REPUBLIKA E SHQIPËRISË
UNIVERSITETI I TIRANËS
FAKULTETI I SHKENCAVE NATYRORE
DEPARTAMENTI MATEMATIKËS

PROGRAMI I STUDIMIT: ANALIZË DHE ALGJEBËR

Tema:

DISA KARAKTERIZIME PËR GJYSMËGRUPET ABUNDANTË DHE NDËRTIMI I DISA NËNKLASAVE TË TYRE

Paraqitur nga
Msc. Osman Hysa

Udhëheqës shkencor
Prof. Artur Baxhaku

Tiranë, 2014

P A R A T H Ë N I E

Studimi i gjysmëgrupeve abundantë ka filluar relativisht vonë. Kuptimi i tyre është futur në teorinë algjebrike të gjysmëgrupeve nga gjysma e dytë e viteve '70 të shekullit të kaluar. Që nga ajo kohë dhe deri më sot, nuk kemi akoma ndonjë monografi të shkruar mbi to përveç një numri të kufizuar artikujsh ku spikasin emrat e algjebristëve John Fountain dhe A. El Qallali.

Klasa e gjysmëgrupeve abundantë është një përgjithsim ose zgjerim i klasës së gjysmëgrupeve të rregullt.

Në vitin 1951 James Alexander Green futi në gjysmëgrupe disa relacione shumë të rëndësishme $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ dhe $\mathcal{J}$, të cilët u quajtën relacionet e Green-it. Këta relacione luajtën një rol të rëndësishëm në zhvillimin e mëtejshëm të teorisë algjebrike të gjysmëgrupeve në përgjithsi dhe të gjysmëgrupeve të rregullt në veçanti. Kjo duket qartë edhe në monografitë kryesore të shkruara nga Hawie dhe Cliford-Preston, të cilat përshkohen nga fillimi e deri në fund nga përdorimi i këtyre relacioneve.

*Në vitin 1975, F. Pastijn, në artikullin e tij "A representation of a semigroup by a semigroup of matrices over a group with zero", Semigroup Forum, 10 (1975), 238-249, futi për herë të parë në gjysmëgrupe relacionet e përgjithsuara të Green-it. Më pas John Fountain i shënoi këto relacione me simbolet $\mathcal{R}^*$, $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{H}^*$, $\mathcal{D}^*$ dhe $\mathcal{J}^*$, ose siç quhen ndryshe dhe * - relacione (yll-relacione) të Green-it. Kuptimi i tyre, siç do ta shohim në vijim gjatë shjellimit të tezës së doktoraturës, jepet nëpërmjet relacioneve të njohura të Green-it. Nëpërmjet këtyre relacioneve u përkufizua gjysmëgrupi abundant si gjysmëgrup në të cilin çdo $\mathcal{R}^*$- klasë dhe çdo $\mathcal{L}^*$ - klasë përmbajnë të paktën një idempotent. Pikërisht nga ky përkufizim rrjedh dhe fakti se gjysmëgrupet e rregullta janë një nënklasë e gjysmëgrupeve abundantë, sepse Howie në monografinë e tij "Teoria algjebrike e gjysmëgrupeve", me anë të një pohimi që vërtetohet lehtë, i karakterizon gjysmëgrupet e rregullta si gjysmëgrupe në të cilat çdo $\mathcal{R}$ - klasë dhe çdo $\mathcal{L}$ - klasë përmbajnë të paktën një idempotent, për më tepër në literatura të ndryshme pohimi i fundit merret edhe si përkufizim i gjysmëgrupeve të rregullt.*

Më pas u përcaktuan disa nënklasa të rëndësishme të gjysmëgrupeve abundant si ajo e gjysmëgrupeve kuazi-adekuatë dhe adekuatë, të cilat nga ana e tyre janë përgjithsime përkatsisht të klasave të gjysmëgrupeve të njohur ortodoksë dhe inversivë. Përveç tyre u përkufizuan edhe shumë nënklasa të tyre si ajo e gjysmëgrupeve adekuat të tipit A, superabundantë, etj.

Shumë autorë janë marrë me futjen e nocioneve të reja në këto gjysmëgrupe, si dhe me ndërtimin e disa tipeve të veçantë të këtyre gjysmëgrupeve.

Ne në këtë temë doktorature e cila titullohet "Disa karakterizime për gjysmëgrupet abundantë dhe ndërtimi i disa nënklasave të tyre", jemi munduar të japim një kontribut modest në zhvillimin e mëtejshëm të kësaj teorie relativisht të re, duke vërtetuar disa teorema të reja si dhe duke ndërtuar katër lloje të veçantë gjysmëgrupesh, të cilat janë nënklasa të klasës së gjysmëgrupeve abundantë.

Studimi i gjysmëgrupeve abundantë ka një rëndësi të veçantë edhe për faktin se shumë veti të tyre lidhen ngushtë pikërisht me prezencën e idempotentëve në to duke bërë të mundur që ato të karakterizohen shpesh nëpërmjet bashkësisë së tyre të idempotentëve ashtu siç ndodh edhe me gjysmëgrupet e rregullta, të cilët janë një klasë mjaft e studiuar. Në këtë mënyrë, në kushte të caktuara, shumë pohime të njohura për gjysmëgrupet e rregullta mund të implementohen në një klasë më të gjerë gjysmëgrupesh, siç është ajo e gjysmëgrupeve abundantë.

*Në të ardhmen një rëndësi të veçantë në studimet e mia në këtë fushë do të ketë edhe studimi i * - relacioneve në unaza në lidhje me shumëzimin e tyre, ndoshta duke futur në këtë mënyrë edhe kuptimin e unazave abundante, meqense është një fushë e palëvruar akoma. Objekt tjetër studimi do të jetë edhe zbulimi i ndonjë lidhjeje që mund të ekzistojë midis gjysmëgrupeve abundantë sipas * - relacioneve dhe gjysmëgrupeve abundantë sipas idealeve të dhënë në mënyrë të pavarur nga algjebristi gjerman Sabine Koppelberg në [15]. Përkufizimi i fundit, i cili nuk është ekuivalent me të parin (këtë e kemi treguar në këtë punim me anë të një kundërshembulli), lidhet me prezencën e të paktën një idempotenti në çdo ideal minimal të majtë.*

PËRMBAJTJA

Kapitulli 1

1. NJOHURI PARAPRAKE 1

1.1. Kuptimi i gjysmëgrupit 1

1.2. Idealet dhe homomorfizmat në gjysmëgrupe 3

1.3. Gjysmëgrupet e rregullt, ortodoksë dhe inversivë 4

1.4. Relacionet dhe kongruencat në gjysmëgrupe 6

1.5. Relacionet e Green-it në gjysmëgrupe 9

Kapitulli 2

2. GJYSMËGRUPET ABUNDANTË 11

2.1. Relacionet e zgjeruara të Green-it $\mathcal{R}^*$, $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{H}^*$, $\mathcal{D}^*$ dhe $\mathcal{J}^*$ 11

2.2. Gjysmëgrupet abundantë dhe disa nënklasa të tyre 13

Kapitulli 3

3. GJYSMËGRUPET KUAZI-ADEKUATË 19

3.1. Disa njohuri bazë mbi gjysmëgrupet kuazi-adekuatë 19

3.2. Ndërtimi i gjysmëgrupeve kuazi-adekuatë që përmbajnë një idempotent medial normal 21

Kapitulli 4

4. GJYSMËGRUPET ADEKUATË 28

4.1. Veti të gjysmëgrupeve adekuatë dhe disa kontribute të mëtejshme... 28

4.2. Gjysmëgrupet adekuatë të tipit A 34

Kapitulli 5

5. GJYSËMGRUPET E RREGULLTA DHE INVERSIVË SI NËNKLASË E GJYSMËGRUPEVE ABUNDANTË 40

5.1. Idempotentët medialë dhe medialë normalë në gjysmëgrupet e rregullta 40

5.2. Veti të gjysmëgrupeve të rregullt që përmbajnë një idempotent medial 45

5.3. Ndërtimi i një gjysmëgrupi të rregullt që përmban një idempotent medial 38

5.4. Ndërtimi i një gjysmëgrupi inversiv që përmban një idempotent medial 62

5.5. Ndërtimi i një gjysmëgrupi të rregullt që përmban një idempotent medial normal 73

6. KONKLUZIONE DHE PROJEKTE PËR TË ARDHMEN 82

7. BIBLIOGRAFIA 83

H Y R J E

Kjo temë doktorature i kushtohet studimit të gjysmëgrupeve abundant të cilët janë një përgjithsim i gjysmëgrupeve të rregullta.

Kontributi ynë në këtë punim konsiston kryesisht në studimin e mëtejshëm të vetive të disa nënklasave të veçanta gjysmëgrupesh abundantë si dhe në ndërtimin e disa tipesh të veçantë të tyre.

Siç do të shohim nga përkufizimi i gjysmëgrupeve abundantë, në themel të tyre qëndrojnë relacionet e përgjithësuara të Green-it $\mathcal{R}^*$, $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{H}^*$, $\mathcal{D}^*$ dhe $\mathcal{J}^*$, të cilët u futën për herë të parë në gjysmëgrupe nga F. Pastijn më 1975. Këto relacione u përkufizuan duke u bazuar tek relacionet e njohura të Green-it $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ dhe $\mathcal{J}$.

Punimi është ndarë në pesë kapituj. Në kapitullin e parë kemi përmbledhur një sërë konceptesh dhe vetish të njohura mbi gjysmëgrupet, për të krijuar një mjedis pune dhe një "fjalor" të përshtatshëm që do të na shërbejë për zhvillimin e temës në vazhdim. Këta koncepte dhe veti janë marrë kryesisht nga dy monografi të njohura në teorinë algjebrike të gjysmëgrupeve, njëra nga J. B. Howie [2] dhe tjetri nga Clifford and Preston [1].

Në kapitullin e dytë, pasi futen kuptimet e relacioneve të përgjithësuara të Green-it, jepet përkufizimi i gjysmëgrupeve abundantë dhe i disa nënklasave të rëndësishme të tyre. Këtu kemi dhënë edhe disa veti të rëndësishme të provuara nga autorë të ndryshëm dhe që do të na nevojiten për shtjellimin e temës sonë në vazhdimsi. Pjesa më e rëndësishme, që përfaqson edhe kontributin tonë në këtë kapitull, është raporti midis $\mathcal{R}$ - klasave ($\mathcal{L}$ - klasave) dhe $\mathcal{R}^*$ - klasave ($\mathcal{L}^*$ - klasave) në një gjysmëgrup të dhënë, shembujt e sjellë që tregojnë përfshirjen e mirfilltë të klasës së gjysmëgrupeve të rregullt në atë të gjysmëgrupeve abundantë, të klasës së gjysmëgrupeve ortodoksë në atë të gjysmëgrupeve kuazi-adekuatë si dhe të klasës së gjysmëgrupeve inversivë në atë të gjysmëgrupeve adekuatë. Vlen për tu theksuar në këtë kapitull edhe kundërshembulli që kemi sjellë për të treguar se përkufizimet e gjysmëgrupeve abundantë sipas relacioneve të përgjithsuara të Green-it dhënë në [11] (me të cilët do merremi në këtë punim) dhe përkufizimit të gjysmëgrupeve sipas idealeve, dhënë në [15], (përkufizim i dhënë ky në mënyrë të pavarur me të parin) nuk janë ekuivalentë. Lidhjet midis këtyre dy përkufizimeve do të jetë një ndër objektivat e punës time kërkimore në të ardhmen, sepse që të dy lidhen me prezencën e idempotentëve.

Kapitulli i tretë fillon me disa përkufizime dhe veti të njohura për klasën e gjysmëgrupeve kuazi-adekuatë dhe të idempotentit medial e medial normal në to, të cilat përgatisin terrenin për të kaluar në pjesën më të rëndësishme të tij, në ndërtimin e një gjysmëgrupi kuazi-adekuat i cili përmban një idempotent medial normal. Ky ndërtim përfaqson edhe kontributin tonë në këtë kapitull. Ndërtimi i një gjysmëgrupi të tillë S do të realizohet duke përdorur një bandë E e cila përmban një idempotent medial normal u

dhe një gjysmëgrup adekuat S me semillaticë idempotentësh $E^0 = uEu$. Këtu ne do të tregojmë gjithashtu se çdo gjysmëgrup kuazi-adekuat S që përmban një idempotent medial normal u, mund të ndërtohet (me afërsinë e izomorfizmit) si më sipër duke marrë si bandë normale $E = E(S)$ dhe si gjysmëgrup adekuat nëngjysmëgrupin uSu të S.

Kapitulli i katërt është tërësisht kontribut i punës tonë. A. El. Qallali dhe J. B. Fountain në artikullin e tyre "*Quasi-adequate semigroups*" [13], kanë vërtetuar disa pohime në gjysmëgrupet kuazi-adequatë. Ne kemi arritur të formulojmë dhe të vërtetojmë pohime analoge për gjysmëgrupet adekuatë dhe adekuatë të tipit A. Në këtë mënyrë kemi vërtetuar shtatë pohime të reja.

Kapitulli i pestë dhe i fundit i kushtohet ndërtimit të tre gjysmëgrupeve të veçantë. Së pari do të ndërtojmë gjysmëgrupin e rregullt që përmban një idempotent medial, nëpërmjet një gjysëmgrupi të rregullt të gjeneruar prej idempotentësh $\overline{E}$ i cili përmban një idempodent medial u dhe një gjysmëgrupi ortodoks me njësh S, banda e idempotentëve të të cilit është izomorfe me $u\overline{E}u$. Në të njëjtën kohë do të tregojmë se çdo gjysmëgrup i tillë i dhënë ndërtohet në mënyrën e treguar më sipër. Së dyti, do të tregojmë se si mund të ndërtojmë një gjysmëgrup inversiv që përmban një idempotent medial dhe si çdo gjysmëgrup i tillë mund të karakterizohet në këtë mënyrë nëpërmjet semillaticës së tij të idempotentëve dhe vetë atij gjysmëgrupi. Së treti, do të ndërtojmë një gjysmëgrup të rregullt që përmban një idempotent medial normal, duke përdorur si "tulla ndërtimi" një gjysmëgrup të rregullt i gjeneruar prej idempotentësh $\overline{E}$ që përmban një idempotent medial normal u dhe një gjysmëgrup inversiv me njësh S, semilatica e idempotentëve të cilit E^0 është izomorfe me $u\overline{E}u$.

Kapitulli 1

1. NJOHURI PARAPRAKE

Në këtë kapitull do të japim disa kuptime, përkufizime dhe pohime bazë, që do të na shërbejnë për zhvillimin në vijim të përmbajtjes së kësaj teme doktorature. Ato janë marrë nga botime të ndryshme mbi teorinë algjebrike të gjysmëgrupeve, si dhe nga artikuj të ndryshëm të botuar deri tani mbi gjysmëgrupet. Në përkufizimet, pohimet dhe teoremat e këtij kapitulli ne do tu referohemi dy monografive të njohura si ajo me autorë Clifford dhe Preston [1] dhe Howie [2].

1.1 Kuptimi i gjysmëgrupit

Le të jetë dhënë një bashkësi e çfardoshme S dhe *"·"* një veprim algjebrik, i brendshëm, binar në të. Përkufizimet e mëposhtme janë marrë nga [1] dhe [2].

***Përkufizim* 1.1.1.** *Grupoid quhet çifti i radhitur* $(S,\cdot)$*, ku S është një bashkësi çfardo dhe "·"është një veprim binar i përcaktuar në të.*

***Përkufizim* 1.1.2.** *Veprimi binar "·" në S quhet shoqërues, në qoftë se për çdo tre elementë a,b,c të S, është i vërtetë barazimi* $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

***Përkufizim* 1.1.3.** *Grupoidi* $(S,\cdot)$ *quhet gjysmëgrup, në qoftë se veprimi "·" është shoqërues.*

Në rastet kur nuk ka ngatërresa për veprimin *"·"*, atëherë në vend të shënimit $a\cdot b$ mund të shkruajmë thjeshtë ab. Në qoftë se për dy elementë a,b të një gjysmëgrupi S, është i vërtetë barazimi $ab = ba$, atëherë themi që këta dy elementë janë të *përkëmbyeshëm*.

***Përkufizim* 1.1.4.** *Një gjysmëgrup quhet ndërrimtar, nëse çdo dy elementë të tij janë të përkëmbyeshëm. Pra për çdo dy elementë a,b të S kemi ab = ba.*

Nëse ekziston elementi $1 \in S$ i tillë që,

$$\forall x \in S,\ x1 = 1x = x,$$

atëherë themi se "1" është *njësh* i gjysmëgrupit S dhe ky gjysmëgrup në këtë rast do të quhet *monoid* [2]. Në [2] tregohet gjithashtu se çdo monoid ka një njësh të vetëm. Nëse gjysmëgrupi S nuk ka njësh, atëherë ne mund ti shtojmë atij një element të ri, "1". Duke

shënuar $S^1 = S \cup \{1\}$ dhe duke përcaktuar në S^1 për elementin e shtuar "1", shumëzimin:

$$\forall s \in S,\ s1 = 1s = s,$$

gjysmëgrupi S^1 kthehet në monoid. Është e qartë se, kur gjysmëgrupi S ka njësh, atëherë S^1 përputhet me S. Në [2] thuhet gjithashtu se kur një gjysmëgrupi S, që ka të paktën dy elementë, përmban një element "0", të tillë që:

$$\forall x \in S,\ x0 = 0x = 0$$

atëherë ky element quhet *zero* e gjysmëgrupit S dhe S quhet gjysmëgrup me zero. Edhe në këtë rast gjysmëgrupi nuk mund të përmbajë më shumë se një zero. Kur gjysmëgrupi S nuk ka zero, ne mund ta zgjerojmë atë duke i shtuar një element që e shënojmë "0", të tillë që:

$$\forall s \in S,\ s0 = 0s = 0$$

Formohet në këtë mënyrë një gjysmëgrup i ri me zero, të cilin do ta shënojmë S^0.
Pra $S^0 = S \cup \{0\}$.

***Përkufizim* 1.1.5.** *Një element e i një gjysmëgrupi S quhet idempotent, atëherë kur është i vërtetë barazimi $e^2 = e$.*
Bashkësinë e idempotentëve të një gjysmëgrupi S e shënojmë me $E(S)$, ose kur nuk ka ngatërresa e shënojmë thjesht E.
Nëse A dhe B janë dy nënbashkësi të një gjysmëgrupi S, atëherë me simbolin AB do të kuptojmë bashkësinë:

$$\{ab \in S \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Ndërsa me *veprim të induktuar* nga veprimi i gjysmëgrupit S në nënbashkësinë A të tij, do të kuptojmë veprimin binar $\odot$ në A, të tillë që:

$$\forall (a,b) \in A^2,\ a \odot b = a \cdot b,$$

ku veprimi në anën e djathtë të barazimit është veprimi në S.

***Përkufizim* 1.1.6.** *Në qoftë se një nënbashkësi T e një gjysmëgrupi S është e qëndrueshme në lidhje me veprimin e tij (dmth $TT \subset T$), atëherë T sëbashku me veprimin e induktuar nga S në T quhet nëngjysmëgrup i S.*

***Përkufizim* 1.1.7.** *Në qoftë se A është një nënbashkësi e një gjysmëgrupi të dhënë S, atëherë nëngjysmëgrupin më të vogël të S që përmban A, do ta quajmë nëngjysmëgrup të S të gjeneruar nga A.*
ku me nëngjysmëgrup më të vogël që përmban A do kuptojmë nëngjysmëgrupin e S që përfshihet në çdo nëngjysmëgrup tjetër që përmban A. Këtë nëngjysmëgrup do ta shënojmë $< A >$ ose nganjëherë edhe me $\overline{A}$.

1.2 Idealet dhe homomorfizmat në gjysmëgrupe

Le të jetë dhënë një gjysmëgrup S dhe A një nënbashkësi e S.

***Përkufizim* 1.2.1.** *Nënbashkësia A e S quhet ideal i majtë i gjysmëgrupit S, në qoftëse $SA \subset A$, ideal i djathtë nëse $AS \subset A$ dhe ideal (ose ideal i dyanshëm) nëse A është njëkohësisht ideal i majtë dhe i djathtë i gjysmëgrupit S.*

Është e qartë se çdo ideal i një gjysmëgrupi të dhënë është njëkohësisht edhe nëngjysmëgrup i tij, ndërsa e anasjella jo gjithmonë është e vërtetë. Midis idealeve të një gjysmëgrupi S, vetë S është një ideal sepse $SS \subset S$. Nëse gjysmëgrupi S përmban elementin zero, atëherë një ideal tjetër i S është edhe bashkësia $\{0\}$. Vërtet, nga kuptimi i zeros kemi: $0\mathrm{S} = \mathrm{S}0 = \{0\}$, ku me simbolin $0\mathrm{S}$ kuptojmë $\{0\}\mathrm{S}$. Këto dy ideale të gjysmëgrupit S quhen ideale jo të mirëfillta të tij, ndërsa çdo ideal tjetër I i ndryshëm nga S dhe nga $\{0\}$ ($\{0\} \subset \mathrm{I} \subset \mathrm{S}$) quhet quhet ideal i mirëfilltë i tij.

***Përkufizim* 1.2.2.** *Ideali (ideali i majtë, ideali i djathtë) I i një gjysmëgrupi S, quhet minimal (minimal i majtë, minimal i djathtë) atëherë kur për çdo ideal (ideal të majtë, ideal të djathtë) J të S të tillë që $J \subset I$ kemi $J = I$.*

Nga të gjithë idealet e një gjysmëgrupi të dhënë S, një rëndësi të veçantë paraqet studimi i idealeve kryesore. Le të jetë S një gjysmëgrup dhe a një element i çfardoshëm i tij. Nënbashkësia Sa e S formon ideal të majtë të S, sepse $S(Sa) = (SS)a \subset Sa$. Njëlloj, mund të themi se nënbashkësitë aS dhe SaS formojnë përkatësisht ideal të djathtë dhe ideal të gjysmëgrupit S. Natyrisht që Sa, aS dhe SaS mund të mos përmbajnë elementin a. Në këto raste do të shënojmë:

$$\begin{aligned} S^1a &= Sa \cup \{a\}, \\ aS^1 &= aS \cup \{a\} \\ S^1aS^1 &= SaS \cup Sa \cup aS \cup \{a\} \end{aligned} \qquad (1.2.1)$$

Dimë që *ideali i majtë minimal*, i cili përmban elementin a është $S^1a = Sa \cup \{a\}$. Në mënyrë analoge kemi gjithashtu $aS^1 = aS \cup \{a\}$ dhe $S^1aS^1 = SaS \cup Sa \cup aS \cup \{a\}$ janë përkatësisht *ideali i djathtë minimal* dhe *ideali minimal* që përmbajnë elementin a. Këto ideale quhen *ideale kryesore* të një gjysmëgrupi. Ata shënohen përkatsisht me $< a >_l, < a >_r$ dhe $< a >$, por në disa raste përdoret edhe shënimi $(a)_l$, $(a)_r$ dhe (a).

