por që ka në formulim konditën majtas FP_n në vend të asaj dobësisht bi-FP_∞.

Teoremë 2.5.1 *Le të jetë S një gjysmëgrup dhe L një ideal me njësh i S-së. Atëherë, S është i tipit dobësisht bi-FP_∞ vetëm kur L është i po atij tipi.*

Vërtetim. Po shënojmë me ε njëshin e idealit L. Sikurse është treguar në teoremën 2 të [1], pasqyrimi $\mu : S \to L$ i tillë që $s \mapsto s\varepsilon$ është një retraksion i S në L. Në këto kushte, Teorema 3 e [57] sjell që L është i tipit dobësisht bi-FP_∞ meqënëse i atij tipi është S.
Anasjellas, për të treguar se S është i tipit dobësisht bi-FP_∞, ashtu siç tregohet në [11], na duhet të provojmë se $Ext^n_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}, \bullet)$ komuton me kolimitet e drejtuar. Le të jetë $\underrightarrow{Lim}_I M_i$ një kolimit i një familje të drejtuar bi-modulesh M_i ku $i \in I$ dhe për çdo $i, j \in I$ shënojmë me $\mu_{i,j} : M_i \to M_j$ familjen përkatëse të homomorfizmave. Vërejmë se

$$\underrightarrow{Lim}_I(\varepsilon M_i\varepsilon)) \cong \varepsilon(\underrightarrow{Lim}_I M_i)\varepsilon \tag{2.16}$$

ku si izomorfizëm shërben pasqyrimi

$$\Psi : \varepsilon(\bigoplus_{i\in I} M_i/K)\varepsilon \to (\bigoplus_{i\in I} \varepsilon M_i\varepsilon)/K' \text{ i tillë që } \varepsilon(x+K)\varepsilon \mapsto \varepsilon x\varepsilon + K',$$

ku K është nënmoduli i $\bigoplus_{i\in I} M_i$ i përftuar nga diferencat e trajtës $x - \mu_{i,j}(x)$ për çdo $x \in M_i$, dhe K' analogu i K për $\bigoplus_{i\in I} \varepsilon M_i\varepsilon$. Atëherë kemi izomorfizmat natyralë të mëposhtëm

$$\begin{aligned}
Ext^n_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}, \underrightarrow{Lim}_I M_i) &\cong Ext^n_{\mathbb{Z}L^e}(\mathbb{Z}, \varepsilon(\underrightarrow{Lim}_I M_i)\varepsilon) && \text{nga (2.14)}\\
&\cong Ext^n_{\mathbb{Z}L^e}(\mathbb{Z}, \underrightarrow{Lim}_I(\varepsilon M_i\varepsilon)) && \text{nga (2.16)}\\
&\cong \underrightarrow{Lim}_I Ext^n_{\mathbb{Z}L^e}(\mathbb{Z}, \varepsilon M_i\varepsilon) && L \text{ është i tipit dobësisht bi-FP}_\infty\\
&\cong \underrightarrow{Lim}_I Ext^n_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}, M_i) && \text{nga natyraliteti i (2.14),}
\end{aligned}$$

që tregon se S është i tipit dobësisht bi-FP$_\infty$. ■

Rrjedhimi i mëposhtëm është një përmirësim i një rezultati të Kobayashit në artikullin [33] i cili pohon se gjysmëgrupet me zero të dyanshme janë të tipit majtas-FP$_\infty$.

Rrjedhim 2.5.2 *Në qoftë se një gjysmëgrup ka element zero, atëherë ai është i tipit dobësisht bi-FP$_\infty$.*

Një rrjedhim tjetër i teoremës 2.5.1 është dhe ai i mëposhtmi.

Rrjedhim 2.5.3 *Një monoid S i Klifordit është i tipit dobësisht bi-FP$_\infty$ vetëm kur përmban një idempotent minimal ε dhe $\mathcal{H}$-klasa e Grinit H_ε është e tipit dobësisht bi-FP$_\infty$.*

Vërtetim. Meqënëse S është dobësisht bi-FP$_\infty$, atëherë ai do të jetë i tipit FP$_\infty$, e rrjedhimisht nga teorema 2.3.1 do të përmbajë një idempotent minimal ε. Mund të vihet re lehtë se $\mathcal{H}$-klasa e Grinit H_ε është izomorfe me grupin e imazhit maksimal G të S-së ku rolin e izomorfizmit e luan pasqyrimi $\phi : H_\varepsilon \to G$ që $\phi(x) = \nu(x)$. Ky fakt dhe teorema 2.3.1 përsëri sjellin që H_ε është i tipit FP$_\infty$. Mirëpo për grupet, siç tregohet tek [57], kondiтat FP$_\infty$ dhe dobësisht bi-FP$_\infty$ përputhen, e rrjedhimisht kemi kushtin e nevojshëm. Anasjellas, $\mathcal{H}$-klasa e Grinit H_ε e një idempotenti minimal ε është ideal me njësh idempotentin ε. Tani punën e bën teorema 2.5.1. ■

2.6 Idealet plotësisht të thjeshtë të tipit bi-FP$_\infty$

Në këtë paragraf do të vërtetojmë se në qoftë se një monoid S përmban një ideal I plotësisht të thjeshtë me njësh, atëherë S është i tipit bi-FP$_\infty$ vetëm kur I dhe filtri korrespondues N janë të tipit bi-FP$_\infty$. Ky rezultat e bën konditën bi-FP$_\infty$ një konditë fundshmërie homologjike më të mirë se sa ajo FP$_\infty$ pasi në kontrast me këtë të fundit, nuk mund të pritet që të përftohet një monoid i tipit bi-FP$_\infty$ duke i shtuar një element zero një monoidi që s'është i atij tipi. Më tej do të përftojmë si rrjedhim një rezultat interesant për zinxhirët e grupeve.

Ka raste interesante monoidësh që zbërthehen si bashkime të ndara dy monoidësh njëri nga të cilët është ideal. Teorema e klasifikimit të ω-gjysmëgrupeve inversivë ([38] teorema 6 f. 164) tregon se një ω-gjysmëgrup inversiv që nuk është i thjeshtë, bi i thjeshtë apo i Klifordit, është një zgjerim ideal i një ω-gjysmëgrupi të thjeshtë inversiv I me një gjysmëgrup të Klifordit C me zero idempotentët e të cilit formojnë një zinxhir të fundëm. Është vërtetuar në këtë teoremë se I është një ideal i S. Vërejmë se në fakt ai është plotësisht i thjeshtë dhe se ka njësh. Për të provuar të parën, supozojmë se ekzistojnë $x, y \in S\backslash I$ të tilla që $xy \in I$, atëherë $x^{-1}xyy^{-1} \in I$. Po të shkruajmë $x^{-1}x = e$ dhe $yy^{-1} = f$, përftojmë $ef \in I$. Por meqënëse idempotentët formojnë një zinxhir tek një ω-gjysmëgrup inversiv, do të kemi që $ef = e$ ose f. Le të supozojmë se $ef = e$ dhe atëherë marrim $x^{-1}x \in I$. Por $(x^{-1}x, x) \in \mathcal{L}$, kështu që $L_x \cap I \neq \emptyset$ dhe pastaj mund të merret lehtë që $L_x \subseteq I$. Kjo kontradiktë provon qe I është plotësisht i thjeshtë. Për të provuar se ai është monoid, shënojmë me $e_1, ..., e_n$ të gjithë idempotentët jashtë I dhe tregojmë se $\varepsilon = e_{n+1}$ është njëshi i I. Meqë I është i thjeshtë, ai shkruhet në formën $I\varepsilon I \cup I\varepsilon \cup \varepsilon I \cup \{\varepsilon\}$ dhe atëherë çdo element $x \in I$ do të ketë formën $x = x_1\varepsilon x_2$ ku $x_1, x_2 \in I^1$. Duke shumëzuar në të majtë barazimin e fundit me idempotentin $e_{x_1} = x_1x_1^{-1}$ marrim $e_{x_1}x = x$. Po të shumëzojmë tani majtas me ε marrim $\varepsilon e_{x_1}x = \varepsilon x$. Por ε është më i madhi idempotent në I, kështu që $e_{x_1}x = \varepsilon x$, dhe atëherë $x = \varepsilon x$. Në mënyrë të ngjashme mund të tregohet se $x = x\varepsilon$.
Para se të japim rezultatet kryesore, do të na duhet të marrim në shqyrtim një situatë më të përgjithshme për të përftuar një rezultat që do të përdoret më vonë. Le të jetë $\mathcal{R}$ një unazë unitare dhe $\mathcal{J}$ një ideal i $\mathcal{R}$ i cili përmban një element të njësishëm ω. Ekziston një homomorfizëm unazash $\gamma : \mathcal{R} \to \mathcal{J}$ i përcaktuar nga $\gamma(r) = r\omega$ i cili indukton funktorin e ndryshimit të unazave $U^\gamma : \mathbf{Ab}^{\mathcal{J}} \to \mathbf{Ab}^{\mathcal{R}}$. Siç është vërejtur në [21] f. 163, U^γ ka të bashkëngjitur të majtë F të përcaktuar nga $FA = \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{R}} A$ për çdo $A \in \mathbf{Ab}^{\mathcal{R}}$. Tregohet si një ushtrim i thjeshtë që $\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{R}} A \cong \omega A$ si $\mathcal{J}$-module të majtë. Kjo tregon që funktori i cili pasqyron çdo modul A te ωA është i bashkëngjitur i majtë dhe si i tillë ai ruan kolimitet.
Kthehemi tani tek situata jonë. Le të jetë S monoid me njësh 1 dhe I një ideal plotësisht i thjeshtë i S i cili është monoid me njësh ε. Le të jetë $N = S \setminus I$ filteri korrespondues. Përcaktojmë së pari një strukturë $\mathbb{Z}S^e$ moduli të djathtë mbi $\mathbb{Z}N^e$ duke pozuar

$$(n \otimes n') \cdot (s_1 \otimes s_2) = \begin{cases} 0 & \text{në qoftë se} \quad s_1 \text{ ose } s_2 \in I \\ ns_1 \otimes s_2n' & \text{në qoftë se} \quad s_1, s_2 \in N \end{cases}$$

dhe në mënyrë të ngjashme, një strukturë $\mathbb{Z}S^e$ moduli të majtë mbi të. Përcaktojmë J si shumën $\mathbb{Z}S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}I^{opp} + \mathbb{Z}I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}S^{opp} + \mathbb{Z}I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}I^{opp}$ e cila provohet të jetë ideal i $\mathbb{Z}S^e$.

Lemë 2.6.1 *Gjendet një izomorfizëm $\mathbb{Z}S^e/J \cong \mathbb{Z}N^e$, $\mathbb{Z}S^e$ modulesh të majtë dhe të djathtë dhe një izomorfizëm $\mathbb{Z}N^e$ modulesh të majtë dhe të djathtë.*

Vërtetim. Përcaktojmë

$$\Phi : \mathbb{Z}S^e/J \to \mathbb{Z}N^e \text{ nga } \sum z_in_i \otimes n'_i + J \mapsto \sum z_in_i \otimes n'_i,$$

i cili tregohet lehtë që është izomorfizëm $\mathbb{Z}S^e$ modulesh të majtë dhe të djathtë dhe $\mathbb{Z}N^e$ modulesh të majtë e të djathtë. ■

Lemë 2.6.2 *$\mathbb{Z}N^e$ është i sheshtë si $\mathbb{Z}S^e$ modul i majtë dhe i djathtë nëpërmjet homomorfizmit kanonik të unazave $\gamma : \mathbb{Z}S^e \to \mathbb{Z}S^e/J$.*

Vërtetim. Ne do të vërtetojmë lemën vetëm për rastin e moduleve të djathtë. Rasti tjetër trajtohet në mënyrë të ngjashme. Mund të provohet lehtë si një ushtrim në algjebrën homologjike që në qoftë se J është ideal i një unaze unitare R dhe A një R-modul i majtë, atëherë $R/J \otimes_R A \cong A/JA$ në R-Mod ku izomorfizmi pasqyron $(r + J) \otimes_R a$ në $(ra + JA)$. Në situatën tonë, për çdo $\mathbb{Z}S^e$ modul të majtë A, do të kishim

$$\mathbb{Z}N^e \otimes_{\mathbb{Z}S^e} A \cong \mathbb{Z}S^e/J \otimes_{\mathbb{Z}S^e} A \text{ në } \mathbb{Z}N^e\text{-Mod dhe}$$

$$\mathbb{Z}S^e/J \otimes_{\mathbb{Z}S^e} A \cong A/JA \text{ në } \mathbb{Z}S^e\text{-Mod dhe sigurisht në } \mathbb{Z}N^e\text{-Mod},$$

dhe për rrjedhojë një izomorfizëm $\mathbb{Z}N^e \otimes_{\mathbb{Z}S^e} A \cong A/JA$ në $\mathbb{Z}N^e$-Mod. Duke përdorur këtë ne provojmë që $\mathbb{Z}N^e$ është i sheshtë si një $\mathbb{Z}S^e$ modul i djathtë nëpërmjet γ. Për çdo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}S^e}(A, B)$, le të jetë $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}N^e}(A/JA, B/JB)$ pasqyrimi i përcaktuar nga $\varphi(a + JA) = f(a) + JB$ që në thelb është pasqyrimi $\mathbb{Z}N^e \otimes_{\mathbb{Z}S^e} f$. Do të tregojmë që në qoftë se f është injektiv, atëherë φ është gjithashtu injektiv. Vërtet, në qoftë se për ndonjë $a \in A$, $f(a) \in JB$, atëherë është e lehtë të shihet që $f(a) = f(\varepsilon a) + f(a\varepsilon) - f(\varepsilon a\varepsilon)$. Nga fakti që f është injektiv shohim që $a = \varepsilon a + a\varepsilon + \varepsilon a\varepsilon$ dhe për rrjedhojë $a \in JA$, duke provuar që φ është injektiv. Kjo provon që $\mathbb{Z}N^e$ është i sheshtë si një $\mathbb{Z}S^e$ modul i djathtë nëpërmjet γ. ■

Teoremë 2.6.3 *Le të jetë S një monoid, $I \neq S$ një ideal plotësisht i thjeshtë me njësh ε dhe N filteri korrespondues. Atëherë S është i tipit bi-FP$_\infty$, vetëm kur I dhe N janë të tipit bi-FP$_\infty$.*

Vërtetim. Që I është i tipit bi-FP$_\infty$, rrjedh nga [57] meqënëse I është retraksion i S-së nëpërmjet pasqyrimit $x \mapsto x\varepsilon$. Për të provuar që N është i tipit bi-FP$_\infty$, vërejmë së pari që lema 2.6.2 dhe pohimi 1.7.5 implikojnë ekzistencën e një izomorfizmi natyral

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}N^e}(\mathbb{Z}N^e \otimes_{\mathbb{Z}S^e} A, B) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}S^e}(A, U^\gamma B) \tag{2.17}$$

për çdo $\mathbb{Z}S^e$ modul të majtë A dhe çdo $\mathbb{Z}N^e$ modul të majtë B. Për të përfunduar vërtetimin, ne mund të përdorim (2.17) dhe kriterin Bieri-Eckmann. Fillimisht vërejmë që $\mathbb{Z}N^e \otimes_{\mathbb{Z}S^e} \mathbb{Z}S \cong \mathbb{Z}N$ meqënëse nga lema $\mathbb{Z}N^e \otimes_{\mathbb{Z}S^e} \mathbb{Z}S \cong \mathbb{Z}S/J \cdot \mathbb{Z}S$, por $\mathbb{Z}S/J \cdot \mathbb{Z}S = \mathbb{Z}S/\mathbb{Z}I$ dhe $\mathbb{Z}S/\mathbb{Z}I \cong \mathbb{Z}N$ si $\mathbb{Z}N$ bi-module. Për rrjedhojë, për $A = \mathbb{Z}S$ izomorfizmi (2.17) bëhet