Le të jetë ϕ një pasqyrim i gjysmëgrupit $(S,\cdot)$ në gjysmëgrupin $(T,\cdot)$, ku për lehtësi veprimet në këto dy gjysmëgrupe i kemi shënuar me të njëjtin simbol "$\cdot$" por duke qenë të vetëdijshëm për ndryshimin midis tyre. Shëmbëllimin e një elementi $x \in S$ sipas pasqyrimit ϕ do ta shënojmë $x\phi$.

***Përkufizim* 1.2.3.** *Pasqyrimi ϕ i gjysmëgrupit $(S,\cdot)$ në gjysmëgrupin $(T,\cdot)$ quhet homomorfizëm në qoftë se:*

$$\forall (x,y) \in S^2,\ (xy)\phi = (x\phi)(y\phi) \qquad (1.2.2)$$

Me simbolin $S\phi$ do të nënkuptojmë nënbashkësinë e T që përbëhet nga të gjitha shëmbëllimet e elementeve të S sipas pasqyrimit ϕ, pra,

$$S\phi = \{s\phi \in T \,|\, s \in S\} \qquad (1.2.3)$$

Në qoftë se homomorfizmi ϕ është injektiv, atëherë ai quhet *monomorfizëm*, në qoftë se ai është syrjektiv quhet *epiomorfizëm*. Në rastin kur ϕ është njëkohësisht injektiv dhe syrjektiv, atëherë ai quhet *izomorfizëm*. Nëse homomorfizmi ϕ është me fillim S dhe mbarim S, ai quhet *endomorfizëm*. Së fundi, kur një endomorfizëm është izomorfizëm, themi se kemi të bëjmë me një *automorfizëm*. Nëse ϕ është një izomorfizëm i gjysmëgrupit S në gjysmëgrupin T, atëherë ata quhen gjysmëgrupe izomorfe dhe do të shënojmë simbolikisht $S \simeq T$.

1.3 Gjysmëgrupet e rregullt, ortodoksë dhe inversivë

Këtu po japim disa përkufizime gjysmëgrupesh të rëndësishme, të cilat, në varësi të cilësive specifike të elementëve të tyre në përgjithësi dhe të idempotentëve në veçanti, shfaqin veti të caktuara.
Miller dhe Clifford në [3] dhanë këto dy përkufizime, të cilave iu referohet edhe Howie në [2]:

***Përkufizim* 1.3.1.** *Një element a i gjysmëgrupit S quhet i rregullt në qoftë se ekziston një element x në S i tillë që $axa = a$.*

***Përkufizim* 1.3.2.** *Një gjysmëgrup S quhet i rregullt në qoftë se të gjithë elementët e tij janë të rregullt.*

***Përkufizim* 1.3.3.** *Invers të elementit a të një gjysmëgrupi S quhet elementi $a' \in S$ i tillë që $aa'a = a$ dhe $a'aa' = a'$*
Nga ky përkufizim rrjedhin dy gjëra të rëndësishme. <u>Së pari</u>, çdo element i rregullt ka të paktën një invers. Vërtetë, nëse a është i rregullt dhe x i tillë që $axa = a$, atëherë $a' = xax$ do jetë një invers i elementit a. <u>Së dyti</u>, elementët ax dhe xa janë idempotentë. Një element mund të ketë më shumë se një invers dhe bashkësinë e inversëve të një elementi a e shënojmë me $V(a)$.
Gjithashtu shohim se kur një element a është i rregullt, atëherë $a \in aS$, $a \in Sa$ dhe $a \in SaS$ dmth për idealet kryesore kemi:

$$(a)_r = aS^1 = aS,$$
$$(a)_l = S^1a = Sa$$
$$(a) = S^1aS^1 = SaS$$

***Përkufizim* 1.3.4.** *Një gjysmëgrup S quhet ortodoks atëherë kur ai është i rregullt dhe bashkësia e idempotentëve të tij formon nëngjysmëgrup.*
Në [2] jepet një teoremë për të karakterizuar gjysmëgrupet ortodoksë. Kjo teoremë është formuluar dhe vërtetuar nga Reilly dhe Scheiblich (1967) në [4], e cila thotë:

***Teoremë* 1.3.1.** *Një gjysmëgrup i rregullt është ortodoks vetëm atëherë kur inversi i çdo idempotenti të tij është idempotent.*

Ndërsa Howie në [2] vazhdon me një plotësim të saj duke vërtetuar këtë teoremë:
***Teoremë* 1.3.2.** *Një gjysmëgrup i rregullt është ortodoks vetëm atëherë kur ëhtë i vërtetë pohimi:*

$$(\forall a, b \in S) \;\; [V(a) \cap V(b) \neq \Phi \;\; \Rightarrow \;\; V(a) = V(b)] \qquad (1.3.1)$$

Një klasë tjetër shumë e rëndësishme e gjysmëgrupeve është ajo e gjysmëgrupeve *inversivë*.

***Përkufizim* 1.3.5.** *Një gjysmëgrup S quhet gjysmëgrup inversiv në qoftë se çdo element ka një invers të vetëm dmth:*

$$(\forall a \in S)(\exists a^{-1} \in S) \;\; [aa^{-1}a = a \;\; \wedge \;\; a^{-1}aa^{-1} = a] \qquad (1.3.2)$$

dhe a^{-1} është i vetëm.
Gjysmëgrupet inversive janë studiuar fillimisht nga Vagner (1952, 1953) në [5] dhe në mënyrë të pavarur nga Preston (1954) në [6]. Vagner i quajti ato "Grupe të përgjithsuara" dhe ky emërtim është përdorur në mënyrë standarte në literaturën ruse.
Përkufizimi 1.3.5. nuk është shumë i përshtatshëm dhe nuk përdoret shpesh për të treguar që një gjysmëgrup është inversiv. Teorema e mëposhtme e dhënë në [2], i karakterizon gjysmëgrupet inversivë nga nëpërmjet idempotentëve.

***Teoremë* 1.3.3.** *Në një gjysmëgrup S pohimet e mëposhtme janë ekujvalente:*
(a) *S është gjysmëgrup inversiv*
(b) *S është gjysmëgrup i rregullt dhe idempotentët e tij janë të përkëmbyeshëm*
(c) *çdo idel kryesor i majtë dhe çdo ideal kryesor i djathtë përmban një idempotent të vetëm* ■
Pikat (b) dhe (c) të teoremës së mësipërme janë ato që përdoren zakonisht kur duam të tregojmë se një gjysmëgrup S është inversiv. Kështu këto dy pika mund shihen edhe si përkufizime të gjysmëgrupeve inversive të shprehur në terma idempotentësh.

1.4 Relacionet dhe kongruencat në gjysmëgrupe

Një nga konceptet shumë të rëndësishme të algjebrës, dhe që do të na shoqërojë gjatë gjithë këtij punimi, është ai i *relacionit* në një bashkësi jo boshe X.

***Përkufizim* 1.4.1.** *Relacion binar në një bahskësi X quhet çdo nënbashkësi ρ e bashkësisë prodhim kartezian $X \times X$.*

Meqenëse do të merremi vetëm me relacionet binare, ne do të përdorim thjeshtë fjalën "relacion" duke nënkuptuar ndryshimin.

Nga përkufizimi bien në sy dy relacione të veçanta në X: bashkësia boshe Φ dhe $X \times X$, si nënbashkësi të $X \times X$. Këto dy relacione quhen jo të mirëfillta dhe emërtohen përkatsisht relacioni *bosh* dhe *universal*. Një tjetër relacion i veçantë, i cili luan një rol të rëndësishëm në bahskësinë $\mathscr{B}(X)$ të relacioneve binare në një bashkësi të dhënë X, është edhe relacioni *idedentik*, që do të shënohet 1_X dhe përcaktohet si më poshtë:

$$1_X = \{(x,x) : x \in X\} \quad (1.4.1)$$

***Përkufizim* 1.4.2.** *Kompozim të dy relacioneve $\rho, \sigma \in \mathscr{B}(X)$ do të quajmë veprimin binar "$\circ$" në $\mathscr{B}(X)$, të përcaktuar si më poshtë:*

$$\rho \circ \sigma = \{(x,y) \in X \times X : (\exists z \in X)[(x,z) \in \rho \ \wedge \ (z,y) \in \sigma]\} \quad (1.4.2)$$

Howie në [2] ka provuar se veprimi i kompozimit "$\circ$", i përcaktuar si më sipër, në bashkësinë $\mathscr{B}(X)$ gëzon vetinë e shoqërimit, dmth $(\mathscr{B}(X), \circ)$ është gjysmëgrup.

Tani po japim disa kuptime që lidhen me një relacion të dhënë ρ në një bashkësi X:

Bashkësi përcaktimi të relacionit ρ ose ndryshe *domain* të ρ, do të quajmë bashkësinë:

$$\mathrm{dom}(\rho) = \{x \in X : (\exists y \in X)[(x,y) \in \rho]\} \quad (1.4.3)$$

Ndërsa, bashkësi shëmbëllimesh të relacionit ρ ose *range* të ρ, do të quajmë bashkësinë:

$$\mathrm{ran}(\rho) = \{y \in X : (\exists x \in X)[(x,y) \in \rho]\} \quad (1.4.4)$$

Nga përkufizimi i relacionit rrjedh menjëherë se:

$$\rho \subset \sigma \ \Rightarrow \ \mathrm{dom}(\rho) \subset \mathrm{dom}(\sigma) \ \wedge \ \mathrm{ran}(\rho) \subset \mathrm{ran}(\sigma) \quad (1.4.5)$$

Nëse $x \in X$, do të shënojmë me $x\rho$ bashkësinë e elementëve $y \in X$, për të cilat kemi $(x,y) \in \rho$. Pra,

$$x\rho = \{y \in X : (x,y) \in \rho\} \quad (1.4.6)$$

Ndërsa, kur A është nënbashkësi e X, atëherë do të shënojmë:

$$A\rho = \cup\{a\rho : a \in A\} \quad (1.4.7)$$

***Përkufizim* 1.4.3.** *Nëse ρ është një relacion në bashkësinë X, atëherë relacion të anasjellë të tij do të quajmë relacionin ρ^{-1}, përsëri në X, të tillë që:*

$$\rho^{-1} = \{(x,y) \in X \times X : (y,x) \in \rho]\} \quad (1.4.8)$$

***Përkufizim* 1.4.4.** *Një element ϕ në $\mathscr{B}(X)$ quhet pasqyrim i pjesshëm i X-it në X, në qoftë se për çdo x në* $\mathrm{dom}(\phi)$ *kemi* $|x\phi| = 1$.
dmth për çdo tre elementë x, y_1, y_2 në X është i vërtetë implikimi:

$$[(x,y_1) \in \phi \ \wedge \ (x,y_2) \in \phi] \ \Rightarrow \ y_1 = y_2 \quad (1.4.9)$$

***Përkufizim* 1.4.5.** *Në qoftë se për pasqyrimin e pjesshëm ϕ në X, kemi* $\mathrm{dom}(\phi) = \mathrm{X}$, *atëherë ai quhet pasqyrim i X-it në X.*
Bashkësinë e pasqyrimeve të pjesshëm në një bashkësi X do ta shënojmë $\mathsf{PT}(X)$, ndërsa bashkësinë e pasqyrimeve në këtë bashkësi do ta shënojmë me $\mathsf{T}(X)$. Kështu mund të shkruajmë $\mathsf{T}(X) \subset \mathsf{PT}(X) \subset \mathscr{B}(X)$ dhe për më tepër Howie në [2] ka provuar se $\mathsf{T}(X)$ dhe $\mathsf{PT}(X)$ janë nëngjysmëgrupe të $\mathscr{B}(X)$ në lidhje me veprimin e induktuar në to të kompozimit të relacioneve.
Meqë për relacionin Φ kemi $\mathrm{dom}(\Phi) = \phi$ dhe për më tepër imlikimi (1.4.9) është i vërtetë, atëherë ky relacion është i përfshirë në $\mathsf{PT}(X)$, por jo në $\mathsf{T}(X)$, sepse $\mathrm{dom}(\Phi) = \phi \neq X$

***Përkufizim* 1.4.6.** *Relacioni ρ në X quhet reflektiv, në qoftë se $1_X \subset \rho$, dmth për çdo x në X kemi $(x,x) \in \rho$*

***Përkufizim* 1.4.7.** *Relacioni ρ në X quhet simetrik, në qoftë se $\rho^{-1} = \rho$, dmth kur*

$$(\forall x, y \in X)\ [(x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho] \quad (1.4.10)$$

***Përkufizim* 1.4.8.** *Relacioni ρ në X quhet kalimtar, në qoftë se $\rho \circ \rho \subset \rho$, dmth kur*

$$(\forall x, y, z \in X)\ [(x,y) \in \rho \ \wedge \ (y,z) \in \rho \ \Rightarrow \ (x,z) \in \rho] \quad (1.4.11)$$

***Përkufizim* 1.4.9.** *Relacioni ρ në X quhet relacion ekujvalence, në qoftë se ai është njëkohësisht reflektiv, simetrik dhe kalimtar.*

***Përkufizim* 1.4.10.** *Një familje $\pi = \{A_i : i \in I\}$ nënbashkësishë të një bashkësie X quhet copëtim i saj atëherë kur,*

(a) *çdo A_i është jo boshe*

(b) *për të gjitha* i, j *në* I *kemi* $A_i = A_j$ *ose* $A_i \cap A_j = \phi$

(c) $\cup\{A_i : i \in I\} = X$

Nëse ρ është relacion ekujvalence, atëherë bashkësinë:

$$x\rho = \{y \in X \ : \ (x, y) \in \rho\}$$

do ta quajmë ρ - *klasë* ose *klasë ekujvalence* të elementit x. Nga përkufizimi 1.4.8. duket qartë se kur $(x, y) \in \rho$ atëherë $x\rho = y\rho$
Nga [2] (*proposition* 4.20) kemi këtë pohim që lidh copëtimin e një bashkësie X me relacionet e ekujvalencës në të:

***Pohim* 1.4.1.** *Le të jetë* ρ *një relacion ekujvalence në një bashkësi* X. *Atëherë familja e të gjitha klasave të ekujvalencës,*

$$\Phi(\rho) = \{x\rho : x \in X\} \quad (1.4.12)$$

është një copëtim i X. *Anasjellas, në qoftë se* $\pi = \{A_i : i \in I\}$ *është një copëtim i* X *-it, atëherë*

$$\Psi(\pi) = \{(x, y) \in X \times X : (\exists i \in I)(x, y \in A_i)\} \quad (1.4.13)$$

është relacion ekujvalence në X, *dhe për më tepër kemi:*

$$\Psi(\Phi(\rho)) = \rho \quad dhe \quad \Phi(\Psi(\pi)) = \pi \quad (1.4.14) \ \blacksquare$$

Bashkësinë e ρ - klasave sipas relacionit ρ në X do ta quajmë *bashkësi faktor* dhe do ta shënojmë X / ρ.

***Përkufizim* 1.4.11.** *Relacioni i ekujvalencës* ρ *në* S, *ku* $(S, \cdot)$ *është gjysmëgrup, për të cilin,*

$$(\forall s, t, a \in S) \ [(s, t) \in \rho \Rightarrow (as, at) \in \rho] \quad (1.4.15)$$

quhet kongruencë e majtë në S.

***Përkufizim* 1.4.12.** *Relacioni i ekujvalencës* ρ *në* S, *ku* $(S, \cdot)$ *është gjysmëgrup, për të cilin,*

$$(\forall s, t, a \in S) \ [(s, t) \in \rho \Rightarrow (sa, ta) \in \rho] \quad (1.4.16)$$

quhet kongruencë e djathtë në S.

***Përkufizim* 1.4.13.** *Nëse* relacioni *i ekujvalencës* ρ *në* S, *është njëkohësisht congruencë e majtë dhe e djathtë, atëherë* ρ *quhet kongruencë në* S.

Për relacionin ρ në gjysmëgrupin S që gëzon pohimet (1.4.15) ose (1.4.16) do të themi se është i pajtushëm përkatësisht nga e majta ose nga e djathta me veprimin e gjysmëgrupit. Kur ρ është i pajtushëm njëkohësisht si nga e majta ashtu edhe nga e djathta me veprimin e gjysmëgrupit, do të themi se ρ është i pajtushëm me veprimin e këtij gjysmëgrupi.
Howie në [2] ka tregur se kur ρ është kongruencë në një gjysmëgrup S, pasqyrimi:

$$(S/\rho)\times(S/\rho)\to S/\rho,$$

i tillë që për çdo dy elementë $a\rho, b\rho$ të S/ρ, kemi:

$$[(a\rho),(b\rho)]\to(ab)\rho \qquad (1.4.17)$$

është veprim binar në S/ρ (dmth nuk varet nga përfaqësuesit a dhe b të klasave të ekujvalencës $a\rho$ dhe $b\rho$). Për këtë veprim do të shënojmë $(a\rho)\cdot(b\rho)=(ab)\rho$ dhe për më tepër ai ka edhe vetinë e shoqërimit. Pra $(S/\rho,\ \cdot)$ është gjysmëgrup dhe do ta quajmë *gjysmëgrup faktor* i përcaktuar nga kongruenca ρ në S. Veprimi "$\cdot$" i përcaktuar nga (1.4.17) nuk duhet ngatërruar me veprimin e gjysmëgrupit S edhe pse i kemi shënuar njëlloj, por të vetëdijshëm për ndryshimin thelbësor midis tyre.

1.5 Relacionet e Green-it në gjysmëgrupe

Le të jetë S një gjysmëgrup dhe $(a)_r = aS^1 = aS\cup\{a\}$, $(a)_l = S^1a = Sa\cup\{a\}$ përkatësisht idealet kryesore të djathtë dhe të majtë të gjeneruar prej elementit a të gjysmëgrupit S. J. A. Green (1951) në [7], përcaktoi në S relacionet e mëposhtme:

$$a\,\mathcal{R}\,b \;\Leftrightarrow\; aS^1 = bS^1 \qquad (1.5.1)$$

$$a\,\mathcal{L}\,b \;\Leftrightarrow\; S^1a = S^1b \qquad (1.5.2)$$

$$a\,\mathcal{H}\,b \;\Leftrightarrow\; S^1a = S^1b \wedge aS^1 = bS^1 \qquad (1.5.3)$$

ndryshe mund të shkruajmë:

$$a\,\mathcal{H}\,b \;\Leftrightarrow\; a\,\mathcal{R}\cap\mathcal{L}\,b \qquad (1.5.4)$$

$$a\,\mathcal{D}\,b \;\Leftrightarrow\; S^1a = S^1b \vee aS^1 = bS^1 \qquad (1.5.5)$$

ose

$$a\,\mathcal{D}\,b \;\Leftrightarrow\; \mathcal{R}\cup\mathcal{L} \qquad (1.5.6)$$

$$a\,\mathcal{J}\,b \;\Leftrightarrow\; S^1aS^1 = S^1bS^1 \qquad (1.5.7)$$

Relacionet $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ dhe $\mathcal{J}$, të përcaktuara si më sipër në një gjysmëgrup S do ti quajmë relacione të Green-it dhe provohet lehtë se ato janë relacione ekujvalence.
Në [2] ne gjejmë këto dy lema të rëndësishme për relacionet $\mathcal{R}$ dhe $\mathcal{L}$:

***Lema* 1.5.1.** *Le të jenë a, b dy elementë të gjysmëgrupit S. Atëherë do të kemi:*

1.) $a \mathcal{L} b$ *vetëm atëherë kur ekzistojnë elementët x, y në S^1 të tillë që*

$$xa = b, yb = a$$

2.) $a \mathcal{R} b$ *vetëm atëherë kur ekzistojnë elementët u, v në S^1 të tillë që*

$$au = b, bv = a \quad \blacksquare$$

***Lema* 1.5.2.** *$\mathcal{L}$ është kongruancë e djathtë dhe $\mathcal{R}$ është kongruencë e majtë* $\blacksquare$
Gjithashtu, Howie në [2] vërtetoi edhe pohimin:

***Pohim* 1.5.1.** *Relacionet $\mathcal{L}$ dhe $\mathcal{R}$ janë të përkëmbyeshëm dhe për më tepër*

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \mathcal{R} \cup \mathcal{L} = \mathcal{D} \qquad (1.5.8)$$

Meqë $\mathcal{R} \cup \mathcal{L} = \mathcal{D}$ rrjedh se $\mathcal{D}$ është ekujvalenca më e vogël që përfshim ekujvalencat $\mathcal{L}$ dhe $\mathcal{R}$. Njëlloj si në lemën 1.5.1, mund të themi se do të kemi $a \mathcal{J} b$ vetëm atëherë kur ekzistojnë elementët x, y, u, v në S^1 për të cilat kemi $xay = b, ubv = a$. Duke patur parasysh edhe barazimet e fundit, nxjerrim si konkluzion se $\mathcal{L} \subset \mathcal{J}$ dhe $\mathcal{R} \subset \mathcal{J}$. Kështu, meqë $\mathcal{D}$ është ekujvalenca më e vogël që përfshin ekujvalencat $\mathcal{L}$ dhe $\mathcal{R}$ rrjedh që $\mathcal{D} \subset \mathcal{J}$.
Një shembull që tregon se kjo përfshirje është rigoroze e ka sjellë Green në [7].
Është e qartë se në gjysmëgrupet ndërrues kemi: $\mathcal{H} = \mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{D} = \mathcal{J}$. Gjithashtu Howie në [2] thekson se në gjysmëgrupet e fundme dhe në ato periodikë kemi barazimin $\mathcal{D} = \mathcal{J}$.

Kapitulli 2

2. GJYSMËGRUPET ABUNDANTË

2.1 Relacionet e përgjithsuara të Green-it $\mathcal{R}^*$, $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{H}^*$, $\mathcal{D}^*$ dhe $\mathcal{J}^*$

Le të jetë S një gjysmëgrup çfardo. F. Pastijn në vitin 1975, në artikullin e tij "A representation of a semigroup by a semigroup of matrices over a group with zero", *Semigroup Forum,* 10 (1975), 238-249, futi për herë të parë kutimin e relacioneve të përgjithsuara të Green-it relacionet $\mathcal{R}^*$ dhe $\mathcal{L}^*$. Më vonë J. Fountain në [9] i përkufizoi ato si më poshtë:

***Përkufizim* 2.1.1.** [9] *Për dy elemente a dhe b të një gjysmëgrupi S do të themi se $(a,b)\in\mathcal{R}^*$ vetëm atëherë kur $(a,b)\in\mathcal{R}$ në ndonjë gjysmëgrup S' që e përfshin gjysmëgrupin S si nëngjysmëgrup të tij.*

***Përkufizim* 2.1.2.** [9] *Për dy elemente a dhe b të një gjysmëgrupi S do të themi se $(a,b)\in\mathcal{L}^*$ vetëm atëherë kur $(a,b)\in\mathcal{L}$ në ndonjë gjysmëgrup S' që e përfshin gjysmëgrupin S si nëngjysmëgrup të tij.*

Nga përkufizimet e mësipërme rrjedh menjëherë se relacionet $\mathcal{R}^*$ dhe $\mathcal{L}^*$ janë përkatsisht kongruencë e majtë dhe kongruencë e djathtë në *S*. Gjithashtu, si edhe për relacionet e Grinit $\mathcal{R}$ dhe $\mathcal{L}$ në një gjysmëgrup S, çdo veti e formuluar apo vërtetuar për relacionin $\mathcal{R}^*$ mund të formulohet dhe vërtetohet në mënyrë duale vetia koresponduese edhe për relacionin $\mathcal{L}^*$.

***Përkufizim* 2.1.3.** [9] *Për dy elemente a dhe b të një gjysmëgrupi S do të themi se $(a,b)\in\mathcal{D}^*$ vetëm atëherë $(a,b)\in\mathcal{R}^*$ ose $(a,b)\in\mathcal{L}^*$. Pra $\mathcal{D}^*=\mathcal{R}^*\vee\mathcal{L}^*=\mathcal{R}^*\bigcup\mathcal{L}^*$*

***Përkufizim* 2.1.4.** [9] *Një ideal i djathtë (i majtë) I i një gjysmëgrupi S quhet *** - ideal i djathtë (i majtë)**, në qoftë se për çdo $a\in I$ kemi $R_a^*\subset I$ ($L_a^*\subset I$).*

***Përkufizim* 2.1.5.** [9] *Një nënbahskësi I e një gjysmëgrupi S quhet *** - ideal**, në qoftë se është njëkohësisht * - ideal i majtë dhe i djathtë i S.*

Idealin minimal të djathtë (të majtë) që përmban elementin $a\in S$ do ta shënojmë $R^*(a)$ [$L^*(a)$]. Këto * - ideale quhen përkatsisht * - ideal kryesor i djathtë dhe * - ideal kryesor i majtë të përftuara nga elementi $a\in S$. Ndërsa * - idealin e dyanshëm minimal që përmban elementin $a\in S$ do ta shënojmë $J^*(a)$. Nga ky përcaktim është e qartë se

$R^*(a) \subset J^*(a)$ dhe $L^*(a) \subset J^*(a)$. Ekzistenca e $R^*(a)$, $L^*(a)$ dhe $J^*(a)$ garantohet nga fakti se vetë S është njëkohësisht * - ideal i djathtë, i majtë dhe * - ideal i S.

***Pohim* 2.1.1.** [9] *Për dy elemente a,b të një gjysmëgrupi S janë të vërteta:*

1) $(a,b) \in \mathcal{R}^*$ *vetëm atëherë kur* $R^*(a) = R^*(b)$

2) $(a,b) \in \mathcal{L}^*$ *vetëm atëherë kur* $L^*(a) = L^*(b)$ ■

Tani mund të japim edhe përkufizimin e relacionit $\mathcal{J}^*$ në një gjysmëgrup S:

***Përkufizim* 2.1.6.** [9] *Për dy elemente a dhe b të një gjysmëgrupi S do të themi se $(a,b) \in \mathcal{J}^*$ vetëm atëherë kur $J^*(a) = J^*(b)$.*

Për të vërtetuar direkt nga përkufizimi që $(a,b) \in \mathcal{L}^*$ në një gjysmëgrup S është disi e vështirë, sepse gjysmëgrupe që përfshijnë S-në si nëngjysmëgrup të tyre mund të ketë shumë. Fountain në [9], duke u bazuar në [10] dhe [11], për të treguar se $(a,b) \in \mathcal{L}^*$ ka dhënë si alternativë shumë efikase lemën e mëposhtme:

***Lemë* 2.1.1.** [9] *Le të jetë S një gjysmëgrup dhe $a,b \in S$. Atëherë konditat e mëposhtme janë ekuivalente:*

1) $(a,b) \in \mathcal{L}^*$ [$(a,b) \in \mathcal{R}^*$]

2) *Për çdo* $x,y \in S^1$, *kemi* $ax = ay \Leftrightarrow bx = by$, [$xa = ya \Leftrightarrow xb = yb$] ■

Nga kjo lemë merret menjëherë ky rrjedhim:

***Rrjedhim* 2.1.1.** [9] *Në qoftë se e është një idempotent i gjysmëgrupit S dhe $a \in S$. Atëherë konditat e mëposhtme janë ekuivalente:*

1) $(e,a) \in \mathcal{L}^*$ [$(e,a) \in \mathcal{R}^*$]

2) $ae = a$ *dhe për çdo* $x,y \in S^1$, *kemi* $ax = ay \Rightarrow ex = ey$

[$ea = a$ *dhe për çdo* $x,y \in S^1$, *kemi* $xa = ya \Rightarrow xe = ye$] ■

2.2 Gjysmëgrupet abundantë dhe disa nënklasa të tyre

Gjysmëgrupet *abundantë* kanë qenë objekt i studimit të shumë matematikanëve algjebristë që merren me studimin e gjysmëgrupeve. Fillimet e studimit të tyre datojnë qysh prej viteve '70 dhe ka patur shumë punime mbi këto lloj gjysmëgrupesh. Siç do të shohim në vijim, klasa e këtyre gjysmëgrupe është një zgjerim i klasës së njohur të gjysmëgrupeve të rregullt. Kështu qëllimi i algjebristëve që janë marrë me studimin e tyre ka qenë që shumë veti të gjysmëgrupeve të rregullt ti shtrijnë edhe për klasën e gjysmëgrupeve abundantë.

Përkufizim* 2.2.1.** [9] *Një gjysmëgrup do të quhet* ***abundant *atëherë kur çdo* $\mathcal{R}^*$*- klasë dhe çdo* $\mathcal{L}^*$*- klasë e këtij gjysmëgrupi përmban të paktën një idempotent*.
Ndryshe, themi se gjysmëgrupi S quhet abundant vetëm atëherë kur:

$$\forall a \in S,\ \mathrm{R}_a^* \cap E(S) \neq \phi \wedge \mathrm{L}_a^* \cap E(S) \neq \phi$$

Meqenëse në gjysmëgrupet e rregullta, çdo $\mathcal{R}$ - klasë dhe çdo $\mathcal{L}$- klasë përmban një idempotent dhe meqenëse çdo gjysmëgrup përfshin vetveten atëherë rrjedh menjëherë se çdo gjysmëgrup i rregullt është abundant. Abundantë janë gjithashtu edhe gjysmëgrupet orthodoksë dhe inversivë. Pra klasa e gjysmëgrupeve abundantë përfshin klasën e gjysmëgrupeve të rregullt.
Këtu më poshtë po japim përkufizimin e disa nënklasave të gjysmëgrupeve abundant.

Përkufizim* 2.2.2.** [13] *Gjysmëgrupi abundant* S *quhet* ***kuasi – adekuat *vetëm atëherë kur* $E(S)$ *është nëngjysmëgrup i tij*.

Përkufizim* 2.2.3.** [13,14] *Gjysmëgrupi quasi – adekuate* S *quhet* ***adekuat *vetëm atëherë kur* $E(S)$ *është nëngjysmëgrup ndërrues i tij*.
Nga këto përkufizime rrjedh menjëherë se klasa e gjysmëgrupeve kuaziadekuatë përfshin atë të gjysmëgrupeve ortodoksë dhe klasa e gjysmëgrupeve adekuatë përfshin atë të gjysmëgrupeve inversivë.
Në [14], (*proposition* 1.3 (4)) jepet ky pohim për të karakterizuar gjysmëgrupin adekuat:

***Pohim* 2.2.1.** *Një gjysmëgrup* S *është adekuat vetëm atëherë kur çdo* $\mathcal{R}^*$*– klasë dhe çdo* $\mathcal{L}^*$*– klasë përmban një idempotent të vetëm dhe gjysmëgrupi* $< E(S) > = \overline{E(S)}$ *është i rregullt.* ■
Ne do të shënojmë me a^+ dhe a^* idempotentët e vetëm respektivisht të klasave R_a^* dhe L_a^* për çdo element $a \in S$, ku S është një gjysmëgrup adekuat. Kështu që $\{a^+\} = R_a^* \cap E(S)$ dhe $\{a^*\} = L_a^* \cap E(S)$. Nga ky përcaktim i elementëve a^+ dhe a^*,

rrjedh menjëherë se: $a = a^{+}a = aa^{*} = a^{+}aa^{*}$, për më tepër, për $a \in S$ dhe $e \in E(S)$ do të kemi gjithashtu: $(ea)^{+} = ea^{+}$ dhe $(ae)^{*} = a^{*}e$.

Përkufizim* 2.2.4.** [9] *Gjysmëgrupi abundant S quhet* ***superabundant *vetëm atëherë kur çdo $\mathcal{H}^{*}$- klasë e tij përmban të paktën një idempotent.*

Ne do të tregojmë se për çdo element $a \in S$, kemi $R_a \subset R^{*}_a$. Gjithashtu, do të sjellim shembuj që tregojnë përfshirjen e mirfilltë të klasës së gjysmëgrupeve të rregullt në klasën e gjysmëgrupeve abundantë, të klasës së gjysmëgrupeve kuazi-adekuatë në klasën e gjysmëgrupeve orthodoksë dhe të klasës së gjysmëgrupeve adekuatë në klasën e gjysmëgrupeve inversivë.

Shënojmë R_a dhe R^{*}_a përkatsisht klasat e ekujvalencës të elementit a sipas relecioneve $\mathcal{R}$ dhe $\mathcal{R}^{*}$ në S. Pra do të kemi:

$$R_a = \{x \in S \,/\, x\mathcal{R}\, a\} \quad \text{dhe} \quad R^{*}_a = \{x \in S \,/\, x\mathcal{R}^{*} a\}$$

Nëse $b \in R_a$ atëherë do të kemi:

$$b\mathcal{R}\, a \;\Leftrightarrow\; (a)_r = (b)_r \;\Leftrightarrow\; aS^1 = bS^1$$

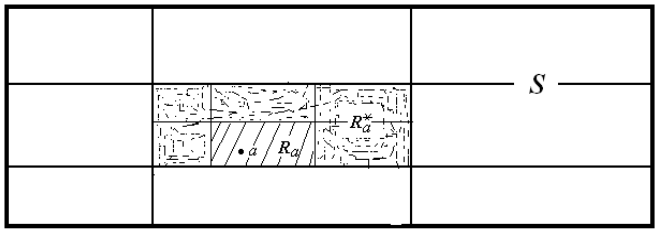
që do të thotë se ekzistojnë elementët $s,t \in S^1$ për të cilat $a = bs$ dhe $b = at$. Në këto kushte, për çdo $x,y \in S^1$ janë të vërteta implikimet:

$$xa = ya \;\Rightarrow\; xa \cdot t = ya \cdot t \;\Rightarrow\; xb = yb$$

dhe

$$xb = yb \;\Rightarrow\; xb \cdot s = yb \cdot s \;\Rightarrow\; xa = ya$$

Pra, $xa = ya \;\Leftrightarrow\; xb = yb$. Kështu, duke shfrytëzuar *vërejtjen 2.1.1.* rrjedh se $b\mathcal{R}^{*}a$ ose $b \in R^{*}_a$ Kemi treguar që për çdo $a \in S$, $R_a \subset R^{*}_a$. Nga sa pamë më sipër për $\mathcal{R}$- klasat dhe $\mathcal{R}^{*}$- klasat në një gjysmëgrup S, do të kemi këtë paraqitje të tyre me anë të diagramave të Venit:



Pra, mund të konkludojmë se çdo $\mathcal{R}^{*}$- klasë është bashkim $\mathcal{R}$- klasash. Pra, $R^{*}_a = \bigcup_{x \in R^{*}_a} R_x$.

El. Qallali në [12] tregoi se kur elementët a dhe b të gjysmëgrupit S janë të rregullt, atëherë kemi $a\mathcal{R}^{*}b \Leftrightarrow a\mathcal{R}b$ dhe për më tepër, kur S është gjysmëgrup i rregullt kemi

$\mathcal{R}^* = \mathcal{R}$. Në mënyrë duale tregohet se të gjitha vetitë që pamë më lart për relacionin $\mathcal{R}^*$ janë të vërteta edhe për relacionin $\mathcal{L}^*$.

Tani do të sjellim dy shembuj që tregojnë përfshirjen e mirfilltë të klasave të gjysmëgrupeve të rregullt, orthodoksë dhe inversivë, përkatsisht në klasat e gjysmëgrupeve abundantë, kuazi-adekuatë dhe adekuatë.

***Shembull* 2.2.1.** Në bashkësinë $S = N \times \{1\} = \{(n,1) \,/\, n \in N\}$ ku N është bashkësia e numrave natyrorë dhe 1 njëshi i numrave natyrorë, përcaktojmë veprimin "·" të tillë që:

$$\forall((n,1),(m,1)) \in S^2,\ (n,1)\cdot(m,1) = (nm,1)$$

Nga vetia e shoqërimit e shumëzimit të zakonshëm në bashkësinë e numrave natyrorë N rrjedh menjëherë vetia e shoqërimit e shumëzimit "·" në S. Kështu $(S, \cdot)$ është gjysmëgrup.

Le të jetë $(k,1)$ një idempotent në S. Atëherë kemi:

$$(k,1)\cdot(k,1) = (k,1) \Rightarrow (k^2,1) = (k,1) \Rightarrow k^2 = k \Rightarrow k = 1$$

Kjo tregon se i vetmi idempotent në S është elementi (1,1). Pra,

$$E(S) = \{(1,1)\}$$

Nëse $(n,1)$ është një element çfardo i gjysmëgrupit S atëherë shohim se:

1) $(1,1)\cdot(n,1) = (n,1)$

2) Për çdo dy elementë $(x,1)$, $(y,1)$ në S kemi:

$$\begin{aligned}(x,1)\cdot(n,1) = (y,1)\cdot(n,1) &\Rightarrow (xn,1) = (yn,1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow xn = yn \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = y \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x,1) = (y,1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x,1)\cdot(1,1) = (y,1)\cdot(1,1)\end{aligned}$$

Nga 1) dhe 2), si dhe në bazë të rrjedhimit 2.1.1, rrjedh se $(1,1)\mathcal{R}^*(n,1)$. Në të njëjtën mënyrë tregohet se $(1,1)\mathcal{L}^*(n,1)$. Kështu konkludojmë se çdo $\mathcal{R}^*$- klasë dhe çdo $\mathcal{L}^*$- klasë e gjysmëgrupit S përmban idempotentin (1,1). Pra gjysmëgrupi $(S, \cdot)$ është abundant. Në fakt, për rastin konkret kemi një $\mathcal{R}^*$- klasë dhe një $\mathcal{L}^*$- klasë të vetme që përputhen me vetë S, dmth $S \times S = \mathcal{R}^* = \mathcal{L}^*$

Meqë $E(S) = \{(1,1)\}$ dhe $(1,1)\cdot(1,1) = (1,1)$ rrjedh që $E(S)$ është nëngjysmëgrup ndërrues i S, që do të thotë se S është njëkohësisht kuazi-adekuat dhe adekuat.

Por $(S, \cdot)$ nuk është i rregullt dhe për pasojë as ortodoks e as inversiv, sepse asnjë element i S përveç $(1,1)$ nuk është i rregullt. Vërtetë sikur për ndonjë element $(n,1)$ të ekzistonte elementi $(p,1)$ i tillë që:

$$(n,1)\cdot(p,1)\cdot(n,1) = (n,1)$$

atëherë do të kishim:

$(npn,1) = (n,1)$ prej nga $npn = n$ ose $np = 1$ dmth $n = 1$ dhe $p = 1$.

Ky shembull tregon qartë se klasat e gjysmëgrupeve të rregullta, orthodoksë dhe inversivë përfshihen në mënyrë të mirfilltë përkatsisht tek klasat e gjysmëgrupeve abundantë, kuaziadekuatë dhe adekuatë. ■

***Shembull* 2.2.2.** Nga sa treguam në shembullin 1, rrjedh menjëherë se edhe gjysmëgrupi $(N,\cdot)$ ku N është bashkësia e numrave natyrorë dhe "$\cdot$", shumëzimi i zakonshëm në N, është gjithashtu një gjysmëgrup me cilësitë e gjysmëgrupit $(S,\cdot)$ të shqyrtuar më sipër. ■

Një fakt interesant është se në [15], Sabine Koppelberg, ka përkufizuar në mënyrë të pavarur gjysmëgrupet abundantë duke u bazuar tek idealet minimale. Ne këtu nuk do të ndalemi gjatë, por vetëm do të tregojmë se këta dy përkufizime nuk janë ekuivalentë. Konkretisht, me anë të një kundërshembulli do të tregojmë se nga përkufizimi i gjysmëgrupeve abundantë sipas $*$ - relacioneve $\mathcal{R}^*$ dhe $\mathcal{L}^*$ nuk rrjedh ai sipas idealeve. Ndërsa lidhje më të hollësishme midis tyre do të jenë objekt i studimit të mëtejshëm të gjysmëgrupeve abundantë.

***Përkufizim* 2.2.5.** [15] *Një ideal i majtë L në S quhet minimal, atëherë kur çdo ideal i majtë që përfshihet në L përputhet me vetë L.*

Në mënyrë të ngjashme jepet edhe kuptimi i idealit minimal të djathtë.

***Përkufizim* 2.2.6.** [15] *Një gjysmëgrup S do të quhet abundant (sipas idealeve) atëherë kur plotësohen njëkohësisht dy kushte:*

(1) *Çdo ideal i majtë në S përmban një ideal të majtë minimal*

(2) *Çdo ideal i majtë minimal i S, përmban një idempotent*

Ne do të tregojmë se përkufizimet e gjysmëgrupeve abundantë sipas $*$ - relacioneve dhe sipas idealeve minimalë të dhënë më sipër, nuk janë ekujvalentë.

***Kundërshembull* 2.2.1.** Le të jetë $S = \{0_1, 0_2, 0_3, \ldots. 0_i, \ldots\}$ dhe "$\cdot$" shumëzim në S i përcaktuar si më poshtë:

$$0_i \cdot 0_j = 0_k \quad \text{ku} \quad k = \max\{i, j\}$$

Është e qartë se shumëzimi i përcaktuar në S gëzon vetinë e shoqërimit. Pra $(S,\cdot)$ është gjysmëgrup. Gjithashtu, nga ky përcaktim rrjedh se

$$\forall\, i \in N,\ \ 0_i \cdot 0_i = 0_i$$

Kjo do të thotë se çdo element i S është idempotent, dmth S është gjysmëgrup abundant sipas $*$ - relacioneve $\mathcal{R}^*$ dhe $\mathcal{L}^*$.

Nga ana tjetër, le të supozojmë se L është një ideal i majtë i këtij gjysmëgrupi dhe n indeksi më i vogël elementëve të L. Nëse $0_i \in L$, atëherë $n \leq i$ dhe $SL = L$. Vërtetë, meqë L është ideal i majtë atëherë $SL \subset L$. Por kemi të vërtetë edhe përfshirjen $L \subset SL$, sepse çdo element $0_i \in L$ shkruhet në formën $0_i \cdot 0_i$ dhe se $0_i \cdot 0_i \in SL$.

Tani, meqë $0_n \in L$ dhe për çdo $i > n$, kemi $0_i = 0_i \cdot 0_n \in SL = L$, do të rrjedhë:

$$L = \{0_n, 0_{n+1}, 0_{n+2}, \ldots.\}$$

Kështu kemi treguar se kur L është një ideal i majtë i S atëherë ai është i formës së treguar më sipër. Por, nga përcaktimi i veprimit në gjysmëgrupin S është e vërtetë gjithashtu se çdo nënbashkësi e S e formës:

$$L_n = \{0_n, 0_{n+1}, 0_{n+2}, \ldots.\} \qquad (2.2.1)$$

është ideal i majtë në S. Kjo do të thotë se idealet e majta në S janë vetëm ato të formës së mësipërme (2.2.1), për $n \in N$.

Tani është e qartë se nga vetë trajta e idealeve të majta L_n, asnjëri prej tyre nuk përmban ideal minimal, sepse për këto ideale ne mund të shkruajmë:

$$L_1 \supset L_2 \supset L_3 \supset \ldots.. \supset L_i \supset \ldots..$$

Pra cënohet pika (1) e përkufizimit të gjysmëgrupeve abundantë sipas idealeve, që do të thotë se S nuk është abundant sipas këtij përkufizimi.

Kështu, nga kundërshembulli i mësipërm arrijmë në përfundimin se përkufizimet e gjysmëgrupeve abundantë sipas $*$ - relacioneve $\mathcal{R}^*$, $\mathcal{L}^*$ dhe idealeve, nuk janë ekujvalentë. ■

Po japim tani përkufizimet e disa tipeve të tjerë gjysmëgrupesh abundantë.

Përkufizim* 2.2.7.** [17,18] *Gjysmëgrupi adekuat S quhet* ***adekuat i tipit A*, atëherë kur për çdo element a nga S dhe për për çdo idempotent e nga $E(S)$ të kemi:*

$$eS \cap aS = eaS \quad \textit{dhe} \quad Se \cap Sa = Sae$$

J. B. Fountain në [14] dhe M. V. Lawson në [16], kanë dhënë edhe një përkufizim tjetër për gjysmëgrupet adekuatë të tipit A:

Përkufizim* 2.2.8.** [14,16] *Gjysmëgrupi adekuat S quhet* ***adekuat i tipit A*, atëherë kur për çdo element a nga S dhe për për çdo idempotent e nga $E(S)$ të kemi:*

$$ea = a(ea)^* \quad \textit{dhe} \quad ae = (ae)^+ a$$

Ne nuk po ndalemi këtu për të treguar ekujvalencën e këtyre dy përkufizimeve, sepse nuk është ky qëllimi ynë.