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}N^e}(\mathbb{Z}N, B) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}S, U^\gamma B), \tag{2.18}$$

dhe prandaj, sa herë që $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}S, \bullet)$ ndërron me kolimitet e drejtuar, të njëjtën gjë bën edhe $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}N^e}(\mathbb{Z}N, \bullet)$. Vërtet, për çdo familje të drejtuar B_i, për $i \in \mathcal{I}$, $\mathbb{Z}N^e$

modulesh të majtë, kemi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}N^e}(\mathbb{Z}N, \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} B_i) &\cong \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}S, U^\gamma \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} B_i) && \text{nga (2.18)}\\
&\cong \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}S, \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} U^\gamma B_i) && U^\gamma \text{ është i bashkëngjitur i majtë}\\
&\cong \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}S, U^\gamma B_i) && S \text{ është i tipit bi-FP}_\infty\\
&\cong \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}N^e}(\mathbb{Z}N, B_i) && \text{nga (2.18),}
\end{aligned}$$

që provon kushtin e nevojshëm të teoremës.
Për të anasjellën kujtojmë që $\lambda : S \to I$ i përcaktuar nga $s \mapsto s\varepsilon$ është rektraksion. Ai indukton një rektraksion $\lambda \times \lambda^{opp} : S \times S^{opp} \to I \times I^{opp}$ të përcaktuar nga $(s_1, s_2) \mapsto (s_1\varepsilon, \varepsilon s_2)$. Tani mund të zbatojmë teoremën 2 të [1] duke marrë $S \times S^{opp}$ në vend të S, $I \times I^{opp}$ në vend të M dhe $\lambda \times \lambda^{opp}$ në vend të r për të përftuar izomorfizmin natyral

$$\mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}(S\times S^{opp})}(B, A) \cong \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}(I\times I^{opp})}(B, (\varepsilon, \varepsilon^{opp})A). \tag{2.19}$$

Siç është vërejtur te [50], kategoria e $\mathbb{Z}(S \times S^{opp})$ moduleve të majtë është izomorfe me kategorinë e $\mathbb{Z}S^e$ moduleve të majtë; çdo $\mathbb{Z}(S \times S^{opp})$ modul i majtë A mund të shihet si një $\mathbb{Z}S^e$ modul i majtë duke pëcaktuar $(s_1 \otimes_{\mathbb{Z}} s_2)a = (s_1 \times s_2)a$, dhe anasjellas. Sigurisht, e njëjta gjë qëndron e vërtetë për I dhe pastaj (2.19) bëhet

$$\mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}S^e}(B, A) \cong \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}I^e}(B, \varepsilon A\varepsilon). \tag{2.20}$$

Rrjedhimi 1 i [1] implikon një izomorfizëm natyral

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}S^e}(B, A) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}I^e}(B, \varepsilon A\varepsilon),$$

i cili po të aplikohet për $B = \mathbb{Z}I$, jep

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}I, A) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}I^e}(\mathbb{Z}I, \varepsilon A\varepsilon). \tag{2.21}$$

Retraksioni λ indukton në $\mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}S^e}$ një retraksion $h : \mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}I$ të dhënë nga $s \mapsto s\varepsilon$, për rrjedhojë në $\mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}S^e}$ kemi izomorfizmin $\mathbb{Z}S \cong \mathbb{Z}I \oplus K$ ku K është bërthama e h e cila, si një grup abelian, gjenerohet nga elementët e trajtës $n - n\varepsilon$ ku $n \in N$. Duke e parë $\mathbb{Z}N$ si një $\mathbb{Z}S^e$ modul të majtë nëpërmjet γ, ose njësoj duke përcaktuar

$$(s_1 \otimes s_2).n = \begin{cases} 0 & \text{në qoftë se} \quad s_1 \text{ ose } s_2 \in I \\ s_1 n s_2 & \text{në qoftë se} \quad s_1, s_2 \in N \end{cases}$$

është e lehtë të shihet se pasqyrimi

$$\nu : \mathbb{Z}N \to K \text{ i përcaktuar nga } n \mapsto n - n\varepsilon$$

është izomorfizëm $\mathbb{Z}S^e$ modulesh të majtë, për rrjedhojë kemi në $\mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}S^e}$ një izomorfizëm $\mathbb{Z}S \cong \mathbb{Z}I \oplus \mathbb{Z}N$. Gjithashtu vërejmë se $\mathbb{Z}N^e$ është me paraqitje të fundme në $\mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}S^e}$. Ekzistenca e pasqyrimit kanonik $\gamma : \mathbb{Z}S^e \to \mathbb{Z}S^e/J$ e parë si epimorfizëm $\mathbb{Z}S^e$ modulesh të majtë, tregon që $\mathbb{Z}N^e$ është me gjenerim të fundëm. Për të treguar që ajo është me paraqitje të fundme duhet të tregojmë që J e cila është bërthama e γ është edhe ajo me gjenerim të fundëm. Përcaktojmë $\mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}S^e}$ tre homomorfizma

$$h_1 : \mathbb{Z}S^e \to J \text{ të tillë që } h_1(1 \otimes 1) = \varepsilon \otimes 1,$$

imazhi i të cilit është $\mathbb{Z}I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}S^{opp}$,

$$h_2 : \mathbb{Z}S^e \to J \text{ të tillë që } h_2(1 \otimes 1) = 1 \otimes \varepsilon$$

imazhi i të cilit është $\mathbb{Z}S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}I^{opp}$, dhe

$$h_3 : \mathbb{Z}S^e \to J \text{ të tillë që } h_3(1 \otimes 1) = \varepsilon \otimes \varepsilon.$$

me imazh $\mathbb{Z}I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}I^{opp}$. Vetia universale e shumave të drejta implikon ekzistencën e një $\mathbb{Z}S^e$ epimorfizmi $h : \mathbb{Z}S^e \oplus \mathbb{Z}S^e \oplus \mathbb{Z}S^e \to J$, që provon pohimin tonë. Implikimi i parë i të qënit të $\mathbb{Z}N^e$ me paraqitje të fundme është që $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}N^e, \bullet)$ është i vazhdueshëm. Së dyti, në qoftë se kujtojmë nga lema 2.6.2 që $\mathbb{Z}N^e$ është një $\mathbb{Z}S^e$ modul i majtë i sheshtë, atëherë ai ka për të qënë projektiv si një $\mathbb{Z}S^e$ modul i majtë, për rrjedhim pohimi 1.7.7 implikon ekzistencën e një izomorfizmi natyral

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}N^e}(\mathbb{Z}N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}N^e, A)) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}S^e}(U^\gamma \mathbb{Z}N, A). \tag{2.22}$$

Prej këndej kemi që për $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}S, A) &\cong \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}I \oplus \mathbb{Z}N, A) \\
&\cong \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}I, A) \oplus \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}N, A) \\
&\cong \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}I^e}(\mathbb{Z}I, \varepsilon A \varepsilon) \oplus \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}S^e}(U^\gamma \mathbb{Z}N, A) && \text{nga (2.21)} \\
&\cong \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}I^e}(\mathbb{Z}I, \varepsilon A \varepsilon) \oplus \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}N^e}(\mathbb{Z}N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}N^e, A)) && \text{nga (2.22).}
\end{aligned}$$

Për të përfunduar vërtetimin do të përdorim kriterin Bieri-Eckmann. Le të jetë A_i për $i \in \mathcal{I}$ një familje e drejtuar $\mathbb{Z}S^e$ modulesh të majtë dhe $\underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} A_i$ kolimiti korrespondues. Nga izomorfizmat e mësipërm, nga fakti që $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}N^e, \bullet)$ është i vazhdueshëm dhe nga fakti që funktori $A \mapsto \varepsilon A \varepsilon$ ruan kolimitet si i bashkëgjitur i majtë (shih teoremën 1.2.7), kemi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}S, \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} A_i) &\cong \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}I^e}(\mathbb{Z}I, \varepsilon(\underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} A_i)\varepsilon) \oplus \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}N^e}(\mathbb{Z}N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}N^e, \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} A_i)) \\
&\cong \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}I^e}(\mathbb{Z}I, \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}}(\varepsilon A_i \varepsilon)) \oplus \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}N^e}(\mathbb{Z}N, \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}N^e, A_i)) \\
&\cong \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} \left(\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}I^e}(\mathbb{Z}I, \varepsilon A_i \varepsilon) \oplus \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}N^e}(\mathbb{Z}N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}N^e, A_i))\right) \\
&\cong \underrightarrow{Lim}_{\mathcal{I}} \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}S^e}(\mathbb{Z}S, A_i),
\end{aligned}$$

e cila përfundon vërtetimin. ■
Le të shohim tani se çfarë ndodh me monoidët e Klifordit idempotentët e të cilëve formojnë një zinxhir. Në literaturë (shih psh. [38]) këta njihen ndryshe me emrin zinxhirë grupesh.

Rrjedhim 2.6.4 *Le të jetë S një zinxhir grupesh me njësh dhe E semilatisa e S-së. Atëherë S është i tipit bi-FP_∞ vetëm kur $|E| < \infty$ dhe për çdo $e \in E$, $\mathcal{H}$-klasa e Grinit H_e është e tipit bi-FP_∞.*

Vërtetim. Në qoftë se S është e tipit bi-FP$_\infty$, atëherë si rrjedhim të menjëhershëm të teoremës 2.4.3 kemi që $|E| < \infty$. Le të jenë $e_1 > \cdots > e_{n-1} > e_n$ elementët e E-së. Si tek vërtetimi i rrjedhimit 2.5.3 kemi që H_{e_n} është ideal, e madje plotësisht i thjeshtë në kushtet tona. Teorema 2.6.3 sjell që $S_{n-1} = S \setminus H_{e_n}$ është e tipit bi-FP$_\infty$. Duke përsëritur arsyetimin e mësipërm për S_{n-1} del se edhe $H_{e_{n-1}}$ është e tipit bi-FP$_\infty$. Në mënyrë të ngjashme, pas një numri të fundëm hapash, marrim se për çdo $i = n-1, ..., 1$, H_{e_i} është e tipit bi-FP$_\infty$. Për të vërtetuar të anasjellën do të përdorim induksionin matematik mbi numrin n të elementëve të zinxhirit E. Kur $n = 1$, S përputhet me grupin e vet të imazhit maksimal, rrjedhimisht është i tipit bi-FP$_\infty$. Supozojmë se S ka $n > 1$ idempotentë dhe le të jetë ε më i vogli i tyre. Si tek vërtetimi i kushtit të nevojshëm kemi që H_ε është ideal plotësisht i thjeshtë. Nga ana tjetër, $N = S \setminus H_\varepsilon$ është zinxhir grupesh me njësh semilatisa e të cilit ka $n-1$ elementë, e rrjedhimisht për shkak të supozimit induktiv, do të kemi që N është i tipit bi-FP$_\infty$. Vërtetimi përfundon po të kemi parasysh rezulatin e teoremës 2.6.3. ∎

Kapitulli 3

Kondita FP_n për kategoritë e vogla dhe një zbatim për monoidët inversivë

Në këtë kapitull do të provojmë një analog të kriterit Bieri-Eckmann për konditën FP_n për funktorët që i përkasin kategorisë së funktorëve të formës $\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}$ ku $\mathcal{C}$ është një kategori e vogël aditive me një numër të fundëm objektesh. Sigurisht elementët e $\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}$ përgjithësojnë modulet, sepse si $\mathcal{C}$ në veçanti mund të marrim çdo unazë unitare. Përpara se të përcaktojmë dhe të vërtetojmë kriterin, do të provojmë disa rezultate që kanë të bëjnë me objektet e lirë në $\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}$, më pas do të japim përkufizimin e FP_n dhe do të provojmë një analog të teoremës 7.10 të [30] për modulet që gjithashtu është analog i ekuivalencës $(i) \Leftrightarrow (ii)$ të teoremës 1.4.12 por që në vend të vazhdueshmërisë përdor vazhdueshmërinë në zero.

3.1 Të lirët në $\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}$

Me përkufizim, çdo koprodukt $\bigoplus\limits_{x\in X}\bigoplus\limits_{c\in\mathcal{C}}\mathcal{C}(c,\bullet)$ do të quhet objekt i lirë në $\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}$. Arsyeja se përse i quajmë këto koprodukte të lirë qëndron tek rezultatet e dy pohimeve e mëposhtme.

Teoremë 3.1.1 *Ekziston një çift funktorësh të bashkëngjitur $Fr : \mathbf{Set} \to \mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}$ i përcaktuar mbi objektet nga $X \mapsto \bigoplus\limits_{x\in X}\bigoplus\limits_{c\in\mathcal{C}}\mathcal{C}(c,\bullet)$, dhe $U : \mathbf{Ab}^{\mathcal{C}} \to \mathbf{Set}$ i përcaktuar mbi objektet nga $F \mapsto \prod\limits_{c\in\mathcal{C}} F(c)$, ku U është i bashkëngjitur i djathtë i Fr dhe injektiv mbi morfizmat.*

Vërtetim. Përcaktojmë

$$\varphi : \mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}\Big(\bigoplus_{x\in X}\bigoplus_{c\in\mathcal{C}}\mathcal{C}(c,\bullet), F\Big) \to \mathbf{Set}\Big(X, \prod_{c\in\mathcal{C}} F(c)\Big)$$

nga

$$\tau \mapsto \varphi(\tau) \text{ ku } \varphi(\tau)(x) = (\tau\iota_x\iota_c(1_c))_{c\in\mathcal{C}}.$$

Është një gjë rutinë për të treguar që φ është bijektiv dhe natyral në X dhe F për rrjedhim U është i bashkëngjitur i djathtë i Fr. Për të treguar që U është injektiv mbi morfizmat supozojmë që $\alpha, \beta : F \to G$ janë morfizma të tillë që $U(\alpha) = U(\beta)$. Nga vetia universale e produkteve të drejtë shohim që për çdo $c \in \mathcal{C}$ kemi $\pi_c U(\alpha) = \alpha_c \pi_c$ dhe $\pi_c U(\beta) = \beta_c \pi_c$, për rrjedhim $\alpha_c \pi_c = \beta_c \pi_c$. Në qoftëse thjeshtojmë π_c si një epimorfizëm, përftojmë $\alpha_c = \beta_c$ për çdo $c \in \mathcal{C}$ që tregon se $\alpha = \beta$. ■

Pohim 3.1.2 *Koproduktet e çfarëdoshëm të hom-funktorëve kovariantë janë projektivë.*

Vërtetim. Kemi për të treguar që $\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{C}(c_i, \bullet), \bullet)$ ruan epimorfizmat. Në qoftë se $\tau : F \to G$ është epimorfizëm në $\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}$, atëherë duhet të tregojmë që morfizmi i induktuar

$$\tau^* : \mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{C}(c_i, \bullet), F) \to \mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{C}(c_i, \bullet), G)$$

është epimorfizëm grupesh abelianë. Vërtet, meqënëse τ është epimorfizëm, Pohimi 3.1, f. 258 i [48] tregon që për çdo $i \in I$, $\tau_i : F(c_i) \to G(c_i)$ është epimorfizëm grupesh abelianë, dhe lema Yoneda tregon që ekzistojnë bijeksionet natyrale

$$\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{C}(c_i, \bullet), F) \simeq \prod_{i\in I} F(c_i)$$

dhe

$$\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{C}(c_i, \bullet), G) \simeq \prod_{i\in I} G(c_i),$$

për rrjedhojë τ^* është efektivisht një pasqyrim $\prod_{i\in I} F(c_i) \to \prod_{i\in I} G(c_i)$ i cili ka për të qënë syrjektiv meqënëse ngushtimi i tij është i tillë në secilën komponente $F(c_i)$. ■

Do të pranojmë që funktorët nga $\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}$ ti quajmë $\mathcal{C}$-modul dhe për çdo $M, N \in \mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}$ do të themi që N është nënmodul i M, e cila shkruhet si $N \leq M$, në qoftë se për të gjitha $c \in \mathcal{C}$, $N(c) \leq M(c)$ dhe për çdo $c, c' \in \mathcal{C}$ dhe $\alpha : c \to c'$, $N(\alpha)$ është ngushtimi i $M(\alpha)$ në $N(c)$. Përcaktojmë gjithashtu modulin herës M/N nga $M/N(c) = M(c)/N(c)$ për çdo $c \in \mathcal{C}$ dhe për çdo morfizëm $\alpha : c \to c'$, $M/N(\alpha) : M(c)/N(c) \to M(c')/N(c')$ përcaktohet nga $M/N(\alpha)(x + N(c)) = M(\alpha)(x) + N(c')$. Për çdo dy $\mathcal{C}$-module M dhe N përcaktojmë shumën e tyre $M + N$ nga $(M + N)(c) = M(c) + N(c)$ për çdo $c \in \mathcal{C}$ dhe $(M + N)(\alpha) = M(\alpha) + N(\alpha)$ për çdo morfizëm α në $\mathcal{C}$. Bërthama $Ker\tau$ e $\tau : M \to N$, është funktori $Ker\tau$ i përcaktuar mbi objektet nga barazimi $(Ker\tau)(c) = Ker(\tau(c))$ të bërthamës së homomorfizmit $\tau(c) : M(c) \to N(c)$, dhe mbi morfizmat $\alpha : c \to c'$, duke marrë si $(Ker\tau)(\alpha)$ ngushtimin e $M(\alpha)$ mbi $Ker(\tau(c))$. Së fundi, do të themi që një modul M është me gjenerim të fundëm në qoftë se ekziston një bashkësi e fundme X dhe një transformim natyral $\tau : \bigoplus_{x\in X} \bigoplus_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{C}(c, \bullet) \to M$ me komponentë syrjektivë.