Përkufizim* 2.2.9.** [19] *Një gjysmëgrup abundant S quhet* ***idempotent-connected (*shkurt* IC) *nëse për çdo* $a \in S$ *ekzistojnë* $a^+ \in E(S) \cap R_a^*$, $a^* \in E(S) \cap L_a^*$ *dhe bijeksjoni* θ $: < a^+ > \to < a^* >$ *i tillë që* $xa = a(x\theta)$ *për të gjitha* $x \in < a^+ >$

Le të jetë *S* një gjysmëgrup abundant me bashkësi idempotentësh E dhe U një nëngjysmëgrup i tij.

***Përkufizim* 2.2.10.** [12] *Nëngjysmëgrupi* U *i* S *do të quhet* $*$*-nëngjysmëgrup i majtë* (*i dhjatht) i* S *në qoftë se për çdo* $a \in U$, *ekziston* $e \in U \cap E(S)$ *i tillë që:*

$$a\mathcal{L}^*(S)e \quad [a\mathcal{R}^*(S)e]$$

Në rastin kur *U* është njëkohësisht $*$-nëngjysmëgrup i majtë dhe i djathtë i *S*, atëherë U do të quhet $*$*-nëngjysmëgrup* i *S*.

Në [12], El – Qallali, me anë të lemës së mëposhtme tregon se si mund të gjendet një $*$-nëngjysmëgrup i një gjysmëgrupi abundant *S*:

Lema 2.2.1. [12] *Nëqoftë se S është një gjysmëgrup abundant dhe* e *një idempotent i tij, atëherë* eSe *është* $*$*- nëngjysmëgrup i S.* ■

Duke u nisur nga përkufizimi për nëngjysmëgrupin transversal inversiv S^o të një gjysmëgrupi të rregullt *S*, i dhënë në [20] nga D.B. McAlister dhe T.S. Blyth, A. El. Qallali në [18] ka dhënë këtë përkufizim të ngjashëm në gjysmëgrupet abundantë:

Përkufizim* 2.2.11.** [18] *Le të jetë* S^o *një* $*$*-nëngjysmëgrup adekuat i gjysmëgrupit abundant S dhe* E^o *semillatica e idempotentëve të* S^o. *Atëherë* S^o *do të quhet* ***adekuat transversal *për S nëse për çdo element* $x \in S$, *ekziston një element i vetëm* $x^o \in S^o$ *dhe idempotentët* $e, f \in E(S)$ *të tillë që* $x = ex^of$, *ku* $e\mathcal{L}x^{o+}$ *dhe* $f\mathcal{R}x^{o*}$ *për* $x^{o+}, x^{o*} \in E^o$.

A. El. Qallali në [18] ka treguar se idempotentët e dhe f janë të vetmit elementë të përcaktuar nga *x* dhe të tillë që $e\mathcal{R}^*x$ dhe $f\mathcal{L}^*x$ në *S*. Ne do ti shënojmë ato përkatsisht me e_x dhe f_x. Në [21] X. J. Kong ka vërtetuar pohimin e mëposhtëm:

***Pohim* 2.2.2.** [21] *Nëse* S^o *është një nëngjysmëgrup adekuat transversal i një gjysmëgrupi abundant S, dhe* $a,b \in S^o$, $c \in S$ *janë të tillë që* $a\mathcal{R}^*c\mathcal{L}^*b$, *atëherë* $c \in S^o$. ■

Duke u bazuar në pohimin e mësipërm, Xiangjun Kong dhe Pei Wang në [22] vërtetuan dy pohime të tjerë të rëndësishëm:

***Pohim* 2.2.3.** [22] *Nëse S është një gjysmëgrup abundant me një adekuat transversal* S^o, *atëherë çdo element i rregullt* $x \in S$ *ka një invers të vetëm në* S^o, *pra* $\left|V\ x \cap S^o\right| = 1$ ■

***Pohim* 2.2.4.** [22] *Le të jetë S një gjysmëgrup abundant me një adekuat transversal* S^o. *Në këto kushte, gjysmëgrupi S do të jetë i rregullt vetëm atëherë kur* S^o *është gjysmëgrup inversiv.* ■

Kapitulli 3

3. GJYSMËGRUPET KUAZI-ADEKUATË

Siç pamë në kapitullin paraardhës, gjysmëgrupet kuazi-adekuatë përbënin një nënklasë të klasës së gjysmëgrupeve abundantë, ku bashkësia e idempotentëve të një gjysmëgrupi të tillë formonte nëngjysmëgrup. Në këtë kapitull ne do të ndalemi fillimisht në disa veti kryesore të gjysmëgrupeve kuazi-adekuatë duke përgatitur terrenin për ndërtimin e një lloji të veçantë gjysmëgrupi kuazi-adequat që do përbëjë dhe pjesën kryesore të këtij kapitulli.

3.1. Disa njohuri bazë mbi gjysmëgrupet kuazi-adekuatë

El-Qallali në [12] futi konceptin e idempotentit medial dhe medial normal në gjysmëgrupet abundantë. Le të jetë S një gjysmëgrup abundant dhe E bashkësia e idempotentëve të tij.

Përkufizim* 3.1.1.** [12] *Një idempotent* u *i gjysmëgrupit abundant* S *quhet* ***medial*, në qoftë se*

$$\forall x \in \overline{E(S)},\ xux = x$$

ku $\overline{E(S)} = \overline{E}$ *është nëngjysmëgrupi i* S *i gjeneruar prej idempotentëve të tij* $E(S) = E$.

Përkufizim* 3.1.2.** [12] *Një idempotent medial* u *i një gjysmëgrupi abundant quhet* ***normal*, në qoftë se banda* $u\overline{E}u$ *është ndërruese.*

Është evidente që $u\overline{E}u$ është bandë idempotentësh sepse $\forall x \in u\overline{E}u,$ kemi:

$$x^2 = x \cdot x = uyu \cdot uyu = u(yuy)u = uyu = x$$

dhe për çdo dy elementë $uxu, uyu \in u\overline{E}u$

$$uxu \cdot uyu = u(uxu \cdot uyu)u \in u\overline{E}u$$

sepse prodhimi $uxu \cdot uyu$ është element i $\overline{E}$ si prodhim dy idempotentësh.

***Pohim* 3.1.1.** [12] *Nëqoftëse* S *është një gjysmëgrup abundant që përmban një idempotent medial u, atëherë kemi*:

$$\forall x \in S,\ e \in R_x^* \cap E,\ f \in L_x^* \cap E,\ x = eux = xuf = euxuf$$

Vërtet, nga rrjedhimi 2.1.1 rrjedh:

$$e \in R_x^* \cap E \Rightarrow (e,x) \in \mathcal{R}^* \Rightarrow x = ex = eue \cdot x = eu \cdot ex = eux\,,$$

dhe

$$e \in L_x^* \cap E \Rightarrow (e,x) \in \mathcal{L}^* \Rightarrow x = xf = x \cdot fuf = xf \cdot uf = xuf$$

Kështu nga $x = eux$ dhe $x = xuf$ ne kemi $x = euxuf$ ■

***Pohim* 3.1.2.** [23] *Nëqoftë se S është një gjysmëgrup abundant që përmban një idempotent medial u, atëherë uS, Su, dhe uSu janë gjysmëgrupe kuasi-adekuate të tilla që:*

$$E(uS) = u\overline{E} = uE,$$
$$E(Su) = \overline{E}u = Eu,$$
$$E(uSu) = u\overline{E}u = uEu$$

***Përkufizim* 3.1.3.** [24] *Një element u i një gjysmëgrupi S quhet **njësh i mesëm** i S në qoftë se $aub = ab$ për të gjithë elementët $a,b \in S$.*

Është evident fakti se katrori i njëshit të mesëm u^2 është idempotent, por nuk mund të themi të njëjtën gjë për elementin u

***Përkufizim* 3.1.4.** [2] *Një bandë E quhet **normale** atëherë kur për çdo tre elementë $e, x, y \in E$ kemi:*

$$exye = eyxe$$

***Lema* 3.1.1.** [23] *Nëse E është bandë që përmban një idempotent medial normal u, atëherë E është bandë normale.* ■

Duke shfrytzuar lemën e mësipërme ne kemi vërtetuar lemën e mëposhtme e cila do të na shërbej më pas kur të kalojmë në ndërtimin e gjysmëgrupit kuazi-adekuat:

***Lema* 3.1.2.** *Nëse S është një gjysmëgrup abundant që përmban një idempotent medial normal u, atëherë S është kuazi-adekuat vetëm kur u është njësh i mesëm në S.*

***Vërtetim*:** Nëse u është njësh i mesëm në S, atëherë për të gjithë *x,y* në E kemi:

$$(xy)^2 = xy \cdot xy = x \cdot uyu \cdot uxu \cdot y = x \cdot uxu \cdot uyu \cdot y = xx \cdot yy = xy$$

që do të thotë se S është gjysmëgrup kuazi-adekuat.

Anasjellas, supozojmë që S është gjysmëgrup kuazi-adekuat. Atëherë E është bandë dhe për më tepër bandë normale (lema 3.1.1). Atëherë nëse $e, f \in E$ do të kemi:

$$
\begin{aligned}
euf &= (euf)uu(euf) = e(u \cdot fu)e \cdot uf = \\
&= e(fu \cdot u)e \cdot uf = e \cdot f(ue \cdot u)f = \\
&= e \cdot f(u \cdot ue)f = \\
&= (ef)u(ef) = \\
&= ef
\end{aligned}
$$

Barazimi $euf = ef$ do të thotë u është njësh i mesëm në E. Por meqë S është kuazi-adekuat, atëherë për të gjithë $x, y \in S$, do të ekzistojnë $e, f \in E$ të tilla që $x \mathcal{L}^* e$ dhe $y \mathcal{R}^* f$ prej nga rrjedh se $x = xe$ dhe $y = fy$. Në këto kushte do të kemi:

$$xuy = xe \cdot u \cdot fy = x \cdot (euf) \cdot y = x \cdot ef \cdot y = xe \cdot fy = xy$$

që tregon se u është njësh i mesëm në S. ■

3.2. Ndërtimi i gjysmëgrupit kuazi-adekuat që përmban një idempotent medial normal

Në këtë pjesë ne do të përshkruajmë ndërtimin e gjysmëgrupeve kuazi-adekuatë të cilët përmbajnë një idempotent medial normal. Ky ndërtim do të realizohet nëpërmjet një bande E e cila përmban një idempotent medial normal u dhe një gjysmëgrupi adekuat S me semillaticë idempotentësh $E^0 = uEu$.

Tani le të jetë E një bandë që përmban një idempotent medial normal u dhe S një gjysmëgrup adekuat me semillaticë idempotentësh $E^0 = uEu$. Le të jenë $\mathcal{R}$ dhe $\mathcal{L}$ relacionet e Grinit në E. Nga lema 3.1.1. rrjedh që E është bandë normale dhe për më tepër do të jetë e vërtetë kjo lemë:

***Lema* 3.2.1.** [23] *Nëse* $x, y \in S$, $e, f \in E$ *dhe* $e \mathcal{R} x^*$, $f \mathcal{L} y^+$, *atëherë*

(1) $xefy = xy$

(2) $(xef)^+ = (xy)^+$, $(efy)^* = (xy)^*$ ■

Le të marrim në konsiderate bashkësinë:

$$K = K(E, S) = \{ (e, x, f) \in Eu \times S \times uE \ : \ e \mathcal{L} x^+, \ f \mathcal{R} x^* \}$$

Dhe përcaktojmë në K veprimin binar algjebrik si më poshtë:

$$(e, x, f)\,(g, y, h) = \left(e(xy)^+, xy, (xy)^* h\right)$$

Ky veprim është i mirëpërcaktuar sepse:

$$e\,\mathcal{L}\,x^{+} \Rightarrow e(xy)^{+}\,\mathcal{L}\;x^{+}(xy)^{+} \Rightarrow e(xy)^{+}\,\mathcal{L}(xy)^{+}$$

dhe dualisht do të kemi gjithashtu edhe $(xy)^{*}h\,\mathcal{R}(xy)^{*}$, që do të thotë se

$$(e(xy)^{+}, xy, (xy)^{*}h) \in Eu \times S \times uE = K$$

Duke u nisur nga sa thamë më sipër, rrjedh vërtetësia e kësaj teoreme konstruksioni:

***Teoremë* 3.2.1.**

1) *K me veprimin e mësipërm të përcaktuar në të është gjysmëgrup*

2) $E(K) = \{ (e, x, f) \in K : x \in E^{0}\}$

3) *K është gjysmëgrup kuazi-adekuat*

4) $\bar{u} = (u,u,u)$ *është idempotent medial normal në K*

5) $E(K) \cong E$ *dhe* $\bar{u}K\bar{u} \cong S$

***Vërtetim*:**

1) Le të jenë $(e, x, f), (g, y, h), (s, z, t) \in K$. Shohim që:

$$\begin{aligned}[(e, x, f)\,(g, y, h)]\,(s, z, t) &= [\,e(xy)^{+},\ xy\,, (xy)^{*}h\,]\,(s, z, t) = \\ &= (\,e(xy)^{+}\,(xyz)^{+},\ xyz\,,\ (xyz)^{*}t) = \\ &= (\,e((xy)^{+}(xy)z)^{+},\ xyz\,,\ (xyz)^{*}t) = (\,e(xyz)^{+},\ xyz\,,\ (xyz)^{*}t)\end{aligned}$$

Në mënyrë të ngjashme gjejmë gjithashtu:

$$(e, x, f)\,[(g, y, h)\,(s, z, t)] = (\,e(xyz)^{+},\ xyz\,,\ (xyz)^{*}t\,)$$

Kështu veprimi i përcaktuar më sipër në K gëzon vetinë e shoqërimit, dmth K është gjysmëgrup në lidhje me këtë veprim.

2) Nëse $(e, x, f) \in E(K)$ atëherë

$$\begin{aligned}(e, x, f)^{2} &= (\,e(xx)^{+}, xx,\ (xx)^{*}f\,) = \\ &= (\,e(xx)^{+}, xx,\ (xx)^{*}f\,) = (e, x, f)\end{aligned}$$

Pra, $x^{2} = xx = x \in E^{0}$

Anasjellas, nëse $(e, x, f) \in K$ dhe $x^{2} = x \in E^{0}$, do të kemi:

$$\begin{aligned}(e, x, f)^{2} &= (e(xx)^{+}, xx,\ (xx)^{*}f) = \\ &= (e\,x^{+}, x,\ x^{*}f) = \\ &= (e, x, f)\end{aligned}$$

kështu që

$$E(K) = \{\ (e, x, f) \in K :\ x \in E^{0}\ \}$$

3) Nëse $(e, x, f) \in K$, mund të provojmë që $(e, x, f)\,\mathcal{L}^{*}\,(e,\ x^{*}, f)$ në K ku $(e,\ x^{*}, f) \in E(K)$

<u>Së pari</u> shohim se:

$$(e, x, f)\,(e,\ x^*, f) = (\ e\,(x\ x^*)^+,\ x\ x^*, (x\ x^*)^*\ f\ ) =$$
$$= (\ e\,x^+,\ x\ ,\ x^* f\ ) =$$
$$= (e, x, f)$$

<u>Së dyti</u> nëse $(g, y, h), (s, z, t) \in K$ do të kemi:

$$(e, x, f)\,(g, y, h) = (e, x, f)\,(s, z, t) \ \Rightarrow\ (e,\ x^*, f)\,(g, y, h) = (e,\ x^*, f)\,(s, z, t)$$

Por,

$$(e, x, f)\,(g, y, h) = (e, x, f)\,(s, z, t) \Rightarrow \left(e(xy)^+,\ xy\ , (xy)^* h\right) = \left(e(xz)^+,\ xz\ , (xz)^* t\right)$$

prej nga

$$e(xy)^+ = e(xz)^+ \wedge xy = xz \wedge (xy)^* h = (xz)^* t \quad \textbf{(i)}$$

dhe

$$(e,\ x^*, f)\,(g, y, h) = \left(e(x^*y)^+,\ x^*y\ , (x^*y)^* h\right) \ \wedge\ (e,\ x^*, f)\,(s, z, t) = \left(e(x^*z)^+,\ x^*z\ , (x^*z)^* t\right)$$

Pra na duhet të tregojmë se:

$$\left(e(x^*y)^+,\ x^*y\ , (x^*y)^* h\right) = \left(e(x^*z)^+,\ x^*z\ , (x^*z)^* t\right)$$

Për komponentët e mesit vërejmë se nga $x^* \in E$ dhe $x^*\,\mathcal{L}^*\,x$ në S, do të rrjedhë:

$$xy = xz \Rightarrow x^*y = x^*z \quad \textbf{(ii)}$$

prej nga

$$e\,(x^*y)^+ = e(x^*z)^+ \quad \textbf{(iii)}$$

Nnërsa, për komponentin e tretë shohim që:

$$x^*\,\mathcal{L}^*\,x \ \Rightarrow x^*y\,\mathcal{L}^*\,xy \Rightarrow (x^*y)^*\,\mathcal{L}^*\,(xy)^*$$

Kështu, $(x^*y)^* = (xy)^*$ dhe në mënyrë të ngjashme $(x^*z)^* = (xz)^*$.
Por meqenëse nga **(i)** kemi $xy = xz$ atëherë:

$$(xy)^* h = (xz)^* t \ \Rightarrow\ (x^*y)^* h = (x^*z)^* t \quad \textbf{(iv)}$$

Nga **(i)**, **(ii)**, **(iii)**, **(iv)** rrjedh se:

$$\left(e(x^*y)^+,\ x^*y\ , (x^*y)^* h\right) = \left(e(x^*z)^+,\ x^*z\ , (x^*z)^* t\right)$$

ose

$$(e,\ x^*, f)\,(g, y, h) = (e,\ x^*, f)\,(s, z, t)$$

Prandaj,

$$(e, x, f)\,(g, y, h) = (e, x, f)\,(s, z, t) \Rightarrow (e,\ x^*, f)\,(g, y, h) = (e,\ x^*, f)\,(s, z, t)$$

që në bazë të rrjedhimit 2.1.1. do të thotë se $(e, x, f)\mathcal{L}^*(e, x^*, f)$ në K. Por meqenëse $x^* \in E^0$, atëherë, nga sa treguam në **2)** kemi $(e, x^*, f) \in E(K)$, që do të thotë se çdo $\mathcal{L}^*$-klasë në K përmban një idempotent. Në mënyrë duale ne mund të provojmë gjithashtu se edhe çdo $\mathcal{R}^*$- klasë në K përmban një idempotent. Pra, K është gjysmëgrup abundant.

Për të treguar se K është kuazi-adekuat ne duhet të provojmë që $E(K)$ është nëngjysmëgrup i K, dmth bandë. Vërtetë, nëse $(e, x, f), (g, y, h) \in E(K)$, atëherë $x, y \in E^0$, që do të thotë se :

$$xy \in E^0 \text{ dhe } (e, x, f)(g, y, h) = \left(e(xy)^+, xy, (xy)^* h\right) \in E(K)$$

Kështu që K është edhe gjysmëgrup kuazi-adekuat.

4) Shohim tani se elementi $\bar{u} = (u,u,u)$ është idempotent medial in K. Vërtetë, në qoftë se $(e, x, f) \in \overline{E(K)} = E(K)$ atëherë kemi:

$$\begin{aligned}(e,x,f)(u,u,u)(e,x,f) &= (e x^+, x, x^* u)(e, x, f)\\ &= (e, x, x^*)(e, x, f)\\ &= (e, x, f)\end{aligned}$$

dhe nëse

$$(u,u,u)(e,x,f)(u,u,u);\ (u,u,u)(g,y,h)(u,u,u) \in E(K)$$

atëherë

$$\begin{aligned}(u,u,u)(e,x,f)(u,u,u)\cdot(u,u,u)(g,y,h)(u,u,u) &= (x,x,x)\cdot(y,y,y)\\ &= (xy,xy,xy)\\ &= (yx,yx,yx)\\ &= (u,u,u)(g,y,h)(u,u,u)\cdot(u,u,u)(e,x,f)(u,u,u)\end{aligned}$$

Kështu $\bar{u}\,E(K)\,\bar{u}$ është semillaticë, që do të thotë se $\bar{u} = (u,u,u)$ është idempotent medial normal në K.

5) Le të jetë $\varphi : E(K) \to E$ i tillë që:

$$\forall (e,x,f) \in E(K),\ \varphi[(e,x,f)] = ef$$

φ - është syrjektiv sepse $\forall e \in E$ kemi $(eu, ueu, ue) \in E(K)$ dhe

$$\varphi[(eu,ueu,ue)] = euue = eue = e$$

Tani, nëse $(e,x,f),(g,y,h)$ janë dy elementë nga $E(K)$ të tilla që

$$\varphi[(e,x,f)] = ef = gh = \varphi[(g,y,h)]$$

atëherë nga përcaktimi i elementëve të K ne kemi:

$$e\,\mathcal{L}\,x^{+},\ f\,\mathcal{R}\,x^{*},\ g\,\mathcal{L}\,y^{+},\ h\,\mathcal{R}\,y^{*}$$

ose

$$e\,\mathcal{L}\,x,\ f\,\mathcal{R}\,x,\ g\,\mathcal{L}\,y,\ h\,\mathcal{R}\,y$$

sepse $x, y \in E^0$ që do të thotë se:

$$x^{+} = x^{*} = x \quad \text{dhe} \quad y^{+} = y^{*} = y\,,$$

prej nga do të kemi:

$$ex = e,\ \ xe = x,\ \ xf = f,\ \ fx = x,$$
$$gy = g,\ \ yg = y,\ \ yh = h,\ \ hy = y$$

Në këto kushte janë të vërteta implikimet:

$$\begin{aligned} ef = gh \ &\Rightarrow\ exf = gyh\ \Rightarrow \\ &\Rightarrow uexf = ugyh\ \Rightarrow \\ &\Rightarrow xuef = yugh\ \Rightarrow \\ &\Rightarrow\ xef = ygh\ \Rightarrow \\ &\Rightarrow xf = yh \\ &\Rightarrow f = h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ef = gh \ &\Rightarrow\ exf = gyh\ \Rightarrow \\ &\Rightarrow exfu = gyhu\ \Rightarrow \\ &\Rightarrow efux = ghuy\ \Rightarrow \\ &\Rightarrow\ efx = ghy\ \Rightarrow \\ &\Rightarrow ex = gy\ \Rightarrow \\ &\Rightarrow e = g \end{aligned}$$

dhe së fundmi,

$$\begin{aligned} ef = gh \ &\Rightarrow\ xf = yh\ \Rightarrow \\ &\Rightarrow xfu = yhu\ \Rightarrow \\ &\Rightarrow\ fux = huy\ \Rightarrow \\ &\Rightarrow\ fx = hy\ \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}\ ,$$

Nga ku rrjedh se, $(e, x, f) = (g, y, h)$. Kështu φ - është edhe injektiv, për pasojë bijektiv. Nga ana tjetër,

$$\begin{aligned} \varphi\,[(e, x, f)\cdot(g, y, h)] &= \varphi\,[(exy, xy, xyh)] = \\ &= exyh = efxygh = \\ &= exfgyh = ef\cdot gh = \\ &= \varphi\,[(e, x, f)]\cdot\varphi\,[(g, y, h)] \end{aligned}$$

që tregon se pasqyrimi φ - është izomorfizëm dhe $E(K) \cong E$.