3.2 Kriteri Bieri-Eckmann për funktorët aditivë

Në këtë paragraf do të vërtetojmë analogen e teoremës 7.10 të [30] e cila jep një karakterizim të konditës FP_n për modulet në terma të vazhdueshmërisë në zero të funktorit Ext.

Lemë 3.2.1 *Le të jetë $\mathcal{C}$ një kategori e vogël aditive me një numër të fundëm objektesh dhe M një $\mathcal{C}$-modul. Atëherë, $Hom_{\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}}(M, \bullet)$ është i vazhdueshëm në zero vetëm kur M është me gjenerim të fundëm.*

Vërtetim. Fillimisht vërejmë që $\bigoplus\limits_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{C}(c, \bullet)$ është i vazhdueshëm në zero. Vërtet, në qoftë se M_i për $i \in I$ është një familje e drejtuar $\mathcal{C}$-modulesh e tillë që $\underrightarrow{Lim}_I M_i = 0$, atëherë

$$\begin{aligned}
\underrightarrow{Lim}_I \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}}(\bigoplus_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{C}(c, \bullet), M_i) &\cong \underrightarrow{Lim}_I \prod_{c\in\mathcal{C}} M_i(c) && \text{nga Lema Yoneda} \\
&\cong \prod_{c\in\mathcal{C}} \underrightarrow{Lim}_I M_i(c) && \text{nga teorema 1.2.10} \\
&= 0 && \text{nga supozimi.}
\end{aligned}$$

Së dyti, në qoftë se F është i lirë dhe me gjenerim të fundëm, domethënë në qoftë se $F = \bigoplus\limits_{x\in X} \bigoplus\limits_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{C}(c, \bullet)$ ku X është i fundëm, atëherë nga më sipër rrjedh lehtë që $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}}(F, \bullet)$ është i vazhdueshëm në zero. Le të jetë tani M një $\mathcal{C}$-module me gjenerim të fundëm, domethënë, ekziston $F = \bigoplus\limits_{x\in X} \bigoplus\limits_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{C}(c, \bullet)$ ku X i fundëm dhe një epimorfizëm $\tau : F \to M$ në $\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}$. Ekziston një varg ekzakt i induktuar

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}}(M, \bullet) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}}(F, \bullet)$$

i cili, duke marrë parasysh çfarë thamë më parë për F, implikon që M është i vazhdueshëm në zero.
Anasjellas, supozojmë që M është i vazhdueshëm në zero dhe duam të tregojmë që është me gjenerim të fundëm. Le të jetë M_λ, $\lambda \in \Lambda$ familja e të gjithë nënmoduleve me gjenerim të fundëm të tij. Kjo është jo boshe meqënëse moduli zero 0 është me gjenerim të fundëm. Kontrollohet lehtë që familja e moduleve herës M/M_λ është një familje e filtruar $\mathcal{C}$-modulesh lidhur me morfizmat evidentë $\alpha_{\lambda,\mu} : M/M_\lambda \to M/M_\mu$ sa herë që $M_\lambda \leq M_\mu$, dhe që $\underrightarrow{Lim}_\Lambda M/M_\lambda = 0$. Për rrjedhojë, nga supozimi,

$$\underrightarrow{Lim}_\Lambda \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}}(M, M/M_\lambda) = 0. \tag{3.1}$$

Meqënëse

$$\underrightarrow{Lim}_\Lambda \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}}(M, M/M_\lambda) \cong [\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}}(M, M/M_\lambda)]/K$$

ku K është nëngrupi i përftuar nga $f_\lambda - f_\mu$ ku $f_\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}}(M, M/M_\mu)$ dhe $f_\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}}(M, M/M_\lambda)$ dhe ekziston $\alpha_{\lambda,\mu} : M/M_\lambda \to M/M_\mu$ e tillë që $f_\mu = \alpha_{\lambda,\mu} f_\lambda$. Nga (3.1) $id_M \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}}(M, M/0)$ duhet të jetë element i K, prandaj ai duhet të jetë i barabartë me një shumë të fundme të trajtës

$$id_M = \sum_{j\in J} z_j (f_{\lambda_j} - f_{\mu_j}), \text{ ku } z_j \in \mathbb{Z}. \tag{3.2}$$

Meqënëse një nga f_{μ_j} ose f_{λ_j} duhet të jetë id_M, supozojmë që id_M është ndonjë f_λ, dhe më pas korrespondduesi f_μ i termit $id_M - f_\mu$ është morfizmi kanonik $M \to M/M_\mu$.

Në qoftë se $M_\mu = M$, atëherë kemi mbaruar punë, M është me gjenerim të fundëm. Atëherë supozojmë që $M_\mu \neq M$. Por f_μ do të thjeshtohet në (3.2), për rrjedhim ekziston një term $f_\mu - f_{\mu_1}$ në (3.2) ku $M_{\mu_1} \neq M_\mu$. Në qoftë se $M_{\mu_1} = M$, vërtetimi mbaron, përndryshe mund të supozojmë që $M_{\mu_1} \neq M$. Pas thjeshtimit të f_μ përfotjmë termin $id_M - f_{\mu_1}$ ku $M_{\mu_1} \neq M$ dhe përsërisim proçesin. Meqënëse f_{μ_1} ka për tu thjeshtuar, ekziston një term $f_{\mu_1} - f_{\mu_2}$ ku $M_{\mu_1} \neq M_{\mu_2}$. Në qoftë se $M_{\mu_2} = M$, mbaron, përndryshe supozojmë që $M_{\mu_2} \neq M$ dhe pas thjeshtimit të f_{μ_1} përftojmë termin $id_M - f_{\mu_2}$ ku $M_{\mu_2} \neq M$. Duke përsëritur proçesin për një numër të fundëm hapash, supozojmë që ekziston $s \geq 3$, i tillë që $id_M - f_{\mu_{s-1}}$ është paraqitur në (3.2), $M_{\mu_{s-1}} \neq M$ dhe ekziston një term jo-zero në (3.2) i trajtës $f_{\mu_{s-1}} - f_{\mu_s}$ ku $M_{\mu_{s-1}} \neq M_{\mu_s}$. Pas thjeshtimit të $f_{\mu_{s-1}}$ përftojmë termin $id_M - f_{\mu_s}$. Meqënëse J është e fundme dhe ky proçes nuk mund të zgjasë përgjithmonë, mund të supozojmë që $f_{\mu_s} = 0$ që do të thotë se ose $M_{\mu_s} = M$, ose $M_s \neq M$ dhe f_{μ_s} është zero i $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}^\mathcal{C}}(M, M/M_{\mu_s})$. Ekzistenca e termit $f_{\mu_{s-1}} - f_{\mu_s}$ në (3.2), fakti që $f_{\mu_{s-1}}$ dhe f_{μ_s} janë morfizma kanonikë, dhe supozimi për $M_{\mu_{s-1}}$ dhe M_{μ_s}, sjellin që supozimi ynë i dytë nuk është i mundur. Kjo përfundon vërtetimin. ■

Teoremë 3.2.2 *Le të jetë $\mathcal{C}$ një kategori e vogël aditive me një numër të fundëm objektesh, M një $\mathcal{C}$-modul dhe $n \geq 0$. Atëherë pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

(i) $Ext^k_\mathcal{C}(M, \bullet)$ është i vazhdueshëm në zero për çdo $k \leq n$;

(ii) M është i tipit FP_n.

Vërtetim. Do të bëjmë një vërtetim induktiv sipas n. Në qoftë se $n = 0$, atëherë nga lema 3.2.1, M është me përftim të fundëm atëherë dhe vetëm atëherë kur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}^\mathcal{C}}(M, \bullet)$ është i vazhdueshëm në zero. Por kjo është njësoj si të thuash që M është e tipit FP_0 vetëm kur $\mathrm{Ext}^k_\mathcal{C}(M, \bullet)$ është i vazhdueshëm në zero. Tani supozojmë që (i) dhe (ii) janë ekuivalente për çdo $s \leq n-1$ dhe duam të tregojmë ekuivalencën për n. Për këtë marrim një rezolucion projektiv të tipit të fundëm të M:

$$P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

dhe duam të tregojmë që bërthama L e $P_{n-1} \to P_{n-2}$ është me përftim të fundëm vetëm kur $\mathrm{Ext}^n_\mathcal{C}(M, \bullet)$ është i vazhdueshëm në zero. Atëherë në sajë të teoremës 3.1.1, Rrjedhimit 10.3. II dhe Pohimit 10.4. II të [21], ne mund të zgjedhim një rezolucion projektiv më të gjatë të M:

$$\cdots \to P_{n+1} \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0,$$

ku P_n mund të zgjidhet me përftim të fundëm vetëm në qoftë se L është i tillë. Duke marrë parasysh vargun ekzakt

$$P_{n+1} \to P_n \to L \to 0,$$

përftojmë vargun ekzakt

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}^\mathcal{C}}(L, \bullet) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}^\mathcal{C}}(P_n, \bullet) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}^\mathcal{C}}(P_{n+1}, \bullet),$$

dhe si rrjedhim kemi vargun tjetër ekzakt

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}}(P_{n-1}, \bullet) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}}(L, \bullet) \to \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}}(M, \bullet) \to 0.$$

Funktori në të majtë është i vazhdueshëm në zero meqënëse P_{n-1} është me përftim të fundëm, kështu $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}}(M, \bullet)$ ka për të qënë i vazhdueshëm në zero vetëm kur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}^{\mathcal{C}}}(L, \bullet)$ është i tillë, domethënë vetëm kur L është me përftim të fundëm, siç e dëshironim. ∎

3.3 Një zbatim për monoidët inversivë

Në qoftë se S është një gjysmëgrup inversiv, atëherë një S-*modul* është një semilatisë A grupesh abelianë së bashku me një pasqyrim $A \times S \to A$, të shënuar me $(a, x) \mapsto ax$, dhe një izomorfizëm $E(S) \to E(A)$, të shënuar me $e \mapsto 0_e$ semilatisash të tillë që

(i) $(a_1 + a_2)x = a_1x + a_2x$, $a_1, a_2 \in A, x \in S$;

(ii) $(ax_1)x_2 = a(x_1x_2)$, $a \in A, x_1, x_2 \in S$;

(iii) $ae = a + 0_e$, $a \in A, e \in E(S)$;

(iv) $0_ex = 0_{x^{-1}ex}$.

Vërejmë që ekzistojnë S-module në sensin e zakonshëm që nuk janë S-module si më sipër. Për shembull, mund të marrim A grupin e lirë abelian $\mathbb{Z}S$ me bazë S, atëherë është e qartë që $\mathbb{Z}S$ është një S-modul i djathtë në sensin e zakonshëm. Megjithatë ai nuk është një S-modul si në përkufizimin e mësipërm sepse nuk ka asnjë izomorfizëm ndërmjet semilatisave respektive $E(\mathbb{Z}S) = \{0\}$ dhe $E(S)$ në përgjithësi meqënëse $E(S)$ ka më shumë se një element përveç rastit kur S është grup.
Ndërkaq ne mund të bëjmë teori homologjie duke përdorur këto module në vend të moduleve të zakonshëm madje mund të marrin rezultate interesante si në [36] dhe në [43]. Lausch tregoi në rrjedhimin e tij 5.6 të [36] që ekziston një funktor kohomologjie H_S nga kategoria $\mathrm{Mod}(S)$ e S-moduleve në atë të grupeve abelianë e cila kënaq disa kondita dhe e përdori këtë kohomologji për të klasifikuar zgjerimet e gjysmëgrupeve inversivë. Loganathan tregoi në lemën 2.6 të [43] që kategoria $\mathrm{Mod}(S)$ e S-moduleve është izomorfe me kategorinë $\mathrm{Mod}(D(S))$ të funktorëve me domain $D(S)$ dhe vlera grupe abelianë. Objektet e $D(S)$ janë idempotentët e S dhe morfizmat $e \to f$ janë treshet (e, x, x') ku x' është i anasjelli i x dhe $e \geq xx'$, $x'x = f$. Kompozimi i morfizmave jepet me anën e barazimit $(e, x, x')(x'x, y, y') = (e, xy, y'x')$. Izomorfizmi

$$F : \mathrm{Mod}(S) \to \mathrm{Mod}(D(S)) \tag{3.3}$$

i lemës 2.6 çon çdo S-modul A tek $D(S)$-moduli FA i cili lidh çdo objekt $e \in D(S)$ me grupin abelian $A_e = \{a \in A | a - a = 0_e\}$. Më tej në lemën 2.8 ai provoi ekuivalencën e kategorive $D(S) \simeq \mathcal{D}(S)$ ku $\mathcal{D}(S)$ është kategoria e pjestimit që i shoqërohet S e përcaktuar në [40]. Nga kjo mund të përftohet lehtë ekuivalenca e kategorive të moduleve

$$\mathrm{Mod}(D(S)) \simeq \mathrm{Mod}(\mathcal{D}(S)). \tag{3.4}$$

Loganathan përdori izomorfizmin e lemës 2.6 për të vërtetuar në teoremën e tij 2.7 që për çdo S-modul (në sensin e Lausch), ekziston një izomorfizëm kanonik

$$H^n(S, A) = H^n(D(S), F(A)). \tag{3.5}$$

Një tjetër rezultat i rëndësishëm i [43] lidh kohomologjinë e një gjysmëgrupi inversiv S me atë të grupit të imazhit maksimal të tij G. Kujtojmë që $G = S/\sigma$ ku

$$\sigma = \{(x, y) \in S \times S | xe = ye \text{ për ndonjë } e \in E(S)\}.$$

Ai provoi në pohimin 3.6 që për çdo G-modul në sensin e zakonshëm ka një izomorfizëm kanonik

$$H^n(G, A) = H^n(D(S), D(\pi)^* A), \tag{3.6}$$

ku $D(\pi)^* : \mathrm{Mod}(G) \to \mathrm{Mod}(D(S))$ është funktori i induktuar nga projeksioni natyral $\pi : S \to G$. Nga (3.5) dhe (3.6) dhe fakti që F është izomorfizëm, mund të përftohet lehtë që

$$H^n(S, F^{-1}D(\pi)^* A) = H^n(G, A). \tag{3.7}$$

Në këtë mënyrë kemi një izomorfizëm ndërmjet kohomologjisë së n-të të G me koefiçientë nga ndonjë modul A (në sensin e zakonshëm) dhe kohomologjisë së S me koefiçientë në $F^{-1}D(\pi)^* A$ që siç shihet lehtë, është një modul në sensin e Lausch.