Le të jetë $\psi: \bar{u} K \bar{u} \to S$ i tillë që $\psi\,[(u,u,u)(e,x,f)(u,u,u)] = x$

Pasqyrimi ψ - është syrjektiv sepse $\forall x \in S$ gjendet $(u,u,u)(x^+, x, x^*)(u,u,u) \in \bar{u} K \bar{u}$ i tillë që

$$\psi\,[(u,u,u)(x^+, x, x^*)(u,u,u)] = x$$

Gjithashtu, ψ - është edhe injektiv sepse për

$$(u,u,u)(e, x, \mathrm{f})(u,u,u);\ (u,u,u)(g, y, h)(u,u,u) \in \bar{u} K \bar{u}$$

kemi

$$\psi\,[(u,u,u)(e, x, \mathrm{f})(u,u,u)] = \psi\,[(u,u,u)(g, y, h)(u,u,u)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^+, x, x^*) = (y^+, y, y^*) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (u,u,u)(x^+, x, x^*)(u,u,u) = (u,u,u)(y^+, y, y^*)(u,u,u)$$

për më tepër kemi:

$$\begin{aligned}
&\psi\,[(u,u,u)(e, x, \mathrm{f})(u,u,u) \cdot (u,u,u)(g, y, h)(u,u,u)] = \\
&= \psi\,[(u,u,u)(ex^+, x, x^*) \cdot (g, y, h)(u,u,u)] = \\
&= \psi\,[(u,u,u)(e(xy)^+, xy, (xy)^*)(u,u,u)] = \\
&= xy = \\
&= \psi\,[(u,u,u)(e, x, \mathrm{f})(u,u,u)] \cdot \psi\,[(u,u,u)(g, y, h)(u,u,u)]
\end{aligned}$$

Pra përfundimisht kemi treguar se ψ është izomorfizëm dhe $\bar{u} K \bar{u} \cong S$. ■

Tani do të tregojmë se çdo gjysmëgrup kuazi-adekuat *S* që përmban një idempotent medial normal *u*, mund të ndërtohet (me afërsinë e izomorfizmit) si më sipër duke marrë si bandë normale $E = E(S)$ dhe si gjysmëgrup adekuat nëngjysmëgrupin *uSu* të *S*. Është e qartë se në bazë të Pohimit 3.1.2. kemi që *uSu* është gjysmëgrup kuazi-adekuat dhe se $E(uSu) = uEu$. Për më tepër *uEu* është semillaticë sepse *u* është idempotent medial normal. Kjo konfirmon faktin se gjysmëgrupi *uSu* është adekuat.

Në këto kushte në bazë të Teoremës 3.2.1, flitet për gjysmëgrupin kuazi-adekuat:

$$K = K(E, uSu) = \{(e, uxu, f) \in Eu \times uSu \times uE:\ e\,\mathcal{L}\,(uxu)^+,\ f\,\mathcal{R}\,(uxu)^*\}$$

ku veprimi binar i përcaktuar në K është:

$$(e, uxu, f) \cdot (g, uyu, h) = (e(uxuyu)^+, uxuyu, (uxuyu)^* h) = (e(uxyu)^+, uxyu, (uxyu)^* h)$$

***Teoremë* 3.2.2.** [26] *Për çdo gjysmëgrup kuazi-adekuat S që përmban një idempotent medial normal u kemi:* $K(E, uSu) \cong S$

***Vërtetim*:**

Le të jetë $f : K \to S$ i tillë që për çdo $(e, uxu, f) \in K$ të kemi: $f[(e, uxu, f)] = x$
Nga ky përcaktim rrjedh se f është funksion. Por f është syrjektiv sepse për çdo x nga S gjendet elementi $((uxu)^+, uxu, (uxu)^*) \in K$ [$(uxu)^+ \mathcal{L} (uxu)^+$ dhe $(uxu)^* \mathcal{R} (uxu)^*$], për të cilin kemi:

$$f[((uxu)^+, uxu, (uxu)^*)] = x$$

Nga ana tjetër, nëse për elementët $(e, uxu, f), (g, uyu, h) \in K$ do të kishim:

$$f[(e, uxu, f)] = f[(g, uyu, h)],$$

atëherë do të rrjedhë $x = y$. Prej nga marrim:

$$uxu = uyu \quad (3.2.1)$$

Por, meqë $e \mathcal{L} (uxu)^+$ rrjedh $e = e\ (uxu)^+$ dhe $(uxu)^+ e = (uxu)^+$ dhe nga vërtetimi që Hui Chen i ka bërë në [23] pikës (1) të lemës 3.2.1 do të kemi $e \in E^0 = uEu$. Në këto kushte janë të vërteta barazimet:

$$e = e\ (uxu)^+ = (uxu)^+ e = (uxu)^+ \quad (3.2.2)$$

Në të njëjtën mënyrë tregohet që:

$$f = (uxu)^*, \quad g = (uyu)^+ = (uxu)^+, \quad h = (uyu)^* = (uxu)^* \quad (3.2.3)$$

Nga (3.2.2), (3.2.3) rrjedh $e = g$ dhe $f = h$ që sëbashku me (3.2.1) kompletojnë faktin se:

$$(e, uxu, f) = (g, uyu, h)$$

Pra, funksioni f i ndërtuar më sipër është bijektiv.
Së fundmi, për dy elementë çfardo $(e, uxu, f), (g, uyu, h) \in K$ kemi:

$$\begin{aligned} f[(e, uxu, f) \cdot (g, uyu, h)] &= f[((uxu)^+, uxu, (uxu)^*) \cdot ((uyu)^+, uyu, (uyu)^*)] = \\ &= f[((uxu)^+ (uxuyu)^+, uxuyu, (uxuyu)^* (uyu)^*)] = \\ &= xuy = xy = \\ &= f[(e, uxu, f)] \cdot f[(g, uyu, h)] \end{aligned}$$

që do të thotë se f është izomorfizëm dhe se $K(E, uSu) \cong S$ ■

Kapitulli 4

4. GJYSMËGRUPET ADEKUATË

Siç pamë në kapitullin e dytë, gjysmëgrupet adequatë ishin një nënklasë e rëndësishme klasës së gjysmëgrupeve abundantë. Ata përbënin gjithashtu një zgjerim të klasës së gjysmëgrupeve inversivë. Në këtë kapitull ne do të japim disa veti kryesore të tyre, si dhe do të formulojmë dhe vërtetojmë pohime të reja duke marrë shkas nga disa pohime analoge të formuluara në [28] nga El. Qallali për gjysmëgrupet kuazi-adekuatë.

4.1. Veti të gjysmëgrupeve adekuatë dhe disa kontribute të mëtejshme

Në [14] jepet kjo lemë për të karakterizuar gjysmëgrupin adekuat:

***Lema* 4.1.1.** [14] *Një gjysmëgrup S është adekuat vetëm atëherë kur çdo $\mathcal{R}^*$-klasë dhe çdo $\mathcal{L}^*$- klasë përmban një idempotent të vetëm dhe gjysmëgrupi $< E(S) > = \overline{E(S)}$ është i rregullt.* ■

Për çdo element $a \in S$, ku S është një gjysmëgrup adekuat, ne do të shënojmë me a^+ dhe a^* idempotentët e vetëm respektivisht të klasave R_a^* dhe L_a^*. Kështu mund të shkruajmë:

$$\{a^+\} = R_a^* \cap E(S) \text{ dhe } \{a^*\} = L_a^* \cap E(S)$$

Nga ky përcaktim i elementëve a^+ dhe a^*, rrjedh menjëherë se:

$$a = a^+a = aa^* = a^+aa^*,$$

për më tepër, për $a \in S$ dhe $e \in E(S)$ do të kemi gjithashtu:

$$(ea)^+ = ea^+ \text{ dhe } (ae)^* = a^*e$$

Në [27], kemi vërtetuar këtë lemë:

***Lema* 4.1.2.** *Nëse S është një gjysmëgrup abundant që përmban një idempotent medial normal u, atëherë S është adekuat vetëm kur u është njësh në S.*

Vërtetim: Nëse S është gjysmëgrup adekuat dhe $e \in E$, atëherë

$$e = eue = e^2u = eu = ue$$

Kështu që:

$$xu = xx^*u = xx^* = x \text{ dhe } ux = ux^+x = x^+x = x$$

për të gjithë x në S, ku $\{x^*\} = L_x^* \cap E$ dhe $\{x^+\} = R_x^* \cap E$.
Kjo do të thotë se u është njësh i gjysmëgrupit S.
Anasjellas, nëse u është njësh i gjysmëgrupit abundant S, atëherë u është edhe njësh i mesëm i tij. Kështu nga nga lema 3.1.1 për gjysmëgrupet kuazi-adekuatë rrjedh se S është kuazi-adekuat, dmth E është bandë normale. Për më tepër, për të gjitha e, f në E ne kemi:

$$ef = uefu = ufeu = fe$$

Pra, E është semillaticë dhe konfirmon faktin se S është gjysmëgrup adequat. ■
Duke u nisur nga pohimi 1.3. në [28] (« *Quasi-adequate semigroups* » *A. El. Qallali, J. B. Fountain, 1980*) për gjysmëgrupet kuazi-adekuatë, ne kemi formuluar dhe provuar një pohim analog për gjysmëgrupet adekuatë:

***Pohim* 4.1.1.** *Nëse S është një gjysmëgrup dhe R bashkësia e elementëve të rregullt në S, atëherë konditat e mëposhtme janë ekujvalente*:

- ***a)*** *S është adekuat*
- ***b)*** *S është abundant dhe R është nëngjysmëgrup inversiv i S*
- ***c)*** *R është nëngjysmëgrup inversiv i S dhe për çdo element $a \in S$ kemi:*

$$R \cap L_a^* \neq \Phi \ \wedge \ R \cap R_a^* \neq \Phi,$$

ku L_a^*, R_a^* janë klasat e ekujvalencës të elementit a sipas relacioneve $\mathcal{L}^*$ dhe $\mathcal{R}^*$ në S

***Vërtetim*:**
a) $\Rightarrow$ ***b)***
Le të jenë $a, b \in R$ dy elementë të çfardoshëm. Meqë a, b jënë element të rregullt, atëherë ekzistojnë përkatsisht elementët a' dhe b' të tillë që:

$$a = aa'a \text{ dhe } b = bb'b$$

Kështu kemi:

$$ab = (aa'a)(bb'b) = a(a'a)(bb')b = a(bb')(a'a)b = (ab)(b'a')(ab)$$

që do të thotë se ab është gjithashtu element i rregullt. Kjo tregon se R është nëngjysmëgrup i S. Nga ana tjetër për çdo idempotent $e \in S$ kemi $e = eee$ që do të thotë se $e \in R$, pra $E(S) = E(R)$. Por meqë S është adekuat, rrjedh se idempotentët në $E(S) = E(R)$ janë të përkëmbyshëm e për pasojë R është nëngjysmëgrup inversiv i S.
b) $\Rightarrow$ ***c)***
Meqë nga ***b)***, R është nëngjysmëgrup inversiv i S, për të provuar ***c)*** mbetet të provojmë se për çdo element $a \in S$ kemi:

$$R \cap L_a^* \neq \Phi \ \wedge \ R \cap R_a^* \neq \Phi$$

Kjo është evidente sepse çdo $\mathcal{L}^*$-klasë dhe çdo $\mathcal{R}^*$-klasë në *S* ka të paktën një idempotent i cili, si element i rregullt, bën pjesë edhe në *R*. Kështu që $R \cap L_a^* \neq \Phi$ dhe $R \cap R_a^* \neq \Phi$, për çdo element $a \in S$.

c) $\Rightarrow$ ***a)***

Meqë $R \cap L_a^* \neq \Phi$, do të thotë se ekziston elementi i rregullt $b \in R$ i tillë që $b \in L_a^*$. Le të jetë $b' \in V(b)$, dmth $b = bb'b$ dhe $b' = b'bb'$. Kështu do të kemi $b \mathcal{L} b'b$ e për pasojë edhe $b \mathcal{L}^* b'b$. Por meqë $b'b$ është idempotent në *S* dhe meqë $a\mathcal{L}^* b \mathcal{L}^* b'b$ rrjedh se çdo $\mathcal{L}^*$- klasë (dhe njëlloj çdo $\mathcal{R}^*$- klasë) në *S* ka të paktën një idempotent. Pra *S* është gjysmëgrup abundant. Nga ana tjetër, meqë *R* është inversiv do të thotë se $E(R)$ është nëngjysmëgrup ndërrues i *R*. Por meqë $E(S) = E(R)$ rrjedh se *S* është gjysmëgrup adekuat. ■

Nga [19] (***Idempotent- connected abundant semigroups,*** *A. El. Qallali, J. B. Fountain, 1981*) kemi këto përkufizime:

Përkufizim* 4.1.1.** [19] *Një homomorfizëm* $\phi : S \to T$, *ku* S *dhe* T *janë gjysmëgrupe, quhet* ***homomorfizëm i mirë *nëqoftëse për çdo dy elemente a,b të* S *kemi*:

$$a \mathcal{L}^*(S)\, b \;\Rightarrow\; a\phi \mathcal{L}^*(T)\, b\phi \quad \text{dhe} \quad a \mathcal{R}^*(S)\, b \;\Rightarrow\; a\phi \mathcal{R}^*(T)\, b\phi$$

Përkufizim* 4.1.2.** [19] *Një kongruencë* ρ *në një gjysmëgrup* S *quhet* ***kongruencë e mire *atëherë kur homomorfizmi natyral* $\psi : S \to S / \rho$ *është homomorfizëm i mire.*

***Pohim* 4.1.2.** *Nëqoftëse* S *është gjysmëgrup adekuat dhe* ρ *është kongruencë e mire në* S, *atëherë për çdo idempotent* $a\rho$ *të gjysmëgrupit faktor* S / ρ *do të ekzistojë idempotenti* $e \in E(S)$ *i tillë që* $e\rho = a\rho$.

***Vërtetim*:** Le të jenë $a^+ = R_a^* \cap E(S)$ dhe $a^* = L_a^* \cap E(S)$ dy idempotentët e vetëm të klasave të ekujvalencës R_a^* dhe L_a^*. Pra do të kemi $a^+ \mathcal{R}^*(S)\, a$ dhe $a^* \mathcal{L}^*(S)\, a$. Por, meqë ρ është kongruencë e mire në S, kjo do të thotë se do të kemi gjithashtu të vërteta relacionet:

$$(a^+\rho)\, \mathcal{R}^*(S / \rho)\, (a\rho) \text{ dhe } (a^*\rho)\, \mathcal{L}^*(S / \rho)\, (a\rho)$$

ose

$$(a^+\rho)\, \mathcal{R}\, (a\rho) \text{ dhe } (a^*\rho)\, \mathcal{L}\, (a\rho)$$

në ndonjë gjysmëgrup që ka si nëngjysmëgrup të tijin gjysmëgrupin S / ρ.

Prandaj, meqë $(a^+\rho), (a^*\rho) \in E(S / \rho)$ janë të vërteta implikimet:

$$(a^+\rho)\, \mathcal{R}\, (a\rho) \;\Rightarrow\; [(a\rho)\cdot(a^+\rho) = (a^+\rho) \wedge (a^+\rho)\cdot(a\rho) = (a\rho)]$$

dhe

$$(a^*\rho)\,\mathcal{L}\;\;(a\rho)\;\;\Rightarrow\;\;[(a\rho)\cdot(a^*\rho)=(a\rho)\wedge(a^*\rho)\cdot(a\rho)=(a^*\rho)]$$

Shënoj tani $e=a^+\cdot a^*$ që është një idempotent i $E(S)$ si prodhim i dy idempotentëve të gjysmëgrupit adekuat S. Për këtë idempotent kemi:

$$\begin{aligned}
e\rho &= (a^+\cdot a^*)\rho=(a^+)\rho\cdot(a^*)\rho=\\
&=[(a\rho)(a^+)\rho]\cdot[(a^*\rho)(a)\rho]=\\
&=(a\rho)\cdot[(a^+)\rho\cdot(a^*\rho)]\cdot(a)\rho=\\
&=(a\rho)\cdot[(a^+a^*)\rho]\cdot(a)\rho=\\
&=(a\rho)\cdot[(a^*a^+)\rho]\cdot(a)\rho=\\
&=(a\rho)\cdot[(a^*)\rho\cdot(a^+\rho)]\cdot(a)\rho=\\
&=[(a\rho)(a^*)\rho]\cdot[(a^+\rho)(a)\rho]=\\
&=(a\rho)\cdot(a\rho)=\\
&=a\rho
\end{aligned}$$

Kjo përfundon vërtetimin e këtij pohimi. ■

***Pohim* 4.1.3.** *Nëqoftëse S është gjysmëgrup adekuat dhe ρ është kongruencë e mire në S, atëherë edhe gjysmëgrupi faktor S/ρ është gjithashtu gjysmëgrup adekuat.*

***Vërtetim*:** Së pari do të tregojmë që gjysmëgrupi factor S/ρ është gjysmëgrup abundant. Le të jetë $a\rho$ një element çfardo nga gjysmëgrupi faktor S/ρ. Meqë gjysmëgrupi S është adekuat, atëherë në klasat R_a^* dhe L_a^* do të egzistojnë idempotentët e vetëm përkatsisht $a^+=R_a^*\cap E(S)$ dhe $a^*=L_a^*\cap E(S)$. Pra do të kemi $a^+\,\mathcal{R}^*(S)\,a$ dhe $a^*\,\mathcal{L}^*(S)\,a$. Por meqë ρ është kongruencë e mirë, do të kemi gjithashtu:

$$(a^+\rho)\,\mathcal{R}^*(S/\rho)\,(a\rho)\;\text{ dhe }\;(a^*\rho)\,\mathcal{L}^*(S/\rho)\,(a\rho)$$

që do të thotë se klasat e ekuivalencës $R_{a\rho}^*$ dhe $L_{a\rho}^*$ të gjysmëgrupit faktor S/ρ përmbajnë përkatsisht idempotentët $a^+\rho$ dhe $a^*\rho$. Pra, gjysmëgrupi faktor S/ρ është abundant.

Nga ana tjetër, duke shfytëzuar pohimin 4.1.2, për çdo idempotent $a\rho\in S/\rho$ do të egzistojë idempotenti e në $E(S)$ të tillë që $e\in a\rho$ dmth $e\rho=a\rho$. Pra, bashkësia e idempotentëve të gjysmëgrupit faktor S/ρ nuk ka elementë të tjerë përveç atyre të trajtës $e\rho$ për $e\in E(S)$. Kështu që për çdo dy idempotentë $e\rho$ dhe $f\rho$ në S/ρ (ku $e,f\in E(S)$) do të kemi $(e\rho)\cdot(f\rho)=(ef)\rho$ që është gjithashtu idempotent i S/ρ sepse ef është idempotent i S. Kemi treguar kështu që gjysmëgrupi S/ρ është kuazi-adekuat. Së fundi, duke shfrytzuar faktin që gjysmëgrupi S është adekuat, kemi:

$$e\rho \cdot f\rho = (ef)\rho = (fe)\rho = f\rho \cdot e\rho$$

që do të thotë se idempotentët në S/ρ janë të përkëmbyshëm. Pra S/ρ është gjysmëgrup adekuat. ■

***Pohim* 4.1.4.** *Le të jetë $\psi : S \to T$ një homomorfizëm i mire i gjysmëgrupit adekuat S në gjysmëgrupin T. Nëse f është një idempotent në $S\psi$, atëherë do të ekzistojë një idempotent e në S për të cilin kemi $e\psi = f$ dhe për më tepër nëngjysmëgrupi $S\psi$ i T është adekuat.*

***Vërtetim*:** Le të jetë f një idempotent në $S\psi$. Kjo do të thotë se ekziston një element a në S për të cilin kemi $a\psi = f$. Meqë gjysmëgrupi S është adekuat, klasat e ekujvalencës R_a^* dhe L_a^* përmbajnë nga një idempotent të vetëm përkatsisht a^+ dhe a^*. Shëmbëllimet e a^+ dhe a^* sipas homomorfizmit ψ janë gjithashtu idempotentë në nëngjysmëgrupin $S\psi$ të T. Vërtet:

$$a^+\psi \cdot a^+\psi = (a^+ \cdot a^+)\psi = a^+\psi$$

dhe

$$a^*\psi \cdot a^*\psi = (a^* \cdot a^*)\psi = a^*\psi$$

Nga ana tjetër, meqë ψ është homomorfizëm i mirë kemi:

$$a^+ \mathcal{R}^*(S)\, a \Rightarrow a^+\psi\, \mathcal{R}^*(T)\, a\psi \Rightarrow a^+\psi\, \mathcal{R}(T')\, a\psi$$

dhe

$$a^* \mathcal{L}^*(S)\, a \Rightarrow a^*\psi\, \mathcal{L}^*(T)\, a\psi \Rightarrow a^*\psi\, \mathcal{L}(T'')\, a\psi$$

ku T' dhe T'' janë gjysmëgrupe që përmbajnë gjysmëgrupin T si nëngjysmëgrup të tyre. Nga $a^+\psi\, \mathcal{R}(T')\, a\psi$ dhe $a^*\psi\, \mathcal{L}(T'')\, a\psi$ nxjerrim këto barazime:

$$a\psi \cdot a^+\psi = a^+\psi; \quad a^+\psi \cdot a\psi = a\psi;$$
$$a^*\psi \cdot a\psi = a^*\psi; \quad a\psi \cdot a^*\psi = a\psi;$$

Duke shënuar tani $e = a^+a^*$, i cili është një idempotent në S si prodhim dy idempotentësh të tij, kemi:

$$
\begin{aligned}
e\psi &= (a^{+}a^{*})\psi = a^{+}\psi \cdot a^{*}\psi = \\
&= (a\psi \cdot a^{+}\psi) \cdot (a^{*}\psi \cdot a\psi) = \\
&= a\psi \cdot (a^{+}\psi \cdot a^{*}\psi) \cdot a\psi = \\
&= a\psi \cdot (a^{+} \cdot a^{*})\psi \cdot a\psi = \\
&= a\psi \cdot (a^{*} \cdot a^{+})\psi \cdot a\psi = \\
&= a\psi \cdot (a^{*}\psi \cdot a^{+}\psi) \cdot a\psi = \\
&= (a\psi \cdot a^{*}\psi) \cdot (a^{+}\psi \cdot a\psi) = \\
&= (a \cdot a^{*})\psi \cdot (a^{+} \cdot a)\psi = \\
&= a\psi \cdot a\psi = \\
&= a\psi = \\
&= f
\end{aligned}
$$

Të tregojmë tani që nëngjysmëgrupi $S\psi$ i T është abundant. Le të jetë a një element i çfardoshëm i $S\psi$ dhe x një element i S i tillë që $x\psi = a$. Meqë gjysmëgrupi S është adekuat, ekzistojnë idempotentët e vetëm x^{+} dhe x^{*} përkatsisht të klasave të ekujvalencës R_x^{*} dhe L_x^{*} sipas relacioneve $\mathcal{R}^{*}$ dhe $\mathcal{L}^{*}$ në S. Pra do të kemi:

$$
\begin{aligned}
x^{+}\ \mathcal{R}^{*}(S)\ x \Rightarrow x^{+}\psi\ \mathcal{R}^{*}(T)\ x\psi \Rightarrow \\
\Rightarrow x^{+}\psi\ \mathcal{R}(T')\ x\psi \Rightarrow \\
\Rightarrow x^{+}\psi\ \mathcal{R}^{*}(S\psi)\ x\psi \Rightarrow \\
\Rightarrow x^{+}\psi\ \mathcal{R}^{*}(S\psi)\ a
\end{aligned}
$$

sepse $T' \supset T \supset S\psi$.

Pra, klasa e çfardoshme e ekujvalencës $R_a^{*} \in S\psi / \mathcal{R}^{*}(S\psi)$ përmban idempotentin $x^{+}\psi$. Në të njëjtën mënyrë tregohet që edhe klasa e çfardoshme e ekujvalencës $L_a^{*} \in S\psi / \mathcal{L}^{*}(S\psi)$ përmban idempotentin $x^{*}\psi$. Kemi treguar kështu se gjysmëgrupi $S\psi$ është abundant. Të tregojmë që gjysmëgrupi është kuazi-adekuat. Për këtë duhet të tregojmë se bahskësia e idempotentëve $E(S\psi)$ formon nëngjysmëgrup të $S\psi$. Le të jenë e, f dy idempotentë të çfardoshëm të $S\psi$. Nga sa treguam në pjesën e parë të teoremës, do të gjenden idempotentët e' dhe f' të gjysmëgrupit adekuat S, të tillë që $e'\psi = e$ dhe $f'\psi = f$. Në këto kushte do kemi:

$$
\begin{aligned}
(ef) \cdot (ef) &= (e'\psi \cdot f'\psi) \cdot (e'\psi \cdot f'\psi) = e'\psi \cdot (f'\psi \cdot e'\psi) \cdot f'\psi = \\
&= e'\psi \cdot (f' \cdot e')\psi \cdot f'\psi = e'\psi \cdot (e' \cdot f')\psi \cdot f'\psi = \\
&= e'\psi \cdot (e'\psi \cdot f'\psi) \cdot f'\psi = (e'\psi \cdot e'\psi) \cdot (f'\psi \cdot f'\psi) = \\
&= (e' \cdot e')\psi \cdot (f' \cdot f')\psi = e'\psi \cdot f'\psi = \\
&= ef
\end{aligned}
$$

Pra $S\psi$ është kuazi-adekuat.
Por idempotentët e, f të gjysmëgrupit $S\psi$ janë edhe të përkëmbyshëm. Vërtet:

$$e \cdot f = e'\psi \cdot f'\psi = (e'f')\psi = (f'e')\psi = f'\psi \cdot e'\psi = f \cdot e$$

që konfirmon faktin se gjysmëgrupi $S\psi$ është adekuat. ■

4.2. Gjysmëgrupet adekuatë të tipit A

Një rëndësi të veçantë në studimin e strukturave algjebrike ka studimi i homomorfizmave dhe izomorfizmave midis tyre, sepse ata transferojnë shumë veti strukturale nga një strukturë algjebrike në një tjetër. A. El - Qallali dhe J. B. Fountain, në artikullin e tyre "Quasi-adequate semigroups" (september 1981) kanë përkufizuar dhe studjuar "homomorfizmin e mirë" të një gjysmëgrupi kuazi-adekuat S në një gjysmëgrup T. Ata përkufizuan gjithashtu "kongruencën e mirë" në një gjysmëgrup të dhënë S dhe treguan disa veti të këtyre homomorfizmave në gjysmëgrupet kuasi-adekuate. Në [29] ne bëmë një studim analog për gjysmëgrupet adekuatë, ndërsa në [30] e vazhduam këtë ide edhe për gjysmëgrupet adekuatë të tipit A, klasa e të cilave është një nënklasë e gjysmëgrupeve adekuatë dhe po e paraqesim këtu më poshtë.
Në kapitullin e dytë ne pamë se gjysmëgrupi adekuat S quhet adekuat i tipit A, atëherë kur për çdo element a nga S dhe për për çdo idempotent e nga $E(S)$ të kemi:

$$eS \cap aS = eaS \quad \text{dhe} \quad Se \cap Sa = Sae$$

***Pohim* 4.2.1.** *Nëqoftëse S është gjysmëgrup adekuat i tipit A dhe ρ është kongruencë e mire në S, atëherë për çdo idempotent $a\rho$ të gjysmëgrupit faktor S / ρ do të ekzistojë idempotenti $e \in E(S)$ i tillë që $e\rho = a\rho$ (dmth $e\rho a$)*
***Vërtetim*:** Le të jetë $a\rho$ një idempotent çfarëdo në gjysmëgrupin faktor S / ρ. Meqenëse S është adekuat i tipit A, dmth edhe abundant, do të ekzistojnë idempotentët $e, f \in E(S)$ të tillë që $f \mathcal{R}^*(S)\, a$ dhe $g \mathcal{L}^*(S)\, a$. Por, meqenëse ρ është kongruencë e mirë, nga dy relacionet e fundit do të rrjedhë:

$$(f\rho)\, \mathcal{R}^*(S / \rho)\, (a\rho) \text{ dhe } (g\rho)\, \mathcal{L}^*(S / \rho)\, (a\rho)$$

ose

$$(f\rho)\, \mathcal{R}\, (a\rho) \text{ dhe } (g\rho)\, \mathcal{L}\, (a\rho)$$

në ndonjë gjysmëgrup T që ka si nëngjysmëgrup të tijin gjysmëgrupin faktor S / ρ
Konstatojmë gjithashtu se elementët $f\rho$ dhe $g\rho$ janë idempotentë në S / ρ. Vërtet:

$$(f\rho) \cdot (f\rho) = [(f \cdot f)\rho] = (f\rho) \quad \text{dhe} \quad (g\rho) \cdot (g\rho) = [(g \cdot g)\rho] = (g\rho)$$

Kështu ne mund të shkruajmë:

$$(f\rho) = (a\rho)\cdot t \quad \wedge \quad (a\rho) = (f\rho)\cdot s \qquad (4.2.1)$$

dhe

$$(g\rho) = t'\cdot(a\rho) \quad \wedge \quad (a\rho) = s'\cdot(g\rho) \qquad (4.2.2)$$

ku t, s, t', s' janë elementë të gjysmëgrupit *T*. Nga barazimet (4.2.1) dhe (4.2.2) rrjedh menjëherë:

$$(a\rho)\cdot(f\rho) = (f\rho) \quad \wedge \quad (f\rho)\cdot(a\rho) = (a\rho)$$

dhe

$$(a\rho)\cdot(g\rho) = (a\rho) \quad \wedge \quad (g\rho)\cdot(a\rho) = (g\rho)$$

Shënoj tani $e = f\cdot g$, që është një idempotent i $E(S)$ si prodhim i dy idempotentëve të gjysmëgrupit adekuat të tipit A, S. Për këtë idempotent kemi:

$$\begin{aligned} e\rho &= ((f\cdot g)\rho) = (f\rho)\cdot(g\rho) = [(a\rho)(f\rho)]\cdot[(g\rho)(a\rho)] = \\ &= (a\rho)\cdot[(f\rho)\cdot(g\rho)]\cdot(a\rho) = (a\rho)\cdot[(f\cdot g)\rho]\cdot(a\rho) = \\ &= (a\rho)\cdot[(g\cdot f)\rho]\cdot(a\rho) = (a\rho)\cdot[(g\rho)\cdot(f\rho)]\cdot(a\rho) = \\ &= [(a\rho)(g\rho)]\cdot[(f\rho)(a\rho)] = (a\rho)\cdot(a\rho) = \\ &= a\rho \end{aligned}$$

Kjo përfundon edhe vërtetimin e këtij pohimi. ■

***Pohim* 4.2.2.** *Nëqoftëse S është gjysmëgrup adekuat i tipit A dhe ρ është kongruencë e mire në S, atëherë edhe gjysmëgrupi faktor S/ρ është gjithashtu gjysmëgrup adekuat i tipit A.*

***Vërtetim*:** Së pari do të tregojmë që gjysmëgrupi faktor S/ρ është gjysmëgrup abundant. Le të jetë $a\rho$ një element çfardo nga gjysmëgrupi faktor S/ρ. Meqë gjysmëgrupi S është adekuat i tipit A, dmth edhe abundant, do të ekzistojë idempotenti $e \in E(S)$ i tillë që $e\,\mathcal{R}^*(S)\,a$. Nga ana tjetër, meqë ρ është kongruencë e mirë në S, (që do të thotë se epiomorfizmi kanonik $S \to S/\rho$ është homomorfizëm i mirë), në S/ρ do të kemi:

$$(e\rho)\,\mathcal{R}^*(S/\rho)\,(a\rho) \quad \text{ose} \quad (e\rho) \in R^*_{(a\rho)}$$

ku $(e\rho) \in E(S/\rho)$. Pra çdo $\mathcal{R}^*$- kalsë (dhe njëlloj çdo $\mathcal{L}^*$- kalsë) në S/ρ ka të paktën një idempotent, që do të thotë se S/ρ është abundant.

Nga ana tjetër, duke shfytëzuar pohimin 4.2.1, për çdo idempotent $a\rho \in S/\rho$ do të egzistojë idempotenti e në $E(S)$ të tillë që $e \in a\rho$, dmth $e\rho = a\rho$. Pra, bashkësia e idempotentëve të gjysmëgrupit faktor S/ρ do të jetë:

$$E(S/\rho)=\{e\rho : e\in E(S)\}$$

Kështu që për çdo dy idempotentë $e\rho$ dhe $f\rho$ në S/ρ (ku $e,f\in E(S)$) do të kemi: $(e\rho)\cdot(f\rho)=(ef)\rho$ dhe $(ef)\rho$ është idempotent i S/ρ sepse ef është idempotent i S. Kemi treguar kështu që gjysmëgrupi S/ρ është kuazi-adekuat.
Tani, duke shfrytzuar faktin që gjysmëgrupi S është adekuat i tipit A, kemi:

$$e\rho\cdot f\rho=(ef)\rho=(fe)\rho=f\rho\cdot e\rho$$

që do të thotë se idempotentët në S/ρ janë të përkëmbyshëm. Pra S/ρ është edhe gjysmëgrup adekuat.
Së fundi, për të treguar që gjysmëgrupi faktor S/ρ është adekuat i tipit A, duhet të tregojmë se për çdo element $a\rho$ në S/ρ dhe për çdo idempotent $e\rho$ në $E(S/\rho)$ kemi:

$$(e\rho)(S/\rho)\cap(a\rho)(S/\rho)=(e\rho)(a\rho)(S/\rho)\ \wedge\ (S/\rho)(e\rho)\cap(S/\rho)(a\rho)=(S/\rho)(a\rho)(e\rho)$$

Vërtet,

$$\begin{aligned}&x\in(e\rho)(S/\rho)\cap(a\rho)(S/\rho)\Rightarrow\\&\quad\Rightarrow x=(e\rho)\cdot(s\rho)\wedge x=(a\rho)\cdot(t\rho)\Rightarrow\\&\quad\Rightarrow x=(es)\rho\wedge x=(at)\rho\end{aligned}$$

ku $t,s\in S$. Në këto kushte do të kemi:

$$\begin{aligned}x=(a\rho)\cdot(t\rho)\Rightarrow(e\rho)\cdot x&=(e\rho)\cdot(a\rho)\cdot(s\rho)\Rightarrow\\&\Rightarrow(e\rho)\cdot[(es)\rho]=(e\rho)\cdot(a\rho)\cdot(s\rho)\Rightarrow\\&\Rightarrow(e\cdot es)\rho=(e\rho)\cdot(a\rho)\cdot(s\rho)\Rightarrow\\&\Rightarrow(es)\rho=(e\rho)\cdot(a\rho)\cdot(s\rho)\Rightarrow\\&\Rightarrow x=(e\rho)\cdot(a\rho)\cdot(s\rho)\Rightarrow\\&\Rightarrow x\in(e\rho)\cdot(a\rho)\cdot(S/\rho)\end{aligned}$$

Dmth,

$$(e\rho)(S/\rho)\cap(a\rho)(S/\rho)\subset(e\rho)(a\rho)(S/\rho)\qquad(4.2.3)$$

Nga ana tjetër kemi:

$$x\in(e\rho)(a\rho)(S/\rho)\Rightarrow x=(e\rho)(a\rho)(s\rho)=(eas)\rho$$

për ndonjë $s\in S$. Por, meqë S është adequat i tipit A kemi:

$$eas\in eaS=eS\cap aS\Rightarrow eas\in aS\Rightarrow eas=as'$$

për ndonjë $s'\in S$. Atëherë shkruajmë:

$$x=(e\rho)\cdot(a\rho)\cdot(s\rho)=(e\rho)\cdot(as)\rho\in(e\rho)\cdot(S/\rho)\qquad(4.2.4)$$

dhe

$$x = (e\rho)\cdot(a\rho)\cdot(s\rho) = (eas)\rho = (as')\rho = (a\rho)\cdot(s'\rho) \in (a\rho)\cdot(S/\rho) \qquad (4.2.4')$$

Nga (4.2.4) dhe (4.2.4') rrjedh se:

$$(e\rho)(S/\rho)\cap(a\rho)(S/\rho) \supset (e\rho)(a\rho)(S/\rho) \qquad (4.2.5)$$

Së fundi, nga (4.2.3) dhe (4.2.5), përftojmë barazimin:

$$(e\rho)(S/\rho)\cap(a\rho)(S/\rho) = (e\rho)(a\rho)(S/\rho)$$

Në të njëjtën mënyrë tregohet edhe barazimi tjetër:

$$(S/\rho)(e\rho)\cap(S/\rho)(a\rho) = (S/\rho)(a\rho)(e\rho)$$

që konfirmojnë faktin se gjysmëgrupi faktor (S/ρ) është adekuat i tipit A. ■

***Pohim* 4.2.3.** *Le të jetë $\psi : S \to T$ një homomorfizëm i mire i gjysmëgrupit adekuat i tipit A, S në gjysmëgrupin T. Nëse f është një idempotent në $S\psi$, atëherë do të ekzistojë një idempotent e në S për të cilin kemi $e\psi = f$ dhe për më tepër nëngjysmëgrupi $S\psi$ i T është edhe ai adekuat i tipit A.*

***Vërtetim*:** Le të jetë f një idempotent në $S\psi$. Kjo do të thotë se ekziston një element a në S për të cilin kemi $a\psi = f$. Meqë gjysmëgrupi S është adekuat i tipit A, klasat e ekujvalencës R_a^* dhe L_a^* përmbajnë nga një idempotent të vetëm përkatsisht a^+ dhe a^*. Shëmbëllimet e a^+ dhe a^* sipas homomorfizmit ψ janë gjithashtu idempotentë në nëngjysmëgrupin $S\psi$ të T. Vërtet:

$$a^+\psi\cdot a^+\psi = (a^+\cdot a^+)\psi = a^+\psi \quad \text{dhe} \quad a^*\psi\cdot a^*\psi = (a^*\cdot a^*)\psi = a^*\psi$$

Nga ana tjetër, meqë ψ është homomorfizëm i mirë kemi:

$$a^+\,\mathcal{R}^*(S)\,a \Rightarrow a^+\psi\,\mathcal{R}^*(T)\,a\psi \Rightarrow a^+\psi\,\mathcal{R}(T')\,a\psi$$

dhe

$$a^*\,\mathcal{L}^*(S)\,a \Rightarrow a^*\psi\,\mathcal{L}^*(T)\,a\psi \Rightarrow a^*\psi\,\mathcal{L}(T'')\,a\psi$$

ku T' dhe T'' janë gjysmëgrupe që përmbajnë gjysmëgrupin T si nëngjysmëgrup të tyre. Nga $a^+\psi\,\mathcal{R}(T')\,a\psi$ dhe $a^*\psi\,\mathcal{L}(T'')\,a\psi$ nxjerrim këto barazime:

$$a\psi\cdot a^+\psi = a^+\psi; \quad a^+\psi\cdot a\psi = a\psi; \quad a^*\psi\cdot a\psi = a^*\psi; \quad a\psi\cdot a^*\psi = a\psi;$$

Duke shënuar tani $e = a^{+}a^{*}$, i cili është një idempotent në S si prodhim dy idempotentësh të tij, kemi:

$$\begin{aligned} e\psi &= (a^{+}a^{*})\psi = a^{+}\psi \cdot a^{*}\psi = (a\psi \cdot a^{+}\psi)\cdot(a^{*}\psi \cdot a\psi) = \\ &= a\psi \cdot (a^{+}\psi \cdot a^{*}\psi)\cdot a\psi = a\psi \cdot (a^{+} \cdot a^{*})\psi \cdot a\psi = \\ &= a\psi \cdot (a^{*} \cdot a^{+})\psi \cdot a\psi = a\psi \cdot (a^{*}\psi \cdot a^{+}\psi)\cdot a\psi = \\ &= (a\psi \cdot a^{*}\psi)\cdot(a^{+}\psi \cdot a\psi) = (a \cdot a^{*})\psi \cdot (a^{+} \cdot a)\psi = \\ &= a\psi \cdot a\psi = a\psi = \\ &= f \end{aligned}$$

Të tregojmë tani që nëngjysmëgrupi $S\psi$ i T është abundant. Le të jetë a një element i çfardoshëm i $S\psi$ dhe x një element i S i tillë që $x\psi = a$. Meqë gjysmëgrupi S është adekuat, ekzistojnë idempotentët e vetëm x^{+} dhe x^{*} përkatsisht të klasave të ekujvalencës R_x^{*} dhe L_x^{*} sipas relacioneve $\mathcal{R}^{*}$ dhe $\mathcal{L}^{*}$ në S. Pra do të kemi:

$$\begin{aligned} x^{+}\ \mathcal{R}^{*}(S)\ x &\Rightarrow x^{+}\psi\ \mathcal{R}^{*}(T)\ x\psi \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^{+}\psi\ \mathcal{R}(T')\ x\psi \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^{+}\psi\ \mathcal{R}^{*}(S\psi)\ x\psi \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^{+}\psi\ \mathcal{R}^{*}(S\psi)\ a \end{aligned}$$

sepse $T' \supset T \supset S\psi$. Pra, klasa e çfardoshme e ekujvalencës $R_a^{*} \in S\psi / \mathcal{R}^{*}(S\psi)$ përmban idempotentin $x^{+}\psi$. Në të njëjtën mënyrë tregohet që edhe klasa e çfardoshme e ekujvalencës $L_a^{*} \in S\psi / \mathcal{L}^{*}(S\psi)$ përmban idempotentin $x^{*}\psi$. Kemi treguar kështu se gjysmëgrupi $S\psi$ është abundant. Të tregojmë tani që gjysmëgrupi $S\psi$ është kuazi-adekuat. Për këtë duhet të tregojmë se bahskësia e idempotentëve $E(S\psi)$ formon nëngjysmëgrup të $S\psi$. Le të jenë e, f dy idempotentë të çfardoshëm të $S\psi$. Nga sa treguam në pjesën e parë të këtij pohimi, do të gjenden idempotentët e' dhe f' të gjysmëgrupit adekuat S, të tillë që $e'\psi = e$ dhe $f'\psi = f$. Në këto kushte do kemi:

$$\begin{aligned} (ef)\cdot(ef) &= (e'\psi \cdot f'\psi)\cdot(e'\psi \cdot f'\psi) = e'\psi \cdot (f'\psi \cdot e'\psi)\cdot f'\psi \\ &= e'\psi \cdot (f' \cdot e')\psi \cdot f'\psi = e'\psi \cdot (e' \cdot f')\psi \cdot f'\psi = \\ &= e'\psi \cdot (e'\psi \cdot f'\psi)\cdot f'\psi = (e'\psi \cdot e'\psi)\cdot(f'\psi \cdot f'\psi) = \\ &= (e' \cdot e')\psi \cdot (f' \cdot f')\psi = e'\psi \cdot f'\psi = \\ &= ef \end{aligned}$$

Pra $S\psi$ është kuazi-adekuat.