Pohim 3.3.1 *Le të jetë S një monoid inversiv me një numër të fundëm idempotentësh. Në qoftë se kategoria e pjestimit $D(S)$ është e tipit FP_n për ndonjë $n \geq 0$, atëherë monoidi S është i të njëjtit tip.*

Vërtetim. Të qënit FP_n për $D(S)$ nënkupton që funktori konstant $\Delta\mathbb{Z}$ në $\mathbb{Z}$ është FP_n si një $D(S)$-modul. Nga teorema 3.2.2 kjo do të thotë që $\mathrm{Ext}^k_{D(S)}(\Delta\mathbb{Z}, \bullet)$ është i vazhdueshëm në zero për çdo $k \leq n$. Për të treguar që G është i tipit FP_n, duke përdorur kriterin Bieri-Eckmann për modulet (teorema 7.10 e [30]), ne duhet të tregojmë që në qoftë se M_i, $i \in I$ është një familje e drejtuar G-modulesh kolimiti i të cilave është zero, atëherë $\underrightarrow{Lim}_I Ext^k_G(\mathbb{Z}, M_i) = 0$ për çdo $0 \leq k \leq n$. Vërtet, nga (3.6) kemi izomorfizmin e mëposhtëm

$$\underrightarrow{Lim}_I Ext^k_G(\mathbb{Z}, M_i) \cong \underrightarrow{Lim}_I Ext^k_{D(S)}(\Delta\mathbb{Z}, D(\pi)^* M_i).$$

Por për çdo objekt $e \in D(S)$,

$$\left(\underrightarrow{Lim}_I D(\pi)^* M_i\right)(e) = \left(\bigoplus_{i \in I} D(\pi)^* M_i(e)\right)/K_e,$$

ku K_e është nëngrupi i përftuar nga elementët e trajtës $x - D(\pi)^* \alpha_{i,j}(x)$, ku $\alpha_{i,j} : M_i \to M_j$ morfizëm çfarëdo në I, dhe $x \in D(\pi)^* M_i$. Meqënëse $\underrightarrow{Lim}_I M_i = 0$, është e lehtë tani të tregohet se grupi herës i të fundit është zero, për rrjedhojë i tillë është dhe $\underrightarrow{Lim}_I D(\pi)^* M_i$. Në fund, kjo së bashku me supozimin që $D(S)$ është FP_n, implikojnë që $\underrightarrow{Lim}_I Ext^k_{D(S)}(\Delta\mathbb{Z}, D(\pi)^* M_i) = 0$, dhe për pasojë $\underrightarrow{Lim}_I Ext^k_G(\mathbb{Z}, M_i) = 0$ për çdo $0 \leq k \leq n$ që tregon se G është i tipit FP_n. Mirëpo nga kushti S ka një idempotent minimal, rrjedhimisht mund të aplikohet ideja e vërtetimit të së anasjellës të teoremës 2.3.1 prej nga marrim që S është e tipit FP_n. ■

Kapitulli 4

Kohomologjia e gjysmëgrupeve inversivë me koefiçientë pretufat

4.1 Njohuri hyrëse

Për të përcaktuar kohomologjinë e një gjysmëgrupi inversiv S sipas Renault dhënë tek [55] me koefiçientë një S-pretufë, fillimisht kujtojmë që një pretufë me fillim një semilatisë E dhe fund në **Ab** do të quajmë çdo objekt të kategorisë $\mathbf{Ab}^E$ ku semilatisa E kosiderohet si pre-renditje. Më tej po japim disa kuptime dhe rezultate pa vërtetim nga [39] të cilat do të na nevojiten në paragrafin pasardhës. Në qoftë se X është një pretufë me fillim në E dhe fund në **Ab**, atëherë do të shënojmë përsëri me X bashkësinë $\sqcup_{e\in E}X(e)$ dhe përcaktojmë $\pi : X \to E$ të tillë që $\pi(a) = e$ vetëm kur $a \in X(e)$. Bashkësia X do të quhet **Ab**-*tufa e përcaktuar nga pretufa* X. Në qoftë se tani S është një gjysmëgrup inversiv dhe $\pi : X \to E(S)$ një **Ab**-tufë mbi $E(S)$, do të themi që S vepron mbi **Ab**-tufën X nga e djathta në qoftë se ekziston një funksion $X \times S \to X$, vlerat e të cilit po i shënojmë me $(x, s) \mapsto x \circ s$, i cili kënaq tri aksiomat e mëposhtme:

- (Act 1) Në qoftë se $a \in X(e)$, atëherë $a \circ e = a$.
- (Act 2) $(a \circ s) \circ t = a \circ (st)$.
- (Act 3) Në qoftë se $a \in X(e)$, atëherë $a \circ s \in X(s^{-1}es)$, për më tepër, pasqyrimi $a \mapsto a \circ s$ është homomorfizëm në **Ab**.

Le të jetë tani një pretufë X mbi semilatisën E. Do të shënojmë me $\rho^e_f : X(e) \to X(f)$ të ashtëquajturit *pasqyrime ngushtues* që janë në fakt homomorfizmat $X(\nu_{e,f})$ për çdo shigjetë $\nu_{e,f} : e \to f$ në E. Ka vend kjo teoremë.

Teoremë 4.1.1 *(Teorema 5.6 [39]) Le të jetë S një gjysmëgrup inversiv. Atëherë çdo veprim nga e djathta i S-së mbi një pretufë mbi $E(S)$ me vlera në* **Ab** *indukton një veprim nga e djathta të S-së mbi një* **Ab**-*tufë mbi $E(S)$, dhe anasjellas.*

Po japim këtu vetëm idenë e vërtetimit. Shënojmë $X = \sqcup_{e\in E}X(e)$ dhe përcaktojmë $\pi : X \to E$ të tillë që $\pi(a) = e$ vetëm kur $a \in X(e)$. Tani përcaktojmë një pasqyrim

$X \times S \to X$ të tillë që për çdo $a \in X(e)$

$$a \circ s = \rho^e_{ess^{-1}}(a) \cdot (es).$$

Tregohet lehtësisht që kënaqen aksiomat (Act 1)-(Act 3) dhe që gjithashtu $a \circ s = a \cdot s$ ku $a \in X(ss^{-1})$. Kjo do të thotë se $\circ$ zgjeron veprimin $\cdot$ mbi pretufën.
Anasjellas, po supozojmë se kemi të dhënë një **Ab**-tufë $X = \sqcup_{e \in E} X(e)$ mbi $E(S)$ Për çdo $e \geq f$ përcaktojmë $\rho^e_f : X(e) \to X(f)$ të tillë që $\rho^e_f(a) = a \circ f$. Duke marrë parsysh (Act 1)-(Act 3) formohet një pretufë X mbi $E(S)$. Së fundi, përcaktojmë një pasqyrim $X \times S \to X$ të pjesshëm si vijon

$$a \cdot s = \begin{cases} a \circ s & \text{në qoftë se} \quad a \in X(e) \text{ dhe } ss^{-1} = e \\ \text{i papërcaktuar} & \text{përndryshe} \end{cases}$$

Mund të verifikohet lehtë që ky përcakton një veprim nga e djathta të S mbi pretufën X.
Më tej do të shpjegojmë se çfarë është një simetri i pjesshme e një pretufe. Le të jetë dhënë $\rho^e_f : X(e) \to X(f)$ një pretufë mbi E me vlera në **Ab**. Shënojmë

$$X|e = \bigsqcup_{f \leq e} X(f),$$

dhe e quajmë $X|e$ *nënobjekt* të X-it. Një *simetri e pjesshme* e X-it nga $X|e$ ne $X|f$ është një çift (θ, Θ) ku:

- $\theta : e^{\downarrow} \to f^{\downarrow}$ është një izomorfizëm që ruan renditjen (me argumentin e shkruar majtas);
- Θ është familja e izomorfizmave $\{\Theta_i : i \leq e\}$ në **Ab** të përcaktuara si vijon $\Theta_i : X(i) \to X(i\theta)$ (me argumentin e shkruar majtas);
- të tilla që për çdo $i' \leq i \leq e$ kemi të vërteta barazimet

  $$(\rho^i_{i'}(a))\Theta_{i'} = \rho^{i\theta}_{i'\theta}(a\Theta_i),$$

  ose e thënë ndryshe, që diagrami

  $$\begin{tikzcd} X(i) \arrow[r, "\Theta_i"] \arrow[d, "\rho^i_{i'}"'] & X(i\theta) \arrow[d, "\rho^{i\theta}_{i'\theta}"] \\ X(i') \arrow[r, "\Theta'_i"'] & X(i'\theta) \end{tikzcd}$$

  të jetë ndërrimtar.

Po shënojmë me $\mathcal{T}(X)$ bashkësinë e gjithë simetrive të pjesshme të X. Në qoftë se (θ, Θ) dhe (ϕ, Φ) janë dy simetri të pjesshme, ateherë mund ti kompozojmë ato për të përftuar çiftin $(\theta\phi, \Theta\Phi)$, ku $\theta\phi$ është kompozimi i izomorfizmave të pjesshëm të E-së, dhe për çdo i në fillimin e $\theta\phi$, kemi përcaktuar $(\Theta\Phi)_i = \Theta_i \Phi_{i\theta}$. Provohet lehtë që $\mathcal{T}(X)$ është një gjysmëgrup inversiv të cilin do ta quajmë *gjysmëgrupi inversiv i* *simetrive të pjesshme të pretufës* X. Le të jetë S një gjysmëgrup inversiv me semilatisë $E(S) = E$. Le të $\alpha : S \to \mathcal{T}(X)$ një homomorfizmëm gjysmëgrupesh inversivë, ku $s\alpha = (\theta^s, \Theta^s)$ të tillë që për çdo $e \in E$ pasqyrimi θ^e është identiku mbi $e^{\downarrow}$ dhe Θ^e_i është identiku mbi $X(i)$ për çdo $i \leq e$. Këtej e tutje do ta quajmë α *riparaqitje e* S *me anën e simetrive të pjesshme të* X. Vërejmë se θ^s e përcaktuar më lart është një izomorfizëm që ruan renditjen nga $(ss^{-1})^{\downarrow}$ tek $(s^{-1}s)^{\downarrow}$ dhe se θ^s pasqyron i tek $s^{-1}is$. Teorema e mëposhtme tregon se çdo riparaqitje $\alpha : S \to \mathcal{T}(X)$ përcakton një veprim të S nga e djathta mbi X, dhe anasjellas.

Pohim 4.1.2 *(Pohimi 5.7 [39]) Le të jetë dhënë një riparaqitje* $\alpha : S \to \mathcal{T}(X)$. *Përcaktojmë një pasqyrim* $X \times S \to X$ *të shënuar me* $(a, s) \mapsto a \bullet s$ *ku* $a \bullet s = a\Theta^s_e$ *sa herë që* $a \in X(e)$ *dhe* $e \leq ss^{-1}$. *Pesë aksiomat e mëposhtme kanë vend.*

(Rep 1) *Në qoftë se* $a \in X(e)$, *atëherë* $a \bullet s$ *është përcaktuar vetëm kur* $e \leq ss^{-1}$.

(Rep 2) *Në qoftë se* $a \in X(e)$, *atëherë* $a \bullet e = e$.

(Rep 3) *Në qoftë se* $a \in X(e)$ *dhe* $a \bullet s$ *është përcaktuar, atëherë* $a \bullet s \in X(s^{-1}es)$; *për më tepër pasqyrimi* $X(e) \to X(s^{-1}es)$ *i tillë që* $a \mapsto a \bullet s$ *është homomorfizëm në* **Ab**.

(Rep 4) $(a \bullet s) \bullet t$ *është përcaktuar vetëm kur* $a \bullet (st)$ *është përcaktuar rast në të cilin ato përputhen.*

(Rep 5) *Le të jenë* $i \leq j \leq ss^{-1}$. *Atëherë në qoftë se* $a \in X(j)$ *kemi të vërtetë që*

$$\rho^{s^{-1}js}_{s^{-1}is}(a \bullet s) = \rho^j_i(a) \bullet s.$$

Anasjellas, në qoftë se është dhënë një funksion i pjesshëm $X \times S \to X$ *që kënaq pesë aksiomat e mësipërme, atëherë mund të përcaktohet një riparaqitje* $\alpha : S \to \mathcal{T}(X)$ *e tillë që* $s\alpha = (\theta^s, \Theta^s)$ *ku* $a\Theta^s_i = a \bullet s$ *për çdo* $a \in X(i)$ *dhe* $i \leq ss^{-1}$.

Në vazhdim po japim kuptimin e riparaqitjeve të një gjysmëgrupi inversiv me anën e simetrive të pjesshme mbi një **Ab**-tufë X. Le të jetë një **Ab**-tufë, $\pi : X \to E$ dhe $X(e) = \pi^{-1}(e)$. Pozojmë

$$X|e = \bigsqcup_{f \leq e} X(f).$$

Le të jetë S një gjysmëgrup inversiv me semilatisë E. Një *riparaqitje e* S *me anën e simetrive të pjesshme të* **Ab**-*tufës* X, është një homomorfizëm $\beta : S \to I(X)$ (këtu $I(X)$ është monoidi simetrik inversiv i bashkësisë X) i cili kënaq konditat e mëposhtme:

- (Bund 1) Fillimi i $s\beta$ është $X|ss^{-1}$ dhe fundi $X|s^{-1}s$.
- (Bund 2) Në qoftë se $e \leq ss^{-1}$, atëherë $s\beta$ indukton një morfizëm nga $X(e)$ në $X(s^{-1}es)$

Nëse është dhënë një riparaqitje $\beta : S \to I(X)$ si më sipër, atëherë mund të përcaktohet një pretufë duke pozuar $\rho_e^f : X(e) \to X(f)$ të tillë që $\rho_e^f = (a)(e\beta)$ ku $a \in X(f)$. Ky përcaktim na lejon të japim një veprim të djathtë të S-së mbi X duke pozuar $a \circ s = \rho^e_{ess^{-1}}(a)(s\beta)$. Anasjellas, në qoftë se kemi një veprim të S nga e djathta mbi **Ab**-tufën X, atëherë përcaktojmë $\beta : S \to I(X)$ të tillë që $s\beta : X|ss^{-1} \to X|s^{-1}s$ ku $(a)(s\beta) = a \circ s$. Tregohet se β është një riparaqitje e S me anën e simetrive të pjesshme të **Ab**-tufës X. Teorema e mëposhtme ekuivalenton katër kuptime të dhëna deri tani.

Teoremë 4.1.3 *(Teorema 5.8 [39]) Le të jetë S një gjysmëgrup inversiv. Kuptimet e mëposhtme janë ekuivalente.*

(i) Një veprim i S nga e djathta mbi një pretufë X me vlera në **Ab**.

(ii) Një riparaqitje e S me anën e simetrive të pjesshme të pretufës X me vlera në **Ab**.

(iii) Një veprim i S nga e djathta mbi një **Ab***-tufë X.*

(iv) Një riparaqitje e S me anën e simetrive të pjesshme të **Ab***-tufës X*

Me interes është edhe shembulli i mëposhtëm (Shembulli 3 [39]). Le të jetë S një gjysmëgrup inversiv që vepron nga e djathta mbi një pretufë X me vlera në **Ab**. Për çdo $e \in E$, $X(e)$ është një grup abelian me njësh 1_e. Pozojmë $X = \bigsqcup_{e\in E(S)} X(e)$ dhe përcaktojmë

$$a \otimes b = \rho^e_{ef}(a)\rho^f_{ef}(b)$$

ku $a \in X(e)$ dhe $b \in X(f)$. Në këtë mënyrë $(X, \otimes)$ shndërrohet në një gjysmëgrup të Klifordit me semilatisë idempotentësh $\{1_e : e \in E(S)\}$ izomorfe me $E(S)$. Gjithashtu mund të përcaktojmë plotësisht një pasqyrim $X \times S \to X$ si vijon

$$a \circ s = \rho^e_{ess^{-1}}(a) \cdot (es).$$

Mund të verifikohet lehtësisht se plotësohen kushtet e mëposhtme:

- Ekziston një izomorfizëm i $E(S)$ tek $E(X)$ i dhënë nga $e \mapsto 1_e$.
- $(a \otimes b) \circ s = (a \circ s) \otimes (b \circ s)$.
- $a \circ (st) = (a \circ s) \circ t$.
- $a \circ e = a \otimes 1_e$.
- $1_e \circ s = 1_{s^{-1}es}$.

Këto nuk janë gjë tjetër veçse aksiomat e një S-moduli në sensin e Lausch-it.
Së fundi po japim përkufizimin e kohomologjisë së një gjysmëgrupi inversiv me koeficientë pretufat. Për një gjysmëgrup inversiv të dhënë S, shënojmë me S^n produktin kartezian të S-së n herë me veten kur $n \in \mathbb{N}$, dhe S^0 bashkësinë e idempotentëve të

S-së. Përcaktojmë një S-pretufë (X, α) si një **Ab**-pretufë X së bashku me një riparaqitje të S me anën e simetrive të pjesshme të X, që sikurse e thamë më lart është një homomorfizëm $\alpha : S \to \mathcal{T}(X)$. Për një S-pretufë të dhënë (X, α) grupesh abelianë ne mund të formojmë zinxhirin e komplekseve të mëposhtëm. Një n-zinxhir është një funksion $f : S^n \to X$ i cili kënaq konditat e mëposhtme:

(i) $f(s_0, s_1, ..., s_{n-1}) \in X(r(s_0 s_1 ... s_{n-1}))$ ku $r(s_0 s_1 ... s_{n-1}) = (s_0 s_1 ... s_{n-1})(s_0 s_1 ... s_{n-1})^{-1}$;

(ii) f është kompatibël me pasqyrimin ngushtues, domethënë në qoftë se $u = r(s_0 s_1 ... s_{n-1})$ dhe $v = r(t_0 t_1 ... t_{n-1})$ ku $t_i = e_i s_i$ për ndonjë idempotent e_i, atëherë $f(t_0, t_1, ..., t_{n-1}) = X(\gamma)(f(s_0, s_1, ..., s_{n-1}))$ ku γ është shigjetë në E nga u në v; dhe

(iii) për $n > 0$, $f(s_0, ..., s_i, ... s_{n-1})$ është idempotent sa herë që s_i është idempotent.

Bashkësia $C^n(S, X)$ e n-zinxhirëve është grup abelian lidhur me mbledhjen pikësore. Vargu

$$0 \longrightarrow C^0(S,X) \longrightarrow C^1(S,X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^n(S,X) \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1}(S,X) \longrightarrow \cdots$$

ku

$$\delta^0(f(s)) = \alpha(s) f \circ d(s) - f \circ r(s) \text{ dhe}$$

$$\begin{aligned} \delta^n f(s_0, ..., s_n) &= \alpha(s_0) f(s_1, ..., s_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(s_0, ... s_{i-1} s_i, ..., s_n) \\ &+ (-1)^{n+1} f(s_0, ..., s_{n-1}) \end{aligned}$$

është një zinxhir kompleks. Shënojmë me $Z^n(S, X)$ dhe $B^n(S, X)$ grupet e n-kocikleve dhe atë të n-kokufijve. Grupi i n-të i kohomologjisë $Z^n(S, X)/B^n(S, X)$ do të shënohet me $H^n(S, X)$.

4.2 S-pretufa si kategori funktorësh

Në këtë paragraf do të tregojmë që për çdo gjysmëgrup inversiv S, S-pretufa formojnë një kategori dhe që kjo kategori është izomorfe me kategorinë e funktorëve $\mathbf{Ab}^{D(S)}$ ku $D(S)$ ka për objekte të gjithë idempotentët e S dhe për morfizma $e \to f$ treshet (e, x, x') ku x' është inversi i x dhe $e \geq xx'$, $x'x = f$. Rezultatet e teoremave 1.1 dhe 1.2 të [35] sigurojnë se ka vetëm një funktor kohomologjie me burim një kategori abeliane dhe me fund **Ab**, për rrjedhojë kohomologjia e Lausch e përcaktuar në $\mathbf{Ab}^{D(S)}$ do të përputhet me atë të Renault të përcaktuar në S-pretufa.
Le të jetë S një gjysmëgrup inversiv, X një pretufë grupesh abelianë mbi $E(S)$ dhe $\alpha : S \to \mathcal{T}(X)$ riparaqitje e S me anë të simetrive të pjesshme të X.

Lemë 4.2.1 *Riparaqitja α indukton një S-modul në sensin e Lausch.*

Vërtetim. Teorema 5.8 ($(i) \Leftrightarrow (ii)$) e [39] pohon që α mund të konsiderohet si një veprim i S në të djathtë të pretufës X me vlera në **Ab**. Atëherë siç është treguar në shembullin 3, f. 33 të [39] ne mund të ndërtojmë një gjysmëgrup të Klifordit $(\mathbf{X}, \otimes)$ me semilatisë idempotentësh $E(S)$ dhe me një veprim të djathtë të S mbi $\mathbf{X}$ të dhënë nga

$$a \circ s = \alpha(es)\rho^{e}_{ess^{-1}}(a).$$

i cili kënaq të gjitha vetitë e një S-moduli. ■

Le të jetë S një gjysmëgrup inversiv i fiksuar, ndërtojmë kategorinë S-*pretufa* me objekte riparaqitjet e S me anë të simetrive të pjesshme të pretufave të grupeve abelianë mbi $E(S)$ dhe morfizmat ndërmjet dy riparaqitjeve $\alpha : S \to \mathcal{T}(X)$ dhe $\beta : S \to \mathcal{T}(Y)$ janë morfizma S-modulesh $\tau : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ ndërmjet S-moduleve korrespondues të Lemës 4.2.1 të tillë që $\forall s \in S$,

$$\tau(\alpha(s)(x)) = \beta(s)(\tau(x)). \tag{4.1}$$

Këtu $\alpha(s)$ është një nga komponentët e familjes korresponduese dhe $x \in X(e)$ ku $X(e)$ është fillimi i atij komponenti $\alpha(s)$. Do të tregojmë që S-pretufa është në të vërtetë një kategori. E vetmja gjë që kemi për të kontrolluar është që në qoftë se $\alpha : S \to \mathcal{T}(X)$, $\beta : S \to \mathcal{T}(Y)$ dhe $\gamma : S \to \mathcal{T}(Z)$ janë objekte nga S-pretufa dhe $\tau_1 : \alpha \to \beta$, $\tau_2 : \beta \to \gamma$ janë morfizma, atëherë për çdo $s \in S$ dhe x nga fillimi i ndonjë komponenti të $\alpha(s)$ kemi

$$\tau_2\tau_1(\alpha(s)(x)) = \gamma(s)(\tau_2\tau_1(x)). \tag{4.2}$$

Nga përkufizimi i τ_1 dhe τ_2 kemi

$$\tau_1(\alpha(s)(x)) = \beta(s)(\tau_1(x)) \tag{4.3}$$

dhe

$$\tau_2(\beta(s)(y)) = \gamma(s)(\tau_2(y)). \tag{4.4}$$

Duke zëvendësuar në (4.4) y me $\tau_1(x)$ përftojmë

$$\tau_2(\beta(s)(\tau_1(x))) = \gamma(s)(\tau_2\tau_1(x)). \tag{4.5}$$

Tani (4.3) dhe (4.5) implikojnë (4.2).

Për një gjysmëgrup inversiv të dhënë S me semilaticë idempotentësh E përcaktojmë një kategori $\mathcal{P}(S)$ me objekte idempotentët E të S dhe morfizmat $e \to f$ janë çifte $(e, s) \in E \times S$ të tilla që $f = s^{-1}es$. Kompozimi jepet nga $(s^{-1}es, t)(e, s) = (e, st)$. Le të jetë $P(S)$ herësi i $\mathcal{P}(S)$ sipas kongruencës mbi hom-setet e $\mathcal{P}(S)$ të gjeneruar nga çiftet

$$(e, s) \sim (e, es) \text{ dhe } (e, e) \sim id_e.$$

Morfizmat e $P(S)$ do ti shënojmë me të njëjtin simbol që shënohen përfaqësuesit e tyre në $\mathcal{P}(S)$. Vërejmë që semilatisa $E(S)$ është nënkategori e $P(S)$.

Dy lemat që do të paraqesim më poshtë tregojnë dy veti të funktorëve nga $\mathbf{Ab}^{P(S)}$.

Lemë 4.2.2 *Çdo $X \in \mathbf{Ab}^{P(S)}$ indukton një veprim të djathtë të S mbi $\boldsymbol{Ab}$-tufën $\mathbf{X} = \sqcup_{e \in E} X(e)$.*

Vërtetim. Përcaktojmë një funksion $\circ : \mathbf{X} \times S \to \mathbf{X}$ të tillë që

$$a \circ s = X(e,s)(a) \text{ për çdo } a \in X(e).$$

Le të kontrollojmë tri vetitë e veprimit të djathtë të S mbi $\mathbf{X}$.
(Act 3) Në qoftë se $a \in X(e)$, atëherë nga përkufizimi $a \circ s \in X(s^{-1}es)$ dhe pasqyrimi $a \mapsto a \circ s$ është morfizëm në **Ab** meqënëse $X(e,s)$ është i tillë.
(Act 1) Në qoftë se $a \in X(e)$, atëherë $a \circ e = X(e,e)(a) = id_{X(e)}(a) = a$.
(Act 2) $(a \circ s) \circ t = X(s^{-1}es, t)X(e,s)(a) = X(e, st)(a) = a \circ (st)$. ∎

Lemë 4.2.3 *Çdo $X \in \mathbf{Ab}^{P(S)}$ indukton një S-modul $\mathbf{X} = \sqcup_{e \in E} X|_E(e)$ ku $X|_E$ është ngushtimi i X në $E(S)$.*

Vërtetim. Do të tregojmë që gjysmëgrupi i Klifordit $\mathbf{X}$ ka strukturën e një S-moduli. Nga $(iii) \Rightarrow (ii)$ të Teoremës 5.8 tek [39] kemi që **Ab**-tufa $\mathbf{X}$ e Lemës 4.2.2 mund të konsiderohet si një riparaqitje e S me anë të simetrive të pjesshme të një pretufe me vlera në **Ab** në mënyrën e mëposhtme. Së pari, si në vërtetimin e Teoremës 5.6 të [39] ndërtojmë një semilatisë grupesh $X(e)$ (megjithëse një e kemi tashmë) duke përcaktuar për $e \geq f$, $\rho^e_f : X(e) \to X(f)$ të tillë që $\rho^e_f(a) = a \circ f$. Por $a \circ f = X(e,f)(a) = a + f$. Kjo tregon se gjysmëgrupi i Klifordit që lind duke ngushtuar X në $E(S)$ është i njëjtë me atë të përshkruar në Teoremën 5.6 të [39]. Më pas përcaktojmë një funksion të pjesshëm

$$a \cdot s = \begin{cases} a \circ s & \text{në qoftë se} \quad a \in X(e) \text{ dhe } ss^{-1} = e \\ \text{i papërcaktuar} & \text{përndryshe} \end{cases}$$

Ky është një veprim i djathtë i S mbi pretufën $X|_E$ i cili kënaq kushtet (Rep 1)-(Rep 5) të pohimit 5.7 tek [39] për rrjedhojë nga Shembulli 3 tek [39] $\mathbf{X}$ shndërrohet në një S-modul me veprimin e S-së të përcaktuar nga

$$a \star s = \rho^e_{ess^{-1}}(a) \cdot (es) = \rho^e_{ess^{-1}}(a) \circ (es). \tag{4.6}$$

Nga ana tjetër shohim që

$$\begin{aligned} \rho^e_{ess^{-1}}(a) \circ (es) &= X(ess^{-1}, es)X(e, ss^{-1})(a) && \text{nga përkufizimi i } \circ \\ &= X(e, es)(a) && \text{nga përkufizimi i } P(S) \\ &= X(e,s)(a) && \text{nga përkufizimi i } P(S) \\ &= a \circ s && \text{nga përkufizimi i } \circ. \end{aligned}$$

Po ta krahasojmë me (4.6) shohim që veprimet $\star$ dhe $\circ$ janë të barabarta, për rrjedhim, $\mathbf{X}$ lidhur me veprimin $\circ$ është një S-modul. ∎
Përcaktojmë $G : S$-pretufat $\to \mathbf{Ab}^{P(S)}$ mbi objektet duke çuar çdo riparaqitje $\alpha : S \to \mathcal{T}(X)$ në $G(\alpha) : P(S) \to \mathbf{Ab}$ e cila çon çdo idempotent e tek $X(e)$ dhe çdo morfizëm $(e,s) : e \to s^{-1}es$ tek kompozimi

$$G(\alpha)((e,s)) = \alpha(es)\rho^e_{ess^{-1}}. \tag{4.7}$$

Vetitë funktoriale të $G(\alpha)$ vërtetohen lehtë në qoftë se kujtojmë që (4.7) përcakton një veprim të djathtë mbi pretufën X dhe që për $a \in X(e)$, $G(\alpha)((e,s))(a)$ është e njëjtë si $a \circ s$ i Shembulli 3 të [39].
Le të jetë $\tau : \alpha \to \beta$ një morfizëm në S-pretufa ku $\alpha : S \to \mathcal{T}(X)$ dhe $\beta : S \to \mathcal{T}(Y)$. Përcaktojmë

$$G(\tau) : G(\alpha) \to G(\beta)$$

si familjen

$$\{\tau_e : X(e) \to Y(e) | e \in E\}.$$

Për të treguar që $G(\tau)$ është natyral ne duhet të tregojmë që për çdo $e \in E$, çdo morfizëm $(e,s) : e \to s^{-1}es$ dhe çdo $a \in X(e)$, kemi

$$\tau_{s^{-1}es} G(\alpha)(e,s)(a) = G(\beta)(e,s)\tau_e(a),$$

e cila nga (4.7) është ekuivalente me

$$\tau(a \circ s) = \tau(a) \circ s.$$

Kjo është e vërtetë meqënëse nga Lema 4.2.1 $\mathbf{X}$ dhe $\mathbf{Y}$ janë S-module sipas veprimit $\circ$ dhe $\tau : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ është një morfizëm S-modulesh.
Përcaktojmë $G' : \mathbf{Ab}^{P(S)} \to S$-pretufat mbi objektet X në mënyrën e mëposhtme. Nga Lema 4.2.2, X indukton një veprim të djathtë në S mbi $\mathbf{Ab}$-tufën $\mathbf{X} = \sqcup_{e \in E} X(e)$ dhe pastaj si në vërtetimin e $(iii) \Rightarrow (ii)$ të Teoremës 5.8 tek [39] përcaktojmë një riparaqitje $G'(X)$ të S me anë të simetrive të pjesshme të pretufë $X|_E$. Del që $G'(X) : S \to \mathcal{T}(X|_E)$ është i përcaktuar nga $s \mapsto X(ss^{-1}, s)$ ku $X(ss^{-1}, s) : X(ss^{-1}) \to X(s^{-1}s)$ është pasqyrimi $a \mapsto a \circ s$.

Lemë 4.2.4 *Moduli i Lemës 4.2.1 i induktuar nga riparaqitja $G'(X)$ është i njëjtë me modulin e Lemës 4.2.3 i induktuar nga X.*

Vërtetim. Teorema 5.8 ($(ii) \Rightarrow (i)$) dhe Shembulli 3 i [39] tregojnë që moduli i Lemës 4.2.1 i induktuar nga riparaqitja $G'(X)$ është gjysmëgrupi i Klifordit $\mathbf{X}$ i Lemës 4.2.3 i përbërë nga grupet $X(e)$ së bashku me morfizmat strukturorë $\rho^e_f = X(e,f)$, dhe veprimi i S mbi $\mathbf{X}$ është i dhënë nga

$$\begin{aligned}
a \star s &= \rho^e_{ess^{-1}}(a) \cdot (es) && \text{Shembulli 3} \\
&= X(ess^{-1}, es) X(e, ss^{-1})(a) && \text{nga përkufizimi i } \cdot \\
&= X(e, es)(a) && \text{nga përkufizimi i } P(S) \\
&= X(e, s)(a) && \text{nga përkufizimi i } P(S) \\
&= a \circ s && \text{nga përkufizimi i } \circ.
\end{aligned}$$

Kjo vërteton Lemën. ■
Përcaktojmë G' mbi morfizmat. Në qoftë se $\tau : X \to Y$ është një transformim natyral funktorësh $\mathbf{Ab}^{P(S)}$ atëherë τ indukton një morfizëm S-modulesh $\tau^* : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ të S-moduleve korrespondues $\mathbf{X}$ dhe $\mathbf{Y}$ të Lemës 4.2.3. Por Lema 4.2.4 pohon që $\mathbf{X}$

përputhet me modulin e induktuar nga $G'(X)$ po kështu edhe $\mathbf{Y}$ me atë të $G'(Y)$. Gjithashtu fakti që τ^* është një morfizëm modulesh implikon barazimin

$$\tau^* X(ss^{-1}, s) = Y(ss^{-1}, s)\tau^*,$$

që tregon se $\tau^* : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ mund të konsiderohet si një morfizëm ndërmjet riparaqitjeve respektive $G'(X)$ dhe $G'(Y)$. Përcaktojmë

$$G'(\tau) = \tau^*.$$

Tani vetitë funktoriale janë të qarta.