Por idempotentët e, f të gjysmëgrupit $S\psi$ janë edhe të përkëmbyshëm. Vërtet:

$$e \cdot f = e'\psi \cdot f'\psi = (e'f')\psi = (f'e')\psi = f'\psi \cdot e'\psi = f \cdot e$$

që tregon se gjysmëgrupi $S\psi$ është adekuat.
Së fundi duhet të tregojmë që për çdo a nga $S\psi$ dhe për çdo e nga $E(S\psi)$ kemi:

$$e \cdot S\psi \cap a \cdot S\psi = ea \cdot S\psi \quad \wedge \quad S\psi \cdot e \cap S\psi \cdot a = S\psi \cdot ae$$

Le të jetë $x \in e \cdot S\psi \cap a \cdot S\psi$ atëherë $x = e \cdot s_1\psi \quad \wedge \quad x = a \cdot s_2\psi$ ku s_1 dhe s_2 janë elemente nga S. Nga barazimi i parë rrjedh që $ex = ee \cdot s_1\psi = e \cdot s_1\psi = x$ dhe duke shumëzuar barazimin e dytë nga të dyja anët me e, do të kemi :

$$x = ex = ea \cdot s_2\psi \quad \Rightarrow \quad x \in ea \cdot S\psi$$

që do të thotë se:

$$e \cdot S\psi \cap a \cdot S\psi \subset ea \cdot S\psi \qquad (4.2.6)$$

Nga ana tjetër nëse $x \in ea \cdot S\psi$ do të kemi:

$$x \in e(a \cdot S\psi) \Rightarrow x \in e \cdot S\psi \qquad (4.2.7)$$

sepse $a \in S\psi$. Por meqë $e \in S\psi$ dhe $a \in S\psi$, do të ekzistojnë $f \in E(S)$ dhe $b \in S$ të tillë që

$$e \in f\psi \wedge a = b\psi$$

Kështu do të kemi:

$$x = (f\psi) \cdot (b\psi) \cdot (s\psi) = (fbs)\psi \qquad (4.2.8)$$

Por meqë $fbs \in fb \cdot S$ dhe S është gjysmëgrup adekuat i tipit A, atëherë është i vërtetë barazimi: $f \cdot S \cap b \cdot S = fb \cdot S$, që do të thotë se $fbs \in f \cdot S \ \wedge \ fbs \in b \cdot S$. Prandaj kemi: $fbs = b \cdot s'$, ku $s' \in S$. Në këto kushte kemi:

$$x = (fbs)\psi = (bs')\psi = b\psi \cdot s'\psi = a \cdot s'\psi \in a \cdot S\psi \qquad (4.2.9)$$

Tani, nga (4.2.7) dhe (4.2.9) rrjedh që $x \in e \cdot S\psi \cap a \cdot S\psi$, që do të thotë:

$$e \cdot S\psi \cap a \cdot S\psi \supset ea \cdot S\psi \qquad (4.2.10)$$

Përfundimisht, nga (4.2.6) dhe (4.2.10) rrjedh se:

$$e \cdot S\psi \cap a \cdot S\psi = ea \cdot S\psi$$

Kjo tregon se gjysmëgrupi $S\psi$ është gjysmëgrup adekuat i tipit A. ■

Kapitulli 5

5. GJYSËMGRUPET E RREGULLT SI NËNKLASË E GJYSMËGRUPEVE ABUNDANTË

Siç kemi parë në kapitullin 2, një nënklasë e njohur dhe shumë e rëndësishme e gjysmëgrupeve abundantë është edhe ajo e gjysmëgrupeve të rregullt dhe të atyre inversivë. Ne nuk do të ndalemi këtu në studimin e tyre, por në ndërtimin e tre llojesh të veçantë gjysmëgrupesh të tillë, pikërisht të gjysmëgrupeve të rregullt që përmbajnë një idempotent medial, ose një idempotent medial normal, si dhe të gjysmëgrupeve inversivë që përmbajnë një idempotent medial.

5.1 Idempotentët medialë dhe medialë normalë në gjysmëgrupet e rregullta

Nëse S-është një gjysëmgrup i rregullt, ne do të shënojmë $E = E(S)$ - bashkësinë e idempotentëve të S-së dhe me $\overline{E}$ ose $\overline{E(S)}$ nëngjysëmgrupin e S-së të gjeneruar prej bashkësisë së idempotentëve $E = E(S)$.

***Përkufizim* 5.1.1.** *Elementi $u \in E$ quhet medial në qoftë se për çdo $x \in \overline{E}$ kemi $xux = x$*

***Pohim* 5.1.1.** *Nëse S përmban një idempotent medial u, atëherë $\overline{E}$ është periodik.*
***Vërtetim*:** Për $x \in \overline{E}$ kemi: $x^2 = x^2ux^2 = x\,xux\,x = xxx = x^3$. Pra $\overline{E}$ është periodik. ■

***Përkufizim* 5.1.2.** [31],[33] *Një idempotent medial u quhet normal në qoftë se banda $u\overline{E}u$ është ndërrimtare* (*dmth semillaticë*).

***Shembull* 5.1.1.** [31],[33] *Në qoftë se S është gjysmëgrup i rregullt me njësh* 1, *atëherë S është gjysmëgrup inversiv vetëm kur idempotenti medial* 1, *është normal*.
Nëse S është inversiv dhe 1 njëshi i tij, atëherë 1 është idempotent medial sepse $\forall x \in \overline{E} = E$ kemi $x1x = xx = x^2 = x$. Gjithashtu, 1 është normal sepse $1\overline{E}1 = 1E1 = E$ që është semillaticë.
Anasjellas nëse elementi 1 i S-së është idempotent medial normal, atëherë kemi:

$$\forall x \in \overline{E}, x1x = x \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow \overline{E} = E$$

Pra S është gjysmëgrup ortodoks si dhe $E = \overline{E} = 1\overline{E}1$. Por $1\overline{E}1$ është ndërrimtare, sepse 1 është idempotent medial normal. Kjo tregon se E është gjithashtu ndërrimtare dhe për pasojë S është gjysmëgrup inersiv. ■

***Shembull* 5.1.2.** [31],[33] *Tabela e mëposhtme, përcakton një gjysmëgrup të rregullt por jo ortodoks dhe përmban një idempotent medial normal.*

.	u	e	f	a	b
u	u	u	f	f	b
e	e	e	a	a	b
f	u	b	f	b	b
a	e	b	a	b	b
b	b	b	b	b	b

Vërtetë nga tabela shihet se $E = \{u, e, f, b\}$ dhe $a = e \cdot f \in \overline{E}$. Pra ky gjysmëgrup është i gjeneruar prej idempotentësh. Gjysmëgrupi $\overline{E}$ nuk është ortodoks sepse $e \cdot f = a \notin E$. Meqë,

$$uuu = u, \quad ueu = uu = u, \quad ufu = uu = u, \quad uau = fu = u, \quad ubu = bu = b,$$

rrjedh se $u\overline{E}u = \{u, b\}$ dhe $u \cdot b = b = b \cdot u$ d.m.th $u\overline{E}u$ është ndërrimtare. Kështu u është idempotent medial normal. Shihet gjithashtu që u është i vetmi element i tillë. ■

***Pohim* 5.1.2.** *Nëse S është një gjysmëgrup i rregullt që përmban një idempotent medial normal u, atëherë S është inversiv vetëm atëherë kur u është njësh i S.*

***Vërtetim*:** Nëse S-është inversiv dhe $e = e^2 \in S$, atëherë $e = eue = e^2 \cdot u = eu = ue$. Pra u është njësh në nëngjysmëgrupin E dhe

$$\forall a \in S,\ au = a(a`au) = aa`a = a$$

që do të thotë se u është njësh edhe për gjysmëgrupin S.

Anasjelltas, nëse u është njësh i gjysmëgrupit të rregullt S dhe njëkohësisht medial normal i tij, do të kemi:

$$\forall e, f \in \overline{E},\ ueu \cdot ufu = ufu \cdot ueu \text{ dhe } ef = ueu \cdot ufu = ufu \cdot ueu = fe$$

Atëherë, meqë $E \subseteq \overline{E}$ rrjedh se $\forall e, f \in E$, $ef = fe$. Nga ana tjetër:

$$\forall e, f \in E,\ (ef)^2 = ef \cdot ef = e \cdot ufu \cdot ueu \cdot f = e \cdot ueu \cdot ufu \cdot f = e^2 f^2 = ef$$

Kemi treguar kështu se gjysmëgrupi S është inversiv. ■

5.2. Veti të gjysmëgrupeve të rregullt që përmbajnë një idempotent medial

Le të jetë S një gjysmëgrup i rregult që përmban një idempotent medial u. Është i vërtetë pohimi i mëposhtëm:

***Pohim* 5.2.1.** *Nënbashkësitë* uS, Su, uSu *të* S *janë gjysmëgrupe ortodoksë të tilla që*

$$E(u\mathrm{S}) = u\overline{E} = uE,\ E(\mathrm{S}u) = \overline{E}u = Eu,\ E(u\mathrm{S}u) = u\overline{E}u = uEu$$

dhe për çdo $x\in\overline{E}$, *kemi* $xux' = xx'$ dhe $x'ux = x'x$ *ku u-është idempotent medial në gjysëmgrupin e rregullt* S.

***Vërtetim*:**

$\forall x,y\in u$S, kemi $x = ua$ dhe $y = ub$ për ndonjë $a,b\in$S dhe $x\cdot y = ua\cdot ub = u\cdot aub \in u$S që tregon se uS është nëngjysëmgrup i S-së dhe për më tepër nëse e,f janë dy idempotentë në uS do të kemi $e = us$ dhe $f = ut$ ku $s,t\in$S, prej nga kemi:

$$ue = u\cdot us = u^2s = us = e \quad \text{dhe} \quad uf = u\cdot ut = u^2t = ut = f$$

Nga këto barazime rrjedh se:

$$(ef)^2 = ef\cdot ef = ef\cdot ue\cdot f = ef\cdot u\cdot ef = ef = usut \in u\mathrm{S}$$

Barazimi $ef\cdot u\cdot ef = ef$ rrejdh nga fakti se u- është idempotent medial dhe $ef\in\overline{E}$. Pra prodhimi i çdo dy idenpotentëve në uS është përsëri idempotent në uS, që tregon se gjysëmgrupi uS-është ortodoks.

Të tregojmë tani se:

$$E(u\mathrm{S}) = u\overline{E} = uE$$

Nëse $e\in E(u\mathrm{S})$ rrjedh se $e = ue \in \overline{E}$ (sepse $e\in E\subset\overline{E}$).

Por dhe anasjellas kur $ux\in u\overline{E}$ atëherë $ux = u.xux = (ux)^2$, ku $x\in\overline{E}$, d.m.th. elementi i çfardoshëm $ux\in u\overline{E}$ është idempotent i uS. Pra përfundimisht kemi $E(u\mathrm{S}) = u\overline{E}$

Nga ana tjetër kemi se,

$$uE \subseteq u\overline{E} \qquad (\text{sepse } E \subseteq \overline{E})$$

dhe për elementin e çfardoshëm $ux \in u\overline{E}$, që treguam se është idempotent, kemi:

$$ux\in u\overline{E} \Rightarrow u\cdot ux\in uE \Rightarrow ux\in uE$$

Pra, përfundimisht treguam se,

$$E(u\mathrm{S}) = u\overline{E} = uE$$

Njëlloj tregohet se edhe nëngjysëmgrupet Su dhe uSu janë ortodokse dhe se

$$E(\mathrm{S}u) = \overline{E}\,u = Eu \quad \text{dhe} \quad E(u\mathrm{S}u) = u\,\overline{E}\,u = uEu$$

Së fundi $\forall x \in \overline{E}$ dhe $\forall x' \in \mathrm{V}(x)$ janë të vërteta edhe barazimet e mëposhtme:

$$xux' = xx'x \cdot u \cdot x'xx' = x(x'x \cdot u \cdot x'x)\, x' = x \cdot x'x \cdot x' = xx'$$

dhe

$$x'ux = x'xx' \cdot u \cdot xx'x = x'(xx' \cdot u \cdot xx')x = x' \cdot xx' \cdot x = x'x. \quad \blacksquare$$

***Lema* 5.2.1.** [31]

I. *Për çdo element* $x \in \mathrm{S}$ *kemi*

$$u\mathrm{V}(x)u \subset [\mathrm{V}(uxu) \cap u\mathrm{S}u] \subset \mathrm{V}(x) \quad \textit{veçanërisht} \quad \mathrm{V}(x) \cap u\mathrm{S}u \neq \emptyset$$

II. *Për çdo dy elementë* $x, y \in \mathrm{S}$, *kur* $x' \in \mathrm{V}(x) \cap u\mathrm{S}u$ *dhe* $y' \in \mathrm{V}(y) \cap u\mathrm{S}u$, *atëherë*

$$x'xyy' \in u\,\overline{E}\,u \quad \textit{dhe} \quad y' \cdot x'xyy' \cdot x' \in [\mathrm{V}(uxyu) \cap u\mathrm{S}u] \subset \mathrm{V}(xy)$$

***Vërtetim*:**

I. Meqë $u\mathrm{V}(x)u \subset u\mathrm{S}u$ dhe $\forall y \in u\mathrm{V}(x)u$ kemi $y = ux'u$ ku $x' \in \mathrm{V}(x)$, atëherë rrjedh se:

$$y \cdot uxu \cdot y = ux'u \cdot uxu \cdot ux'u = ux'uxux'u = ux'xx'u = ux'u = y$$

dhe

$$uxu \cdot y \cdot uxu = uxu \cdot ux'u \cdot uxu = uxux'uxu = uxx'xu = uxu$$

që do të thotë se y- është një invers i uxu, d.m.th. $y \in \mathrm{V}(uxu)$, prej nga rrjedh se

$$u\mathrm{V}(x)u \subset [\mathrm{V}(uxu) \cap u\mathrm{S}u]$$

Le të jetë tani $y \in \mathrm{V}(uxu) \cap u\mathrm{S}u$. Për këtë y kemi:

$$y = y \cdot uxu \cdot y, \quad uxu \cdot y \cdot uxu = uxu \quad \text{dhe} \quad y = usu \quad \text{ku} \quad s \in \mathrm{S}$$

Atëherë,

$$yxy = usu \cdot x \cdot usu = usu \cdot uxu \cdot usu = y \cdot uxu \cdot y = y$$

dhe

$$\begin{aligned} xyx &= xx'xyxx'x = xx'ux \cdot usu \cdot xux'x = xx' \cdot uxu \cdot s \cdot uxu \cdot x'x = \\ &= xx' \cdot (uxu \cdot usu \cdot uxu) \cdot x'x = xx' \cdot (uxu \cdot y \cdot uxu) \cdot x'x = \\ &= xx' \cdot uxu \cdot x'x = xx'xx'x = \\ &= xx'x = \\ &= x \end{aligned}$$

Kjo tregon se $y \in \mathrm{V}(x)$. Kështu kemi treguar se

$$u\mathrm{V}(x)u \subset [\mathrm{V}(uxu) \cap u\mathrm{S}u] \subset \mathrm{V}(x)$$

Por meqë

$uV(x)u \subset uSu$; $uV(x)u \subset V(x)$ dhe $V(x) \neq \emptyset$ (që do të thotë se $uV(x)u \neq \emptyset$), rrjedh se $uSu \cap V(x) \neq \emptyset$.

II. Le të jenë $x,y \in S$, të tillë që $x' \in V(x) \cap uSu$ dhe $y' \in V(y) \cap uSu$. Të provoj se $x'xyy' \in u\overline{E}u$. Vërtet:

$$x' \in V(x) \cap uSu \Rightarrow x'x \in E \quad \text{dhe} \quad x' = usu \quad \text{ku} \quad s \in S$$
$$y' \in V(y) \cap uSu \Rightarrow yy' \in E \quad \text{dhe} \quad y' = utu \quad \text{ku} \quad t \in S$$

atëherë shohim se

$$x'xyy' = usu \cdot xy \cdot utu = u \cdot usu \cdot xy \cdot utu \cdot u = u \cdot x'x \cdot yy' \cdot u \in u\overline{E}u$$

Mbetet për të provuar së fundi që:

$$y' \cdot x'xyy' \cdot x' \in [V(uxyu) \cap uSu] \subset V(xy)$$

Vërtet:

$$\begin{aligned} y'x'xyy'x' \cdot uxyu \cdot y'x'xyy'x' &= y'(x'xyy') \cdot u \cdot (x'xyy') \cdot u \cdot (x'xyy')x' = \\ &= y'(x'xyy')u(x'xyy') \cdot x' = \\ &= y'x'xyy' \cdot x' \end{aligned}$$

dhe

$$\begin{aligned} uxyu \cdot y'x'xyy'x' \cdot uxyu &= uxyy'(x'xyy'x'xyy')yu = uxyy'(x'xyy'ux'xyy')yu = \\ &= uxyy'x'xyy'yu = uxyy'x'xyy' \cdot yu = ux \cdot x'xyy'ux'xyy' \cdot yu = \\ &= uxx'xyy'yu = \\ &= uxyu \end{aligned}$$

Pra, $y'x'xyy'x' \in V(uxyu) \cap uSu$. Ndërsa fakti që $[V(uxyu) \cap uSu] \subset V(xy)$ rrjedh direkt nga pika I-rë e kësaj leme duke marrë në vend të elementit x elementin xy. ■

Le të shohim tani vërtetimin e një leme, e cila do të na shërbejë për ndërtimin e gjysmëgrupit të rregullt me një idempotent medial, që përbën dhe synimin kryesor të këtij kapitulli.

***Lema* 5.2.2.** [27]

I. *Le të jenë* $e,e' \in \overline{E}u$ *dhe* $a \in u\overline{E}u$. *Në qoftë* $e\mathcal{R}e'$ *në* $\overline{E}u$ *dhe* $ue \cdot a = a$, *atëherë* $ue' \cdot a = a$ *dhe* $ea = e'a$.

II. *Le të jenë* $f,f' \in u\overline{E}$ *dhe* $b \in u\overline{E}u$. *Në qoftë se* $f\mathcal{L}f'$ *në* $u\overline{E}$ *dhe* $b \cdot fu = b$, *atëherë* $b \cdot f'u = b$ *dhe* $bf = bf'$.

***Vërtetim*:**

I. Meqë $e\mathcal{R}e'$ në $\overline{E}u$ kemi që $(e)_r = (e')_r$ në $\overline{E}u$, d.m.th.

$$e\overline{E}u = e'\overline{E}u \qquad (5.2.1)$$

prandaj

$$e \in \overline{E}u \Rightarrow e = xu \Rightarrow eu = xu \cdot u = xu = e$$

pra $eu = e$ dhe njëlloj tregohet se edhe $e'u = e'$

Nga barazimi (5.2.1) rrjedh se $eu\overline{E}u = e'u\overline{E}u$ dhe për $a \in u\overline{E}u$, ekziston $b \in u\overline{E}u$ e tillë që $ea = e'b$, prej nga kemi $u \cdot ea = u \cdot e'b$ dmth

$$a = ue'b \qquad (5.2.2)$$

Nga ana tjetër

$$ea = e'b \Rightarrow e'ea = e'b \Rightarrow e'uea = e'b$$

ose

$$e'a = e'b \qquad (5.2.3)$$

Nga (5.2.2) dhe (5.2.3) rrjedh se $ue' \cdot a = ue'b = a$. Pra, $ue' \cdot a = a$. Atëherë, nga $ea = e'b$ dhe $e'b = e'a$ rrjedh menjëherë se $ea = e'a$.

II. Meqë $f\mathcal{L}f'$ në $u\overline{E}$, kemi $(f)_l = (f')_l$ d.m.th. $u\overline{E}f = u\overline{E}f'$ ose $u\overline{E}uf = u\overline{E}uf'$, Kështu që për $b \in u\overline{E}u$ ekziston $a \in u\overline{E}u$, e tillë që $bf = af'$, prej nga rrjedh $bfu = af'u$. Por nga kushti kemi $bfu = b$, prandaj do të kemi edhe

$$af'u = b \qquad (5.2.4)$$

për më tepër kemi:

$$bf = af' \Rightarrow bff' = af' \Rightarrow bfuf' = af'$$

dmth

$$bf' = af' \qquad (5.2.5)$$

Nga (5.2.4) dhe (5.2.5) rrjedh $bf'u = af'u = b$ d.m.th. $bf'u = b$.
Së fundi, nga $bf = af'$ dhe $bf' = af'$ rrjedh $bf = bf'$. ■

5.3. Ndërtimi i një gjysmëgrupi të rregullt që përmban një idempotent medial

Në këtë paragraf ne do të tregojmë se si mund të ndërtojmë një gjysmëgrup të rregullt i cili përmban një idempotent medial duke përdorur si "tulla ndërtimi" një gjysëmgrup të rregullt të gjeneruar prej idempotentësh $\overline{E}$ që përmban një idempodent medial u dhe një gjysmëgrup ortodoks me njësh S, banda e idempotentëve të të cilit është izomorfe me $u\overline{E}u$.

Le të jetë dhënë pra një gjysëmgrup i rregullt i gjeneruar prej idempotentësh $\overline{E}$ që përmban një idempodent medial u dhe le të jetë S një gjysmëgrup ortodoks me njësh, me bandë idempotentësh $E(S) \cong u\overline{E}u$. Nga ky izomorfizëm ne do të identifikojmë strukturat $E(S)$ dhe $u\overline{E}u$, kështu që u - kthehet në njësh të gjysmëgrupit S.

Vërtetë nëse e do ishte njëshi i S, atëhere $e^2 = e$, pra $e \in E(S)$ dhe meqë u është njësh i $u\overline{E}u \cong E(S)$ rrjedh se u kthehet në njësh për $E(S)$, pikërisht nga identifikimi i strukturave izomorfe të mësipërme. Kështu që:

$$eu = ue = u \qquad (e\text{- njësh i } S\text{-së pra edhe i } E(S))$$

$$eu = ue = e \qquad (u\text{- njësh } u\overline{E}u\text{, pra edhe i } E(S))$$

Prej nga del se $u = e$.