Teoremë 4.2.5 *Kategoritë $\mathbf{Ab}^{P(S)}$ dhe S-pretufat janë izomorfe.*

Vërtetim. Tregojmë fillimisht që për çdo $\alpha \in S$-pretufat kemi $G'G\alpha = \alpha$. Nga përkufizimi i G' kemi që $G'G\alpha$ është homomorfizmi

$$G'G\alpha : S \to \mathcal{T}(X)$$

i përcaktuar nga

$$s \mapsto G\alpha(ss^{-1}, s)$$

ku nga (4.7), $G(\alpha)(ss^{-1}, s)$ është morfizmi

$$G\alpha(ss^{-1}, s) : X(ss^{-1}) \to X(s^{-1}s) = X(s^{-1}(ss^{-1})s)$$

i përcaktuar nga

$$G\alpha(ss^{-1}, s) = \alpha((ss^{-1})s)\rho^{ss^{-1}}_{(ss^{-1})ss^{-1}} = \alpha(s),$$

për rrjedhojë $G'G\alpha = \alpha$. Së dyti do të tregojmë që për çdo $X \in \mathbf{Ab}^{P(S)}$, $GG'X = X$. Për këtë duhet të tregojmë që $GG'X$ çon çdo morfizëm $(e, s) : e \to s^{-1}es$ të $P(S)$ në $X(e, s)$. Nga (4.7) kemi

$$GG'X(e, s) = G'X(es)\rho^e_{ess^{-1}} \tag{4.8}$$

dhe nga përkufizimi i G' kemi

$$G'X(es) = X((es)(es)^{-1}, es) = X(ess^{-1}, es). \tag{4.9}$$

Por $\rho^e_{ess^{-1}} = X(e, ss^{-1})$ dhe nga (4.8) dhe (4.9) kemi

$$GG'X(e, s) = X(ess^{-1}, es)X(e, ss^{-1}) = X(e, (ss^{-1})(es)) = X(e, es) = X(e, s)$$

siç dëshironim. ■

Pohim 4.2.6 *Për një gjysmëgrup inversiv S, kategoria $P(S)$ përputhet me atë $D(S)$ të [43].*

Vërtetim. Vërejmë fillimisht që $\mathcal{P}(S)$ përputhet me $C(S)$ të [43]. Le të jetë $(e,x): e \to x^{-1}ex$ një morfizëm në $\mathcal{P}(S)$. Mund ta shkruajmë $x^{-1}ex$ si $(ex)^{-1}(ex)$ dhe vërejmë që $e \geq (ex)(ex)^{-1}$, për rrjedhojë (e,x) përputhet me $(e,(ex),(ex)^{-1}): e \to f = (ex)^{-1}(ex)$ të $C(S)$. Anasjellas, le të jetë $(e,x,x^{-1}): e \to f$ një morfizëm në $C(S)$. Meqënëse $e \geq xx^{-1}$, kemi $e(xx^{-1}) = xx^{-1}$ atëherë $x^{-1}e(xx^{-1})x = x^{-1}xx^{-1}x$ që është ekuivalente me $x^{-1}ex = x^{-1}x$. Por $f = x^{-1}x$, atëherë $x^{-1}ex = f$ dhe si rrjedhim (e,x,x^{-1}) përputhet me $(e,x): e \to x^{-1}ex$ të $\mathcal{P}(S)$. Së fundmi vërejmë që ekuivalenca jonë $\sim$ është e njëjtë me ekuivalencën $\sim$ të f. 379 të [43], prandaj $P(S) = D(S)$. ∎

Rrjedhim 4.2.7 *Ekziston nje izomorfizëm midis grupeve të kohomologjisë së Lausch dhe atyre të Renault të një gjysmëgrupi inversiv S.*

Vërtetim. Kohomologjia e një gjysmëgrupi inversiv S sipas Renault është përcaktuar në S-pretufa e cila nga Teorema 4.2.5 dhe Pohimi 4.2.6 është izomorfe me $\mathbf{Ab}^{D(S)}$. Por $\mathbf{Ab}^{D(S)}$ është një kategori abeliane, atëherë nga teorema e unicitetit të funktorëve të kohomologjisë së [35], ka vetëm një funktor kohomologjie mbi $\mathbf{Ab}^{D(S)}$. Meqënëse kohomologjia sipas Lausch është përcaktuar në $\mathbf{Ab}^{D(S)}$, kemi që grupet e kohomologjisë sipas Lausch dhe Renault lidhen me njëri tjetrin anën e izomorfizmit $H\ell^n(S,A) \cong Hr^n(S,GF(A))$. ∎

Vërejmë se nga rezultati i rrjedhimit më sipër nuk duhet nxjerrë përfundimi i gabuar se teoritë e kohomologjive sipas Lausch dhe Renaul përputhen ashtu siç është besuar nga E. Pasku deri kohët e fundit. Izomorfizmi thotë se nëse kemi informacion për grupet e kohomologjisë me koeficientë të çfardoshëm sipas Renault, ateherë izomorfizmi $H\ell^n(S,A) \cong Hr^n(S,GF(A))$ na mundëson të njohim grupet $H\ell^n(S,A)$, por jo anasjellas. Situata është e ngjashme me ekzistencën e izomorfizmit (2.2) për kohomologjinë e Eilenberg-MacLane i cili na mundësonte vetëm të tregonim se nga të qënit FP_∞ e S-së rridhte e njëjta veti për grupin G por jo anasjellas siç u tregua në kundërshembullin përkatës.

Kapitulli 5

Aspekte homologjike të paraqitjeve të gjysmëgrupeve dhe një zbatim për grupet

5.1 Hyrje

Qëllimi i këtij kapitulli është të shprehë në terma algjebrikë të qënit të një sistemi reduktimi konfluent dhe përfundues. Jepen dy karakterizime algjebrike për një sistem reduktimi $(A, \to)$, përkatësisht teoremat 5.2.2 dhe 5.3.1 të cilat japin kondita të nevojshme dhe të mjaftueshm për $(A, \to)$ për të qënë përkatësisht nëterian dhe konfluent. Për këto dy karakterizime ne do të përdorim nga [50] faktin që çdo kategorie të vogël aditive $\mathcal{C}$, i shoqërohet një unazë unitare $[\mathcal{C}]$ bashkësia korresponduese e të cilës është bashkësia e $|\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|$ matricave të trajtës $[\alpha_{p,q}]$ ku $\alpha_{p,q} \in \mathcal{C}(p,q)$ dhe çdo rresht dhe kolonë ka një numër të fundëm elementësh të ndryshëm nga zero. Veprimet e mbledhjes dhe të shumëzimit në $[\mathcal{C}]$ përcaktohen duke përdorur mbledhjen dhe kompozimin në $\mathcal{C}$ në këtë mënyrë:

$$[\alpha_{p,q}] + [\beta_{p,q}] = [\alpha_{p,q} + \beta_{p,q}] \text{ dhe } [\alpha_{p,q}] \cdot [\beta_{p,q}] = [\gamma_{a,b}] \text{ ku } \gamma_{a,b} = \sum_{c \in |\mathcal{C}|} \alpha_{a,c} \cdot \beta_{c,b}.$$

Është treguar në teoremat 7.1 dhe 7.1* të [50] që kategoria e moduleve të djathtë $Ab^{[\mathcal{C}]}$ lidhet me kategorinë e funktorëve kovariantë aditivë $Ab^{\mathcal{C}}$ me anë të funktorëve ekzaktë

$$Ab^{[\mathcal{C}]} \underset{R,\, S}{\overset{T}{\rightleftarrows}} Ab^{\mathcal{C}} \tag{5.1}$$

ku R dhe S janë përkatësisht të bashkëngjitur të djathtë dhe të majtë për T. Ngjashmërisht, për rastin kontravariant ekzistojnë çiftet e të bashkëngjiturve

$$Ab^{[\mathcal{C}]^*} \underset{R^*,\, S^*}{\overset{T^*}{\rightleftarrows}} Ab^{\mathcal{C}^*} . \tag{5.2}$$

Meqënëse do të përdorim S^* dhe R, kujtojmë shkurtimisht këtu që për çdo $F \in Ab^{\mathcal{C}^*}$, $S^*(F) = \bigoplus_{q\in|\mathcal{C}|} F(q)$ dhe veprimi i $\alpha = [\alpha_{p,q}]$ mbi $S^*(F)$ jepet nga

$$\alpha u_q = \sum_{p\in|\mathcal{C}|} u_p F(\alpha_{p,q}),$$

ku u_q është injeksioni i koproduktit. Ngjashmërisht, $R(F) = \prod_{q\in|\mathcal{C}|} F(q)$ ku veprimi i matricave në të djathtë përcaktohet në mënyrë të ngjashme me atë më sipër. Duke përdorur bashkëngjitjet e mësipërme, është treguar që për çdo $F \in Ab^{\mathcal{C}}$ dhe $G \in Ab^{\mathcal{C}^*}$ ekziston një ekuivalencë natyrale

$$S^*G \otimes_{[\mathcal{C}]^*} SF \simeq G \otimes_{\mathcal{C}^*} F. \tag{5.3}$$

Për karakterizimin e dytë, përveç rezultatit të mësipërm nga [50], do të përdorim një rezultat të Isbell dhe Mitchell tek [22] i cili pohon që kategoritë $\mathcal{C}$ për të cilat funktori kolimit $\underrightarrow{Lim}_{\mathcal{C}} : Ab^{\mathcal{C}} \to Ab$ është ekzakt, janë pikërisht ato kategori afinizimi i të cilave aff $\mathcal{C}$ ka komponentë të filtruar. Këtu afinizimi i $\mathcal{C}$ është nënkategoria (jo-aditive) e $\mathbb{Z}\mathcal{C}$ e përbërë nga ato morfizma shuma e koefiçientëve të plotë të të cilave është e barabartë me 1. Në përgjithësi kemi $\mathcal{C} \subseteq$ aff $\mathcal{C}$, i cili kthehet në barazim vetëm kur $\mathcal{C}$ është një bashkësi e pre-renditur. Të qënit i filtruar nënkupton dy gjëra, së pari çdo çift objektesh pasqyrohet tek një objekt i caktuar, dhe së dyti, për çdo dy morfizma α_1, α_2 me të njëjtin fillim dhe fund, ekziston β e tillë që $\beta\alpha_1 = \beta\alpha_2$. Për bashkësitë e pre-renditura kondita e dytë është automatikisht e plotësuar.
Rast i veçantë i sistemeve të reduktimit janë ato që induktohen nga paraqitjet e monoidëve. Në qoftë se $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{r} \rangle$ është një paraqitje e një monoidi S, atëherë kësaj paraqitjeje i shoqërohet sistemi i reduktimit $(\mathbf{x}^*, \to)$ ku $\mathbf{x}^*$ është monoidi i lirë mbi $\mathbf{x}$ dhe $\to$ përbëhet nga çiftet $(u\alpha v, u\beta v)$ ku $(\alpha, \beta) \in \mathbf{r}$ dhe $u, v \in \mathbf{x}^*$. Në fakt ky sistem reduktimi mund të konsiderohet si një bashkim i ndarë $\bigsqcup_{s\in S} \langle \mathcal{P}_s, \to_s \rangle$ të sistemeve të reduktimit $\langle \mathcal{P}_s, \to_s \rangle$, ku $\mathcal{P}_s$ është nënbashkësisa e atyre elementëve nga $\mathbf{x}^*$ që përfaqësojnë elementin $s \in S$, dhe $\to_s$ përbëhet nga ato çifte të $\to$ me të dyja koordinatat brenda $\mathcal{P}_s$. Në qoftë se ndodh që $\mathcal{P}$ përfaqëson një grup G, lind pyetja nëse konfluenca e $\mathcal{P}_e$ (e është njëshi i G) implikon atë të $\mathcal{P}_g$ për çdo $g \in G$. Paraqitjen $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{r} \rangle$ të G do ta quajmë paraqitje λ-konfluente sa herë që sistemi i reduktimit $\mathcal{P}_e$ është konfluent. Këtu λ është fjala boshe që përfaqëson njëshin e. Do të përdorim rezultatin e teoremës 5.3.1 dhe pohimin 4.1.2, f. 117 të [20] për të dhënë një kusht të nevojshëm dhe të mjaftueshëm sipas të cilit λ-konfluenca e paraqitjes prej monoidi $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{r} \rangle$ të një grupi implikon konfluencën e $\mathcal{P}$ në rastin e veçantë kur $(\mathcal{P}_e, \to_e)$ është i plotë, domethënë konfluent dhe Nëterian. Në fakt të qënit përfundues i $\mathcal{P}_e$ implikon atë të $\mathcal{P}_g$ sepse në qoftë se $\tilde{x}$ është një fjalë që përfaqëson g^{-1}, dhe në qoftë se ρ është një varg i pafundëm reduktimesh në $\mathcal{P}_g$, atëherë $\tilde{x}\rho$ do të jetë një varg i pafundëm reduktimesh në $\mathcal{P}_e$, një kontradiktë. Pohimi 4.1.2 i [20] pohon që në qoftë se $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ është një homomorfizëm unazash, A një Γ modul i djathtë, C një Λ modul i majtë, dhe në qoftë se $\mathrm{Tor}_p^{\Lambda}(\Gamma, C) = 0$ për çdo $p > 0$, atëherë

$$\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A, C) \simeq \mathrm{Tor}_n^{\Gamma}(A,_{(\varphi)} C) \tag{5.4}$$

ku ${}_{(\varphi)}C = \Gamma \otimes_\Lambda C$. Vërejmë që izomorfizmi (5.4) mbetet i vërtetë edhe në rastin kur Γ dhe A, të parë si Λ module të djathtë, nuk janë unitarë, për pasojë nuk kemi nevojë të supozojmë që $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ është një homomorfizëm unazash i cili çon njëshin 1_Λ të Λ tek njëshi 1_Γ i Γ. Përgjatë vërtetimit të pohimit 5.4.1, ne përdorim nga [20] (shih faqen 149) përkufizimin e mëposhtëm. Në qoftë se Λ dhe Γ janë dy unaza me shtim ku $\varepsilon_\Lambda : \Lambda \to Q_\Lambda$, $\varepsilon_\Gamma : \Gamma \to Q_\Gamma$ janë shtimet përkatëse, dhe $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ një pasqyrim unazash me shtim, atëherë ekziston një pasqyrim

$$\Psi : \Gamma \otimes_\Lambda Q_\Lambda \to Q_\Gamma$$

i përcaktuar nga $\Psi(\gamma \otimes x) = \gamma \cdot \psi(x)$ ku $\psi : Q_\Lambda \to Q_\Gamma$ është pasqyrimi i induktuar nga φ. Përsëri, përkufizimi i Ψ mbetet ende i vërtetë nën supozimin që Γ nuk është unitare si Λ modul i djathtë nëpërmjet φ.

Së fundi do të japim shkurtazi disa koncepte që do të përdoren në dy paragrafet në vazhdim. Shoqëruar një sistemi reduktimi $(A, \to)$ ekziston një *graf reduktimit* Γ_A me bashkësi kulmesh $V(\Gamma_A) = A$ dhe bashkësi brinjësh

$$E(\Gamma_A) = \{(a, b) : a \in A, b \in A \text{ nqs ekziston një rregull reduktimi } a \to b\}.$$

Për një sistem reduktimi $(A, \to)$ shënojmë me $F\Gamma_A$ kategorinë e lirë të përftuar nga Γ_A, me $\mathbb{Z}F\Gamma_A$ kategorinë aditive të induktuar nga $F\Gamma_A$ dhe le të jetë $[\mathbb{Z}F\Gamma_A]$ unaza që i shoqërohet $\mathbb{Z}F\Gamma_A$.
Një sistem reduktimi $(A, \to)$ do të quhet *Nëterian* ose *përfundues* në qoftë se nuk ekziston asnjë udhë e pafundme brinjësh

$$a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_n \to a_{n+1} \to \cdots$$

në grafin përkatës të reduktimit Γ_A.
Sistemi i reduktimit $(A, \to)$ do të quhet *konfluent* në qoftë se për çdo $a, b \in A$ nga e njëjta komponente e lidhur e Γ_A, ekziston $c \in A$ dhe udhët ρ_a dhe ρ_b me fillim përkatësisht në a dhe b e fund në c.
Sistemi $(A, \to)$ do të quhet me *degëzim të fundëm* në qoftë se nga çdo $a \in A$ dalin një numër i fundëm brinjësh të Γ_A.
Për nocionet bazë nga sistemet e reduktimit të përdorura në këtë kapitull i referohemi [3] dhe [6].

5.2 Sistemet e reduktimit Nëterianë

Le të jetë $(A, \to)$ një sistem reduktimi me degëzim të fundëm. Kjo klasë sistemesh reduktimi është me interes sepse ajo përfshin për shembull sistemet e reduktimit të induktuar nga paraqitjet e gjysmëgrupeve me një numër të fundëm relacionesh.

Lemë 5.2.1 *Në qoftë se $(A, \to)$ është një sistem Nëterian dhe me degëzim të fundëm, atëherë për çdo $a \in A$, ekziston $n_a \in \mathbb{N}$ e tillë që gjatësia e çdo udhe në Γ_A nga a tek një pasardhës i a nuk e kalon n_a.*

Vërtetim. Meqënëse në një sistem të tillë çdo element ka një numër të fundëm pasardhësish, atëherë për çdo $a \in A$ ka një numër të fundëm udhësh në Γ_A nga a te pasardhësit e a. Në qoftë se përcaktojmë n_a si maksimumi i gjatësive të këtyre udhëve, kjo bën punë. ■
Shënojmë me RA nëngjysmëgrupin e shumëzimit të monoidit $([\mathbb{Z}F\Gamma_A], \cdot)$ të përbërë nga të gjitha ato matrica E me një numër të fundëm elementësh të ndryshëm nga zero me vetinë shtesë që për çdo $a \in A$, $E_{a,a} \neq z \cdot 1_a$ ku 1_a është identiku i a në $F\Gamma_A$ dhe $z \in \mathbb{Z}^*$.

Teoremë 5.2.2 *Një sistem reduktimi me degëzim të fundëm $(A, \to)$ është Nëterian vetëm kur çdo zinxhir zbritës idealesh kryesorë të djathtë të $(RA, \cdot)$ përfundon.*

Vërtetim. Le të jetë

$$E^{(0)} \cup E^{(0)} \cdot RA \supseteq E^{(1)} \cup E^{(1)} \cdot RA \supseteq \cdots \supseteq E^{(n)} \cup E^{(n)} \cdot RA \supseteq E^{(n+1)} \cup E^{(n+1)} \cdot RA \supseteq \cdots$$

një zinxhir zbritës idealesh kryesorë të djathtë të RA. Për $i \in \mathbb{N}$ përcaktojmë $Q^{(i)} \in RA$ të tillë që

$$E^{(i)} = E^{(i-1)} \cdot Q^{(i)}. \tag{5.5}$$

Duke përdorur (5.5), mund të tregohet rekursivisht që për çdo $n \in \mathbb{N}$ dhe çdo $a, b \in A$ kemi barazimin

$$E^{(n)}_{a,b} = \sum_{a_n \in A} \cdots \sum_{a_1 \in A} E^{(0)}_{a,a_1} \cdot Q^{(1)}_{a_1,a_2} \cdots Q^{(n-1)}_{a_{n-1},a_n} \cdot Q^{(n)}_{a_n,b}. \tag{5.6}$$

Nga përkufizimi i RA, secili prej $n+1$ faktorëve të një termi jo-zero të (5.6) përbëhet nga kombinimet lineare të elementëve përkatës nga $\mathrm{Hom}_{F\Gamma_A}(a, a_1)$, $\mathrm{Hom}_{F\Gamma_A}(a_i, a_{i+1})$ dhe $\mathrm{Hom}_{F\Gamma_A}(a_n, b)$ me numra të plotë. Në qoftë se marrim një komponent nga secili prej hom-seteve të mësipërm që merr pjesë në formimin e termave të (5.6) përftojmë një udhë në Γ_A të trajtës

$$a \to a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_n \to b \tag{5.7}$$

gjatësia e së cilës është $n+1$ meqënëse asnjë nga shigjetat që paraqiten në (5.7) nuk induktohen nga një morfizëm identik në $F\Gamma_A$. Le të jetë $\mathcal{E}_i$ nënbashkësia e A që u korrespondon rreshtave të $E^{(i)}$ të cilat përmbajnë elementë të ndryshëm nga zero. Nga (5.5) shihet lehtë që $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{E}_0$. Pohojmë se

$$\forall a \in \mathcal{E}_0, \exists n_a \in \mathbb{N}, \text{ e tillë që } \forall b \in A \text{ të kemi } E^{(n_a)}_{a,b} = 0.$$

Vërtet, marrim n_a si tek Lema 5.2.1. Atëherë, udha (5.7) ka gjatësi $n_a + 1 > n_a$, për rrjedhojë termat e (5.6) nuk mund të kenë qënë të ndryshëm nga zero. Marrim tani $n = \max\{n_a : a \in \mathcal{E}_0\}$. Nga ajo që pohuam më sipër marrim që $E^{(n)}_{a,b} = 0$ për çdo $a \in \mathcal{E}_0$ dhe $b \in A$, atëherë $E^{(n)}$ është matrica zero.
Anasjellas, supozojmë që çdo zinxhir zbritës idealesh kryesorë të djathtë të RA përfundon dhe supozojmë që ekziston një udhë e pafundme

$$e_1 \cdot e_2 \cdots e_n \cdot e_{n+1} \cdots$$

në Γ_A. Përcaktojmë në RA matricat si më poshtë

$$E^{(n)} = [\varepsilon_{a,b}] \text{ ku } \varepsilon_{a,b} = \begin{cases} e_1 \cdots e_n & \text{nqs} \quad a = \iota(e_1) \text{ dhe } b = \tau(e_n) \\ 0 & \text{përndryshe} \end{cases}$$

Tani është e qartë se $E^{(n+1)} \in E^{(n)} \cdot RA$ dhe që $E^{(n)} \notin E^{(n+1)} \cdot RA$ që tregojnë se zinxhiri zbritës

$$E^{(1)} \cup E^{(1)} \cdot RA \supseteq \cdots \supseteq E^{(n)} \cup E^{(n)} \cdot RA \supseteq E^{(n+1)} \cup E^{(n+1)} \cdot RA \supseteq \cdots$$

nuk përfundon, një kontradiktë. ■

5.3 Sistemet e reduktimit konfluentë

Si më parë le të jetë $F\Gamma_A$ një kategori e lirë e përftuar nga grafi i reduktimit që i shoqërohet sistemit të reduktimit $(A, \to)$. Le të jetë $\mathcal{A}$ herësi $F\Gamma_A/\sim$ ku $\sim$ është kongruenca e gjeneruar nga të gjitha çiftet (α, β) ku $\alpha, \beta \in F\Gamma_A(a, b)$ dhe a, b variojnë në A. Në këtë mënyrë $\mathcal{A}$ bëhet një bashkësi e pre-renditur dhe në këtë rast elementët e $[\mathbb{Z}\mathcal{A}]$ kanë një trajtë të thjeshtë: ato janë $A \times A$ matricat $[\alpha_{p,q}]$ ku $\alpha_{p,q} \in \mathbb{Z}$ dhe çdo rresht dhe kolonë ka një numër të fundëm elementësh të ndryshëm nga zeroja. Në qoftë se një element $\alpha_{p,q}$ është jo-zero, atëherë q është një rrjedhim i p në sistemin $(A, \to)$. Vërejmë se të thuash që $(A, \to)$ është konfluent është njësoj si të thuash që aff $\mathcal{A}$ i ka komponentët e lidhur të filtruar, atëherë në vend që të shohim direkt për konfluencën e $(A, \to)$, duhet të shohim për konditat nën të cilat aff $\mathcal{A}$ i ka komponentët e filtruar. Do të japim një kondité të tillë me anë të $[\mathbb{Z}\mathcal{A}]$ dhe për këtë qëllim vërejmë së pari se bashkëngjitjet (5.1) dhe (5.2) në rastin e kategorisë së vogël aditive $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ bëhen

$$Ab^{[\mathbb{Z}\mathcal{A}]} \underset{R,\, S}{\overset{T}{\rightleftarrows}} Ab^{\mathbb{Z}\mathcal{A}} \tag{5.8}$$

dhe

$$Ab^{[\mathbb{Z}\mathcal{A}]^*} \underset{R^*,\, S^*}{\overset{T^*}{\rightleftarrows}} Ab^{\mathbb{Z}\mathcal{A}^*} . \tag{5.9}$$

Teoremë 5.3.1 *Sistemi i reduktimit $(A, \to)$ është konfluent vetëm kur $S^*\Delta\mathbb{Z}$ është një $[\mathbb{Z}\mathcal{A}]^*$ modul i sheshtë, ku $\Delta\mathbb{Z}$ është funktori konstant në $\mathbb{Z}$ mbi $\mathbb{Z}\mathcal{A}^*$.*

Vërtetim. Për çdo $G \in Ab^{\mathbb{Z}\mathcal{A}^*}$, çdo $M \in Ab^{[\mathbb{Z}\mathcal{A}]}$ dhe çdo grup abelian B, ekuivalencat natyrale të mëposhtme janë të vërteta

$$\begin{aligned} Ab(S^*G \otimes_{[\mathbb{Z}\mathcal{A}]^*} M, B) &\simeq Ab^{[\mathbb{Z}\mathcal{A}]}(M, Ab(S^*G, B)) \\ &\simeq Ab^{[\mathbb{Z}\mathcal{A}]}(M, RAb(G, B)) \\ &\simeq Ab^{\mathbb{Z}\mathcal{A}}(TM, Ab(G, B)) \\ &\simeq Ab(G \otimes_{\mathbb{Z}\mathcal{A}^*} TM, B). \end{aligned}$$

Atëherë nga Lema Yoneda duhet të ekzistojë një ekuivalencë natyrale

$$S^*G \otimes_{[\mathbb{Z}\mathcal{A}]^*} M \simeq G \otimes_{\mathbb{Z}\mathcal{A}^*} TM. \tag{5.10}$$

Në qoftë se tani supozojmë që $(A, \to)$ është konfluente, atëherë aff $\mathcal{A}$ ka komponentë të filtruar dhe nga [22] funktori $\Delta\mathbb{Z}$ është i sheshtë si një $\mathbb{Z}\mathcal{A}^*$ modul i djathtë. Ne duam të tregojmë që $S^*\Delta\mathbb{Z}$ është i sheshtë, domethënë, në qoftë se $M \to N$ është injeksion në $Ab^{[\mathbb{Z}\mathcal{A}]}$, atëherë morfizmi i induktuar $S^*\Delta\mathbb{Z} \otimes_{[\mathbb{Z}\mathcal{A}]^*} M \to S^*\Delta\mathbb{Z} \otimes_{[\mathbb{Z}\mathcal{A}]^*} N$ është injeksion në Ab. Për të parë këtë ne mund të përdorim natyralitetin e (5.10) duke zëvendësuar G me $\Delta\mathbb{Z}$ dhe duke përftuar kështu diagramin komutativ

$$\begin{tikzcd}
S^*\Delta\mathbb{Z} \otimes_{[\mathbb{Z}\mathcal{A}]^*} M \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & S^*\Delta\mathbb{Z} \otimes_{[\mathbb{Z}\mathcal{A}]^*} N \arrow[d, "\cong"] \\
\Delta\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}\mathcal{A}^*} TM \arrow[r] & \Delta\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}\mathcal{A}^*} TN
\end{tikzcd}$$

shigjetat vertikale të së cilës janë izomorfizma dhe shigjeta e fundit është injeksion meqënëse T ruan injeksionet dhe $\Delta\mathbb{Z}$ është i sheshtë.
Anasjellas, supozojmë që $S^*\Delta\mathbb{Z}$ është i sheshtë dhe duam të tregojmë që për çdo injeksion $F_1 \to F_2$ in $Ab^{\mathbb{Z}\mathcal{A}}$, morfizmi i induktuar $\Delta\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}\mathcal{A}^*} F_1 \to \Delta\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}\mathcal{A}^*} F_2$ është injeksion në Ab. Në qoftë se aplikojmë ekuivalencën natyrale (5.3) në rastin kur $\mathcal{C} = \mathbb{Z}\mathcal{A}$ dhe $G = \Delta\mathbb{Z}$, përftojmë katrorin komutativ

$$\begin{tikzcd}
S^*\Delta\mathbb{Z} \otimes_{[\mathbb{Z}\mathcal{A}]^*} SF_1 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & S^*\Delta\mathbb{Z} \otimes_{[\mathbb{Z}\mathcal{A}]^*} SF_2 \arrow[d, "\cong"] \\
\Delta\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}\mathcal{A}^*} F_1 \arrow[r] & \Delta\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}\mathcal{A}^*} F_2
\end{tikzcd}$$

ku shigjetat vertikale janë izomorfizma. Meqënëse S është funktor ekzakt dhe $S^*\Delta\mathbb{Z}$ është i sheshtë, shigjeta e sipërme është injeksion, atëherë shigjeta e poshtme do të jetë injeksion gjithashtu gjë që provon sheshtësinë e $\Delta\mathbb{Z}$. ■

5.4 Një diskutim mbi λ-konfluencën e grupeve

Meqënëse karakterizuam konfluencën e një sistemi reduktimi me anë të sheshtësisë të një moduli të induktuar nga sistemi, atëherë është normale të përdorim këtë karakterizim për të përftuar informacion mbi konfluencën e ndonjësistemi reduktimi në veçanti. Do të fokusohemi në ato sisteme reduktimi që induktohen nga paraqitjet e monoidëve që japin grupe me synimin për të gjetur kondita nën të cilat ky sistem reduktimi është konfluent.
Le të jetë $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{r} \rangle$ një paraqitje monoidi për një grup G dhe le të jenë $(\mathcal{P}_e, \to_e)$ dhe $(\mathcal{P}_g, \to_g)$ sistemet e reduktimit që u korrespondojnë elementit të njësishëm e dhe ndonjë $g \in G$, $g \neq e$. Supozojmë që $(\mathcal{P}_e, \to_e)$ është i plotë, atëherë nga sa thamë në hyrje, $(\mathcal{P}_g, \to_g)$ do të jetë përfundues. Përcaktojmë $\mathcal{I}_g$ bashkësinë e fjalëve të pa reduktueshme që përfaqësojnë g. Shënojmë me Λ unazën $[\mathbb{Z}\,(F\Gamma_{\mathcal{P}_e}/\sim)]$ dhe me Γ unazën $[\mathbb{Z}\left(F\Gamma_{\mathcal{P}_g}/\sim\right)]$ ku $\sim$ është përcaktuar si tek & 5.3. Për $g \in G$ shënojmë me $R_g^*\Delta\mathbb{Z}$, $S_g^*\Delta\mathbb{Z}$ modulet nga Ab^{Γ^*} të përcaktuar nga (5.9). Përcaktojmë

$$\varepsilon_\Lambda : \Lambda \to R_e^*\Delta\mathbb{Z}$$

duke pozuar për çdo matricë $\alpha = [\alpha_{p,q}] \in \Lambda$,

$$\pi_p \varepsilon_\Lambda(\alpha) = \sum_{q \in \mathcal{P}_e} \alpha_{p,q}$$

ku π_p është projeksioni i p-të. Ky përkufizim ka kuptim meqënëse α ka në çdo rresht numër të fundëm elementësh jozero. Ai është qartësisht homomorfizëm grupesh dhe syrjektiv meqënëse për çdo $b \in R_e^* \Delta \mathbb{Z}$ në qoftë se marrim $\alpha \in \Lambda$ të tillë që $\alpha_{p,p} = \pi_p(b)$ për çdo $p \in \mathcal{P}_e$, dhe $\alpha_{p,q} = 0$ për $p \neq q$, atëherë nga përkufizimi i ε_Λ shohim që $\varepsilon_\Lambda(\alpha) = b$. Për të parë që ε_Λ është homomorfizëm modulesh të majtë ne duhet të provojmë që për çdo $\alpha, \beta \in \Lambda$ dhe çdo $p \in \mathcal{P}_e$, $\pi_p \varepsilon_\Lambda(\alpha \cdot \beta) = \pi_p(\alpha \cdot \varepsilon_\Lambda(\beta))$. Vërtet,

$$\pi_p \varepsilon_\Lambda(\alpha \cdot \beta) = \sum_{s \in \mathcal{P}_e} \sum_{q \in \mathcal{P}_e} \alpha_{p,q} \beta_{q,s},$$

dhe

$$\pi_p(\alpha \cdot \varepsilon_\Lambda(\beta)) = \sum_{q \in \mathcal{P}_e} \alpha_{p,q} \sum_{s \in \mathcal{P}_e} \beta_{q,s},$$

të cilat janë të barabarta me njëra-tjetrën. Vërejmë që ideali i shtimit I_Λ përbëhet nga ato matrica tek të cilat shuma e elementëve të rreshtave është zero. Në mënyrë të ngjashme kemi një homomorfizëm me shtim $\varepsilon_\Gamma : \Gamma \to R_g^* \Delta \mathbb{Z}$ ideali i shtimit të të cilit I_Γ përsëri përbëhet nga ato matrica nga Γ tek të cilat shuma e elementëve të rreshtave është zero. Për çdo $[\alpha_{p,q}] \in \Lambda$ dhe çdo $v \in \mathcal{I}_g$, shënojmë me $v \cdot [\alpha_{p,q}]$ matricën nga Γ elementët e vetëm të ndryshëm nga zero të së cilës janë ato të trajtës $\alpha_{vp,vq} = \alpha_{p,q}$ sa herë që $\alpha_{p,q}$ është i ndryshëm nga zero. Për çdo $v \in \mathcal{I}_g$ përcaktojmë

$$\varphi_v : \Lambda \to \Gamma \text{ të tillë që } \varphi_v(\alpha) = v \cdot \alpha.$$

Është e lehtë të shihet që φ_v është homomorfizëm unazash. Gjithashtu nga përkufizimi i φ_v shohim që $\varphi_v(I_\Lambda) \subseteq I_\Gamma$ prandaj ai është një pasqyrim unazash me shtim dhe për rrjedhojë ai indukton një homomorfizëm Λ modulesh $\psi_v : R_e^* \Delta \mathbb{Z} \to R_g^* \Delta \mathbb{Z}$ në qoftë se konsiderojmë $R_g^* \Delta \mathbb{Z}$ si një Λ modul të majtë nëpërmjet φ_v. Siç e përmendëm në hyrje, ψ_v indukton një homomorfizëm Γ modulesh të majtë

$$\Psi_v : \ _{(\varphi_v)} R_e^* \Delta \mathbb{Z} \to R_g^* \Delta \mathbb{Z}$$

të përcaktuar nga

$$\Psi_v(\gamma \otimes a) = \gamma \cdot \psi_v(a).$$

Tani duke përdorur faktin që $S_e^* \Delta \mathbb{Z}$ dhe $S_g^* \Delta \mathbb{Z}$ janë nënmodule përkatësisht të $R_e^* \Delta \mathbb{Z}$ dhe $R_g^* \Delta \mathbb{Z}$, dhe faktit lehtësisht të kontrollueshëm që për çdo $v \in \mathcal{I}_g$ koordinatat e vetme të ndryshme nga zero të $\psi_v(a)$ janë ato të indeksuara nga vu sa herë që $\pi_u(a) \neq 0$, mund të shihet që Ψ_v indukton një homomorfizëm Γ modulesh të majtë

$$\tilde{\Psi}_v : \ _{(\varphi_v)} S_e^* \Delta \mathbb{Z} \to S_g^* \Delta \mathbb{Z}.$$

Vërejmë që për $v \in \mathcal{I}_g$ të ndryshme, modulet $_{(\varphi_v)} S_e^* \Delta \mathbb{Z}$ mund të jenë të ndryshëm. Për koprodukin e tyre $\bigoplus_{v \in \mathcal{I}_g} {}_{(\varphi_v)} S_e^* \Delta \mathbb{Z}$ le të jetë

$$\tilde{\Psi} : \bigoplus_{v \in \mathcal{I}_g} {}_{(\varphi_v)} S_e^* \Delta \mathbb{Z} \to S_g^* \Delta \mathbb{Z} \tag{5.11}$$

homomorfizmi i Γ-moduleve të majtë që induktohet nga vetia universale e koprodukteve. Do të tregojmë që $\tilde{\Psi}$ është syrjektiv. Për këtë na duhet vetëm të provojmë që çdo gjenerator i grupit abelian $S_g^*\Delta\mathbb{Z}$, domethënë çdo $d \in S_g^*\Delta\mathbb{Z}$ ku $\pi_w(d) = 1$ për $w \in \mathcal{P}_g$ të vetme, është në imazhin e $\tilde{\Psi}$. Le të jetë $v \in \mathcal{I}_g$ një pasues i pareduktueshëm i w. Shënojmë me γ^w matricën nga Γ elementi i ndryshëm nga zero i të cilit është $\gamma^w_{w,v} = 1$ dhe le të jetë $c^w \in \bigoplus_{v \in \mathcal{I}_g} {}_{(\varphi_v)}S_e^*\Delta\mathbb{Z}$ i tillë që $\pi_\xi c^w \neq 0$ vetëm kur $\xi = v$ dhe që $\pi_v c^w = \gamma^w \otimes a^w$ ku e vetmja koordinatë e ndryshme nga zero e a^w është $\pi_\lambda a^w = 1$. Përkufizimi i $\tilde{\Psi}$ implikon që $\tilde{\Psi}(c^w) = \tilde{\Psi}_v(\gamma^w \otimes a^w) = d$. Me shënimet e vendosura më sipër do të provojmë pohimin e mëposhtëm.

Pohim 5.4.1 *Le të jetë $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{r} \rangle$ paraqitje monoidi i një grupi G i tillë që sistemi i reduktimit $(\mathcal{P}_e, \rightarrow_e)$ është i plotë, atëherë për çdo $g \in G$, $(\mathcal{P}_g, \rightarrow_g)$ është konfluent vetëm kur ekziston $v \in \mathcal{I}_g$ i tillë që ${}_{(\varphi_v)}S_e^*\Delta\mathbb{Z} \cong S_g^*\Delta\mathbb{Z}$.*

Vërtetim. Në qoftë se $(\mathcal{P}_g, \rightarrow_g)$ është konfluent, atëherë $\mathcal{I}_g$ ka vetëm një element, le të themi $\mathcal{I}_g = \{v\}$ dhe në këtë rast (5.11) ka trajtën

$$\tilde{\Psi} = \Psi_v : \ {}_{(\varphi_v)}S_e^*\Delta\mathbb{Z} \rightarrow S_g^*\Delta\mathbb{Z}.$$

Do të tregojmë që $\tilde{\Psi}$ është një epimorfizëm i ndashëm Γ modulesh. Për këtë përcaktojmë për çdo $w \in \mathcal{P}_g$ familjen e homomorfizmave të grupeve abelianë

$$\theta_w : \mathbb{Z}_w \rightarrow \ {}_{(\varphi_v)}S_e^*\Delta\mathbb{Z},$$

ku $\mathbb{Z}_w$ është një kopje izomorfe e grupit aditiv $\mathbb{Z}$ përcaktuar nga

$$\theta_w(1) = c^w$$

ku $c^w = \gamma^w \otimes a$; e vetmja koordinatë e ndryshme nga zero e a është $\pi_\lambda a = 1$ dhe i vetmi element i ndryshëm nga zero i γ^w është $\gamma^w_{w,v} = 1$. Meqënëse $S_g^*\Delta\mathbb{Z}$ si grup abelian është izomorf me $\bigoplus_{w \in \mathcal{P}_g} \mathbb{Z}_w$, familja θ_w jep një homomorfizëm grupesh abelianë

$$\Theta : S_g^*\Delta\mathbb{Z} \rightarrow \ {}_{(\varphi_v)}S_e^*\Delta\mathbb{Z}$$

i tillë që $\Theta u_w = \theta_w$ ku u_w është injeksioni përkatës i koproduktit. Është e lehtë të shihet që Θ është homomorfizëm Γ modulesh. Për të parë që Θ ndahet, le të jetë $d \in S_g^*\Delta\mathbb{Z}$ një gjenerator çfarëdo ku $\pi_w(d) = 1$, atëherë kemi

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}\Theta(d) &= \tilde{\Psi}\Theta u_w(1) \\ &= \tilde{\Psi}(\theta_w(1)) = \tilde{\Psi}(c^w) = d. \end{aligned}$$

Si rezultat i kësaj marrim shumën e drejtë të Γ moduleve ${}_{(\varphi_v)}S_e^*\Delta\mathbb{Z} \cong S_g^*\Delta\mathbb{Z} \oplus K$ ku K është bërthama e $\tilde{\Psi}$. Por, siç e pamë, çdo gjenerator $\gamma^w \otimes a$ i ${}_{(\varphi_v)}S_e^*\Delta\mathbb{Z}$ është në imazhin e Θ, për rrjedhojë Θ është syrjektiv, $K = 0$ dhe ${}_{(\varphi_v)}S_e^*\Delta\mathbb{Z} \cong S_g^*\Delta\mathbb{Z}$.
Për të anasjellën, meqënëse $(\mathcal{P}_e, \rightarrow_e)$ është konfluent, atëherë nga teorema 5.3.1 $S_e^*\Delta\mathbb{Z}$

është një Λ modul i majtë i sheshtë, prandaj në qoftë se konsiderojmë Γ si një Λ modul të djathtë nëpërmjet φ_v për $v \in \mathcal{I}_g$ të dhënë, kemi që $\mathrm{Tor}_p^\Lambda(\Gamma, S_e^*\Delta\mathbb{Z}) = 0$ për çdo $p > 0$, atëherë nga pohimi 4.1.2 i [20] përftojmë izomorfizmat $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, S_e^*\Delta\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Tor}_n^\Gamma(A, {}_{(\varphi_v)}S_e^*\Delta\mathbb{Z})$ për çdo $n > 0$ dhe çdo Γ modul të djathtë A. Meqë $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A, S_e^*\Delta\mathbb{Z}) = 0$, përftojmë sheshtësinë e Γ modulit të majtë ${}_{(\varphi_v)}S_e^*\Delta\mathbb{Z}$ për rrjedhojë sheshtësinë e $S_g^*\Delta\mathbb{Z}$. Teorema 5.3.1 implikon që $(\mathcal{P}_g, \to_g)$ është konfluent. ■

Literatura

[1] W. W. Adams and M. A. Rieffel., *Adjoint functors and derived functors with an application to the cohomology of semigroups*, J. Algebra, 7: 25-34, 1967.

[2] J. Alonso and S. Hermiller, *Homological finite derivation type*, Internat. J. Algebra and Comput. 13 (2003) 341-359

[3] F. Baader and T. Nipkow, *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press 1998

[4] M. Barr, J. Beck, *Homology and standard constructions*, in *Seminar on triples and categorical homology theory*, (1969) 245-335

[5] R. Bieri, *Homological dimensions of discrete groups*, Queen Mary College Math. Notes, London 1976

[6] R. Book and F. Otto, *String-Rewriting Systems*, Springer, New York 1993

[7] Bourbaki, N., *Algebre, chap 2*, Paris 1962

[8] Bourbaki, N., *Algebre commutative, chap 1,2*, Paris 1961

[9] K. Brown, *The Geometry of Rewriting Systems: A Proof of the Anick-Groves-Squier Theorem*, in *Algorithms and Classifications in Combinatorial Group Theory*, Berkeley 1989, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 23 (1992) 137-163

[10] K. Brown, *Cohomology of Groups*, Springer, New York 1980

[11] Brown, K., *Homological Criteria for Finiteness*, Cmment. Math. Helvetici 50, (1975), 129-135

[12] Cain, A., Gray, R., Ruskuc, N., *Green index in semigroup theory: generators, presentations, and automatic structures*, Semigroup Forum, 85, no. 3 (2012), pp. 448-476

[13] Gilbert, N., *Derivations and Relation Modules for Inverse Semigroups*, Algebra and Discrete Mathematics, Vol 12 (2011), 1-19

[14] Gray, R., Ruskuc, N., *Green Index and Finiteness Conditions for Semigroups*, Journal of Algebra, Vol. 320, 2008, pp. 3145-3164

[15] Gray, R., Pride, S., J., *Homological finiteness properties of monoids, their ideals and maximal subgroups*, J. of Pure and Appl. Algebra, Vol. 215 (12), 2011, 3005-3024

[16] V.S. Guba and S.J Pride, *On the left and right cohomological dimension of monoids*, Bull. London Math. Soc 30 (1998) 391-396.

[17] Guiraud, Y., Malbos, P., *Higher-dimensional normalisation strategies for acyclicity*, Advances in Mathematics Vol. 231, Issues 3-4, October-November 2012, 2294-2351

[18] Howie, J. M., *Fundamentals of Semigroup Theory*, Clarendon Press Oxford, 1995

[19] H. J. Baues, G. Wirsching, *Cohomology of small categories*, J. Pure Appl. Algebra 38 (1985) 187-211

[20] Henri Cartan and Samuel Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1999

[21] P. J. Hilton, U. Stammbach, *A Course in Homological Algebra*, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1971

[22] Isbell, J., Mitchell, B., *Exact Colimits and Fixed Points*, Trans. Amer. Math. Soc. 220, 1976

[23] Krakulli, A., Pasku, E., *Algebraic Characterizations For Reduction Systems*, Albanian Journal of Mathematics, Volume 6, Number 2, Pages 65-73 ISSN: 1930-1235; (2012)

[24] Krakulli, A., Pasku, E., *Completely prime ideals and bi-FP_∞ condition*, FJMS, Vol. 84, Nr. 1, Pages 111-121, 2014

[25] Krakulli, A., Pasku, E., *Disa rezultate mbi kohomologjinë e monoidëve*, BSHN, nr 15, 2013

[26] Krakulli, A., Pasku, E., *Bieri-Eckmann criteria for small categories and an application for inverse monoids*, proceedings of IWBCMS, 2013

[27] Pasku, E., Krakulli, A., *Finiteness Conditions for Clifford Semigroups*, proceedings of ISCIM 2011

[28] Krakulli, A., Fundo, A., *The homological condition bi-FP_∞ for inverse monoids*, proceedings of IWBCMS, 2013

[29] Krakulli, A., Teliti, Xh., *On the cohomology of the inverse semigroup of the $\mathcal{G}$-sets of a groupoid $\mathcal{G}$*, proceedings of ISCIM 2013

[30] P. Kropholler, *Cohomology Notes*, Leksione Pasuniversitare, mbajtur nga P. Kropholler, Glasgow University, 2005

[31] Y. Kobayashi, *Gröbner bases of associative algebras and the Hochschild cohomology*, Trans. Amer. Math. Soc. 357, No. 3 (2004) 1095-1124

[32] Y. Kobayashi, *The homological finiteness property FP_1 and finite generation of monoids*, Internat. J. Algebra Comput., 17(3):593-605, 2007

[33] Y. Kobayashi, *The homological finiteness properties left-, right- and bi-FPn of monoids* Commun. Algebra 38, No. 11, 3975-3986 (2010).

[34] Y. Lafont, A. Proute, *Church-Rosser property and homology of monoids*, Math. Structures Comput. Sci. 1 (1991) 297-326

[35] Lang, S., *Topics in Cohomology of Groups*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1996

[36] Lausch, H., *Cohomology of inverse semigroups*, J. Algebra 35 (1975), 273-303

[37] O.A. Laudal, *Note on the projective limit of small categories*, Proc. Amer. Math. Soc. 33 (1972) 307-309.

[38] Lawson, M. V., *Inverse Semigroups. The Theory of Partial Symmetries*, World Scientific, 1998

[39] Lawson, M. V., Steinberg, B., *Ordered groupoids and Etendues*, Cahiers de Topologie et Geometrie Differentielle Categoriques 45.2 (2004): 82-108

[40] Leech, J., *The $\mathcal{D}$-category of a semigroup*, Semigroup Forum, Vol. 11 (1975-1976), 283-296

[41] Leech, J., *$\mathcal{H}$-coextensions of monoids*, American Mathematical Society 175 (1975), 1-65

[42] Lenzing, H., *Endlich prasentierbare Moduln*, Arch. der Math. 262-266, (1969)

[43] Loganathan, M., *Cohomology of Inverse Semigroups*, J. Algebra 70 (1981), 375-393

[44] Margolis, S., Meakin, J., *E-unitary Inverse Monoids and the Cayley Graph of a Group Presentation*, J. of Pure and Appl. Algebra, 58 (1989), 45-76

[45] Y. Kobayashi and F. Otto, *For finitely presented monoids the homological finiteness conditions FHT and bi-FP_3 coincide*, J. Algebra, 264 (2003) 327-341

[46] Renault, J., *A groupoid approach to C^*-algebras*, LNM 793, Springer-Verlag, 1980

[47] Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Second Edition, Springer, 1997

[48] Mac Lane, S., *Homology*, Academic Press, New York, 1963

[49] Mitchell, B., *Theory of Categories*, Academic Press, 1965

[50] Mitchell, B., *Rings with several object*, Advances in Mathematics 8 (1972) pp. 1-161

[51] W. R. Nico, *A counterexample in the cohomology of monoids*, Semigroup Forum, 4 (1972), 93-94

[52] Osborne, Scott, *Basic Homological Algebra*, Springer Verlag, 2000

[53] Pasku, E., *On some homotopical and homological properties of monoid presentations*, Semigroup Forum (2008) 76: 427-468

[54] Pasku, E., *Clifford semigroups as functors and their cohomology*, Semigroup Forum, 83 (2011), 75-88

[55] Renault, J., *A groupoid approach to C^*-algebras*, LNM 793, Springer-Verlag, 1980

[56] Schubert. H., *Categories*, Springer Verlag, 1972

[57] S. J. Pride, *Homological finiteness conditions for groups, monoids, and algebras*, Commun. Algebra, 34(10):3525-3536, 2006.

[58] Weibel, Ch., A., *An introduction to homological algebra*, Cambridge studies in advanced mathematics 38, Cambridge University Press 1994

Indeksi

Ab-tufa, 59

algjebra mbështjellëse, 33

bashkëngjitje, 6
bi-FP_∞, 25
bi-FP_n, 25
Bieri-Eckmann, 24

degëzim të fundëm, 71
dimension kohomologjik, 26
dobësisht bi-FP_n, 46

e filtruar, 12

fortësisht e filtruar, 12
FP_∞, 19, 25
FP_n, 19, 25

gjysmëgrupi i simetrive të pjesshme, 61
graf reduktimi, 71

indeks, 39
injeksion, 4

ko-kon, 3
kobërthama, 5
kolimit, 3
kon, 1
konfluent, 71
koprodukt, 4

limit, 1

nënobjekt, 60
Nëterian, 71

pretufë, 59
produkti i drejtë, 1
projeksionet, 2

riparaqitje, 61
ruan kolimitet, 12
ruan limitet, 12

S-modul, 57
S-pretufa, 64
simetri e pjesshme, 60