Tani duke përdorur gjysmëgrupet e dhëna $\overline{E}$ dhe S, do synojmë që të ndërtojmë një gjysëmgrup të rregullt K që të përmbajë një idempotent medial $\bar{u}$, ku nëngjysëmgrupi i gjeneruar prej idempotentëve të K-së, $\overline{E(K)}$, të jetë izomorf me $\overline{E}$ dhe gjysmëgrupi $\bar{u}K\bar{u}$ i K-së të jetë izomorf me gjysmëgrupin ortodoks të dhënë S.
Le të jenë:

$$\overline{E}u/\mathcal{R} = \{R_e \mid e \in \overline{E}u\} \text{ bashkësia e } \mathcal{R}\text{-klasave në } \overline{E}u$$

dhe

$$u\overline{E}/\mathcal{L} = \{L_f \mid f \in u\overline{E}\} \text{ bashkësia e } \mathcal{L}\text{-klasave në } u\overline{E}$$

***Pohimi* 5.3.1.** [31] *Për çdo* $e \in \overline{E}u$, $uR_e = R_{ue} = \{g \in u\overline{E}u \mid g\mathcal{R}ue$ në $u\overline{E}u\}$
dhe për çdo $f \in u\overline{E}$, $L_f u = L_{fu} = \{h \in u\overline{E}u \mid h\mathcal{L}fu$ në $u\overline{E}u\}$

***Vërtetim*.** Le të jetë $x \in uR_e$, rrjedh që $x = ua$ ku $a \in R_e$ d.m.th. $a\mathcal{R}e$ në $\overline{E}u$, pra ekzistojnë $y, z \in \overline{E}u$, të tillë që $a = ey$ dhe $e = az$. Pra kemi $x = ua = uey$ dhe $ue = uaz = xz$, që do të thotë se $x\mathcal{R}ue$ në $\overline{E}u$. Pra $x \in R_{ue}$, ose $uR_e \subseteq R_{ue}$
Anasjellas, le të jetë $x \in R_{ue}$. Pra kemi $x\mathcal{R}ue$ në $\overline{E}u$, dmth ekzistojnë $y, z \in \overline{E}u$ të tillë që

$$x = uey = uc \text{ ku } c = ey \quad (c = ey \in e\overline{E}u \subset \overline{E}u) \text{ dhe } ue = xz$$

ose

$$ue = ucz \Rightarrow eue = euczz \Rightarrow e = euczz$$

Por nga $uey = uc$ rrjedh $euey = euc$ ose $ey = euc$.
Tani mun të shkruajmë:

$$e = euczz = eyz = cz$$

Treguam kështu se $x = uc$, $c = ey$ dhe $e = cz$, (ku $y,z \in \overline{E}u$ dhe $a \in \overline{E}u$). Pra kemi $x = uc$ dhe $c\mathcal{R}e$ në $\overline{E}u$, që do të thotë se $c \in R_e$ dhe rrjedhimisht $x = uc \in uR_e$.
Kështu treguam se edhe $R_{ue} \subseteq uR_e$. Pra $uR_e = R_{ue}$. Mbetet tani për të treguar se:

$$R_{ue} = \{g \in u\overline{E}u \mid g\mathcal{R}ue \text{ në } u\overline{E}u\}$$

Vërtetë nëse $x \in R_{ue}$ rrjedh që kemi $x\mathcal{R}ue$ në $\overline{E}u$. Pra do të ekzistojnë $y = \bar{e}u \in \overline{E}u$ dhe $z = \bar{e}`u \in \overline{E}u$ të tillë që $x = ue \cdot y$ dhe $ue = xz$ ose $x = ue \cdot y = ue \cdot \bar{e}u = u \cdot eue \cdot \bar{e}u$
Pra,

$$x = ue \cdot \bar{e}u \in u\overline{E}u, \quad x \in \overline{E}u \subset \overline{E} \quad \text{dhe} \quad x = ue \cdot (ue\bar{e}u) \qquad (5.3.1)$$

Gjithashtu

$$ue = xz \Rightarrow ue = x\bar{e}`u \Rightarrow ue = xux \cdot \bar{e}`u = x \cdot (ux\bar{e}`u)$$

dhe

$$ux \cdot \bar{e}`u = u(x\bar{e})u \in u\overline{E}u \quad (\text{sepse } x, \bar{e} \in \overline{E})$$

Pra kemi

$$ue = x(ux\overline{e}`u) \qquad (5.3.2)$$

Nga (5.3.1) dhe (5.3.2) rrjedh $x\mathcal{R}\, ue$ në $u\overline{E}u$. Kështu $x \in \{ g \in u\overline{E}u \mid g\mathcal{R}ue$ në $u\overline{E}u \}$, d.m.th.

$$\mathrm{R}_{ue} \subset \{ g \in u\overline{E}u \mid g\mathcal{R}\, ue \text{ në } u\overline{E}u \} \qquad (5.3.3)$$

Anasjellas nëse $x \in \{g \in u\overline{E}u \mid g\mathcal{R}ue$ në $u\overline{E}u\}$ atëhere $x \in u\overline{E}u$ dhe $x\mathcal{R}ue$ në $u\overline{E}u$. Pra ekzistojnë $y,z \in u\overline{E}u$ të tilla që $x = uey$ dhe $ue = x\cdot z$. Por $y,z \in u\overline{E}u \Rightarrow y,z \in \overline{E}u$ d.m.th. kemi $x\mathcal{R}\, ue$ në $\overline{E}u$. Pra $x \in \mathrm{R}_{ue}$ ku R_{ue} është $\mathcal{R}$ - klasa e elementit ue në $\overline{E}u$ Kështu që,

$$\mathrm{R}_{ue} \supset \{ g \in u\overline{E}u \mid g\mathcal{R}\, ue \text{ në } u\overline{E}u \} \qquad (5.3.4)$$

Përfundimisht nga (5.3.3) dhe (5.3.4) rrjedh barazimi:

$$\mathrm{R}_{ue} = \{ g \in u\overline{E}u \mid g\mathcal{R}ue \text{ në } u\overline{E}u \}$$

dhe njëlloj tregohet edhe barazimi:

$$\mathrm{L}_f u = \mathrm{L}_{fu} = \{ h \in u\overline{E}u \mid h\mathcal{L}fu \text{ në } u\overline{E}u \} \ \blacksquare$$

Tani shqyrtojmë bashkësinë:

$$K = K(\overline{E},S) = \{ (\mathrm{R}_e, x, \mathrm{L}_f) \in \overline{E}u/\mathcal{R} \times S \times u\overline{E}/\mathcal{L} \mid uR_e \subset R_x^S \text{ dhe } L_f u \subset L^S{}_x \}$$

Ku R_x^S dhe $L^S{}_x$ janë përkatësisht $\mathcal{R}$ - klasa dhe $\mathcal{L}$ - klasa që përmbajnë elementin x në S Por shohim që:

$$uR_e \subset R_x^S \Leftrightarrow R_{ue} \subset R_x^S \Leftrightarrow ue\mathcal{R}\, x \text{ në } S \text{ dhe } L_f u = L_{fu} \subset L^S{}_x \Leftrightarrow x\mathcal{L}fu \text{ në } S,$$

d.m.th. kemi $ue\mathcal{R}\, x\mathcal{L}\, fu$ në S. Pra bashkësia $K = K(\overline{E},S)$ shkruhet:

$$K = \{ (\mathrm{R}_e, x, \mathrm{L}_f) \in \overline{E}u/\mathcal{R} \times S \times u\overline{E}/\mathcal{L} \mid ue\mathcal{R}\, x\mathcal{L}\, fu \text{ në } S \}$$

Por

$$(ue\, \mathcal{R}\, x\mathcal{L}fu \text{ në } S) \Leftrightarrow (\exists x' \in \mathrm{V}(x),\ ue = xx` \wedge fu = x`x)$$

Vërtet, nëse ekziston $x' \in \mathrm{V}(x)$ i tillë që $ue = xx`$ dhe $fu = x`x$, kemi:

$$ue = xx'\, \mathcal{R}\, x\, \mathcal{L}\, x'x = fu$$

dmth kemi $ue\, \mathcal{R}\, x\, \mathcal{L}\, fu$ në S.

Anasjellas, supozojmë se kemi $ue\ \mathcal{R}\ x\ \mathcal{L}\ fu$. Por $ue\ \mathcal{R}\ x$ në S do të thotë se ekzistojnë $s,t \in S$ të tillë që $x = uet$ dhe $ue = xs$ prej nga rrjedh $uex = (ue)^2t$ dhe $uex = xsx$, pra,

$$uex = uet = x \text{ dhe } x = xsx$$

Po ashtu tregohet se nga $x\ \mathcal{L}\ fu$ në S rrjedh se gjendet $v \in$ S të tillë që:

$$xfu = x \quad \text{dhe} \quad fu = vx$$

Duke shënuar $x' = fusue$ kemi:

$$xx'x = x{\cdot}fusue{\cdot}x = (xfu)s(uex) = xsx = (xs)x = x$$

$$\begin{aligned} x'xx' &= fusue{\cdot}x{\cdot}fusue = fus(uex)fusue = fus{\cdot}x{\cdot}fusue = \\ &= fus(xfu)sue = fus{\cdot}x{\cdot}sue = \\ &= fus(xs)ue = fusueue = fusue = x' \end{aligned}$$

Kështu kemi $x' \in$ V(x) dhe për më tepër shohim se:

$$\begin{aligned} xx' &= xfusue = xsue = ueue = ue \\ x'x &= fusuex = fusx = vxsx = vx = fu \end{aligned}$$

Prandaj përfundimisht K - merr trajtën:

$$K = \{ (R_e, x, L_f) \in \overline{E}u / \mathcal{R} \text{ x S x } u\overline{E} / \mathcal{L} \mid \exists x` \in V(x),\ ue = xx` \wedge fu = x`x \} \qquad (*)$$

ku $e \in \overline{E}u$ dhe $f \in u\overline{E}$. Natyrisht që $K \neq \Phi$ sepse $(R_u, u, L_u) \in K$.

***Pohim* 5.3.2.** [31], [32] N.q.s. $(R_e, x, L_f) \in K$ *dhe* $x^2 = x$, *atëherë:*

$$(R_{ex}, x, L_{xf}) \in K \quad dhe \quad (R_{ex}, x, L_{xf}) = (R_e, x, L_f)$$

***Vërtetim*.** Meqenëse $ex \in \overline{E}u$ dhe $xf \in u\overline{E}$ ($x \in E(S) = u\overline{E}u$ d.m.th. $xu = ux = x$ dhe $ex, xf \in \overline{E}$) dhe $ue = xx'$, $fu = x'x$ për ndonjë $x' \in$V(x) (sepse $(R_e, x, L_f) \in K$), rrjedh $uex = xx'x = x$ kështu do të kemi $u(ex)\mathcal{R}x$ [njëlloj tregohet se $x\ \mathcal{L}\ (xf)u$]. Prandaj kemi $u(ex)\ \mathcal{R}\ x\ \mathcal{L}\ (xf)u$, që do të thotë se $(R_{ex}, x, L_{xf}) \in K$. Por nga $ue = xx'\mathcal{R}x\mathcal{R}\ uex$ del se $ue\ \mathcal{R}\ uex$ ose $eue\ \mathcal{R}\ euex$ ose $e\ \mathcal{R}\ ex$. Pra $R_e = R_{ex}$ dhe njëlloj nxjerrim se edhe $L_f = L_{xf}$ Kështu kemi treguar se:

$$(R_{ex}, x, L_{xf}) = (R_e, x, L_f) \quad \blacksquare$$

Përcaktojmë në K - një veprim binar si mëposhtë:

$$(R_e, x, L_f)(R_h, y L_k) = (R_{ea}, xfhy, L_{bk}) \quad (**)$$

ku $a,b \in E(S)$ të tillë që $a \mathcal{R} xfhy \mathcal{L} b$ në S.

<u>Së pari</u> të tregojmë që(R_{ea} , $xfhy, L_{bk}$) $\in K$, dmth veprimi i përcaktuar është veprim algjebrik i mbrendshëm në K.

Duke u nisur nga $a \mathcal{R} xfhy \mathcal{L} b$ në S rrjedh:

$$uea \mathcal{R} uexfhy \quad \text{dhe} \quad xfhyku \mathcal{L} bku$$

dhe meqë $xx' = ue$, $y'y = ku$, relacionet e fundit shkruhen kështu:

$$(uea \mathcal{R} xx'xfhy \wedge xfhyy'y \mathcal{L} bku) \quad \text{ose} \quad (uea \mathcal{R} xfhy \wedge xfhy \mathcal{L} bku)$$

dmth kemi $uea \mathcal{R} xfhy \mathcal{L} bku$ në S që do të thotë se (R_{ea} , $xfhy, L_{bk}$) $\in K$.

<u>Së dyti</u> të tregojmë që ky veprim është i përcaktuar saktë, d.m.th. nuk varet nga përfaqësuesit e klasave të ekuivalencës R_e, L_f , $\boldsymbol{R}_h$, L_k dhe nga $a,b \in E(S)$ të tillë që $a \mathcal{R} xfhy \mathcal{L} b$ në S.

Le të jenë pra $f' \in L_f$ dhe $h' \in \boldsymbol{R}_h$, dy përfaqësues të tjerë të këtyre klasave. Nga përcaktimi në (*) i K-së, gjendet $x' \in V(x)$, i tillë që:

$$\begin{aligned} x \cdot fh \cdot y &= xx'x \cdot fh \cdot yy'y \\ &= x \cdot x'xf \cdot hyy' \cdot y \quad \text{(Lema 5.2.2 ku } b = x'x \text{ dhe } a = yy') \\ &= x \cdot x'xf' \cdot h'yy' \cdot y \\ &= x \cdot f'h' \cdot y \end{aligned}$$

(jemi në kushtet e Lemës 5.2.2 sepse, $fu = x'x \Rightarrow xfu = x \Rightarrow x'x \cdot fu = x'x$, d.m.th. plotësohet kushti i saj $b \cdot fu = b$, prej nga rrjedh $x'x\ f = x'x\ f'$ që u shfrytzua më sipër). Kjo tregon se komponenti i mesit në veprimin e përcaktuar nuk varet nga zgjedhja e përfaqësuesve të klasave të ekuivalencës L_f dhe $\boldsymbol{R}_h$. Të shohim tani që edhe komponenti i majtë R_{ea} , nuk varet as nga zgjedhja përfaqësuesit të R_e (e apo $e' \in R_e$) dhe as nga $a \in E(S) = u\overline{E}u$, apo $a' \in E(S) = u\overline{E}u$ e tille që $a' \mathcal{R}\, x \cdot fh \cdot y$. Por meqë $a \mathcal{R}\, x \cdot fh \cdot y$ do kemi $a \mathcal{R} a'$ në $u\overline{E}u$, d.m.th. $ea \mathcal{R} ea'$, sepse $\mathcal{R}$ është kongruencë e majtë në $\overline{E}u$. Por nga Lema 5.2.2 kemi $ea' = e'a'$, kështu që $ea \mathcal{R}\, e'a'$, d.m.th. elementët ea dhe $e'a'$ i takojnë të njëjtës $\mathcal{R}$- klasë në $\overline{E}u$. Pra, $R_{ea} = R_{e'a'}$, që do të thotë se edhe komponenti i parë i ($R_{ea}, x.fh.y, L_{bk}$) është i përcaktuar në mënyrë të vetme. Njëlloj tregohet edhe per komponentin e tretë L_{bk} , që nuk varet nga zgjedhja e $k' \in L_k$ dhe e $b' \in u\overline{E}u$ ku $x \cdot fh \cdot y \mathcal{L} b'$.

***Teoremë* 5.3.1.** [31],[32]

(1) *K - me veprimin e përcaktuar në të është gjysmëgrup.*

(2) *K - gjysmëgrup i rregullt.*

(3) $E(K) = \{(R_e, x, L_f) \in K \mid L_f R_e \subset V(x) \text{ dhe } x^2 = x\}$

(4) $\overline{E(K)} = \{(R_e, x, L_f) \in K \mid x^2 = x\}$

(5) $\bar{u} = (R_u, u, L_u)$ *është idempotent medial i K -së.*

(6) $\overline{E(K)} \cong \bar{E}$ *dhe* $\bar{u}K\bar{u} \cong S$

Vërtetim.

(1) Le të jenë (R_e, x, L_f), (R_g, y, L_h) dhe (R_t, z, L_s) tre elementë të çfarëdoshëm të K-së. Atëherë:

$$[(R_e, x, L_f)\ (R_g, y, L_h)]\ (R_t, z, L_s) = (R_{ea}, xfgy, L_{bh})\ (R_t, z, L_s)$$
$$= (R_{eac}, xfgybhtz, L_{ds})$$

ku $a\,\mathcal{R}\,xfgy\mathcal{L}b$ dhe $c\,\mathcal{R}\,xfgybhtz\,\mathcal{L}\,d$

$$(R_e, x, L_f)\ [(R_g, y, L_h)(R_t, z, L_s)] = (R_e, x, L_f)(R_{ga}, yhtz, L_{b's}) =$$
$$= (R_{ec`}, xfga`yhtz, L_{d`b`s})$$

ku $a`\,\mathcal{R}\,yhtz\,\mathcal{L}\,b`$ dhe $c`\mathcal{R}\,xfha`yhtz\,\mathcal{L}\,d`$

Të vërtetojmë në fillim barazimin e komponentëve të mesit. Meqë $(R_{ea}, xfgy, L_{bh}) \in K$ rrjedh

$$bhu = (xfgy)'(xfgy) \text{ ose } xfgy = xfgybhu \text{ ose } xfgyh = xfgybh$$

ose

$$xfgyhtz = xfgybhtz \qquad (5.3.5)$$

Nga ana tjetër meqë $(R_{ga}, yhtz, L_{b'h}) \in K$ do të kemi:

$$uga' = (yhtz)(yhtz)' \text{ ose } yhtz = uga'yhtz$$

prej nga $gyhtz = ga'yhtz$ ose $xfgyhtz = xfga'yhtz$ (5.3.6)

Nga barazimet e mësipërme (5.3.5) dhe (5.3.6) rrjedh se $xfgybhtz = xfga'yhtz$.

Tani shënojmë me $w = xfgybhtz = xfga'yhtz$ dhe mbetet për të treguar tani barazimin:

$$(R_{eac}, w, L_{ds}) = (R_{ec`}, w, L_{d`b`s})$$

Meqë këto dy elementë i përkasin K – së kemi:

$$ueac = ww'\,\mathcal{R}\,ww'' = uec' \text{ ose } ueac\,\mathcal{R}\,uec' \text{ në } \bar{E}u \text{ ose } eac\,\mathcal{R}\,ec' \text{ në } \bar{E}u$$

Pra $R_{eac} = R_{ec`}$ në $\bar{E}u$. Njëlloj tregohet se edhe $L_{ds} = L_{d'b's}$ në $u\bar{E}$.

Kështu përfundimisht kemi treguar se veprimi i përcaktuar më sipër në K ka vetinë e shoqërimit d.m.th. K- është gjysëmgrup në lidhje me këtë veprim.

(2) Të provojmë që $K = K(\overline{E}, S)$ është i rregullt.

Le të jetë $(R_e, x, L_f) \in K$ dhe $x' \in V(x)$ i tillë që $xx' = ue$ dhe $x'x = fu$. Mbetet për të treguar se që $(R_{fu}, x', L_{ue}) \in K$ dhe për më tepër është një invers i elementit (R_e, x, L_f).

Së pari është e vërtetë që $(R_{fu}, x', L_{ue}) \in K$, sepse ekziston një invers i x', $[x \in V(x')]$ i tillë që $u \cdot fu = x'x$. Ky barazim është i vërtetë sepse $f \in u\overline{E} \Rightarrow fu = uy$, për ndonjë $y \in \overline{E}$, domethënë $u \cdot fu = u \cdot uy = uy = fu$. Prej nga del se $ufu = fu = x'x$ njëlloj del se edhe $ueu = xx'$. Prandaj themi se $(R_{fu}, x', L_{ue}) \in K$. Shohim gjithashtu që:

$$\begin{aligned}(R_e, x, L_f)\,(R_{fu}, x', L_{ue})\,(R_e, x, L_f) &= (R_{ea}, xffux', L_{bue})\,(R_e, x, L_f)\\ &= (R_{ea}, xx', L_{bue})\,(R_e, x, L_f)\\ &= (R_{eac}, xx'bueex, L_{df})\\ &= (R_{eac}, xx'bx, L_{df})\end{aligned}$$

dhe të tregojmë akoma se $(R_{eac}, xx'bx, L_{df}) = (R_e, x, L_f)$.

Meqë $(R_{ea}, xx', L_{bue}) \in K$ do të thotë se $bue \cdot u = (xx')'(xx')$ për ndonjë invers $(xx')'$ të xx' ose

$$xx'bueu = xx' \Rightarrow xx'bxx'u = xx' \Rightarrow xx'bxx'ux = xx'x \Rightarrow xx'bx = x$$

Kështu që komponenti i mesit është i njëjtë, prandaj mbetet për të treguar që:

$$(R_{eac}, x, L_{df}) = (R_e, x, L_f)$$

Nga fakti që $(R_{eac}, x, L_{df}) \in K$ rrjedh se ekziston $x'' \in V(x)$ i tillë që:

$$(\, ueac = xx'' \wedge dfu = x''x \,) \quad \text{ose} \quad (\, eac = exx'' \wedge df = x''xf \,)$$

Nga ana tjetër $xx'' \in E(S) = u\overline{E}u \subset \overline{E}u$ dhe $xx' \in E(S) = u\overline{E}u \subset \overline{E}u$, për më tepër janë të vërteta këto barazime:

$$\begin{aligned}xx' &= (\,xx''x)x' = (xx'')(xx')\\ xx'' &= (xx'x)x'' = (xx')(xx'')\end{aligned}$$

prej të cilave rrjedh $xx' \mathcal{R} xx''$ në $\overline{E}u$. Por meqë $e \in \overline{E}u$ kemi $exx' \mathcal{R} exx''$ ose $eue \mathcal{R} eac$ dmth $e \mathcal{R} eac$. Pra $R_e = R_{eac}$ në $\overline{E}u$. Njëlloj tregohet $L_f = L_{df}$ në $u\overline{E}$. Kështu treguam se:

$$(R_e, x, L_f)\,(R_{fu}, x', L_{ue})\,(R_e, x, L_f) = (R_{eac}, xx'bx, L_{df}) = (R_e, x, L_f) \qquad (5.3.7)$$

Nga an tjetër kemi:

$$\begin{aligned}(R_{fu}, x', L_{ue})(R_e, x, L_f)(R_{fu}, x', L_{ue}) &= (R_{fua}, x'ueex, L_{bue})(R_{fu}, x', L_{ue})\\ &= (R_{fa}, x'uex, L_{be})(R_{fu}, x', L_{ue})\end{aligned}$$

$= (R_{fa}, x'x, L_{be})(R_{fu}, x', L_{ue})$
$= (R_{fac}, x'xbefux', L_{due})$
$= (R_{fac}, x'xbex', L_{de})$

ku a, b, c, d janë idempotentë në S, pra $a, b, c, d \in E(S) = u\overline{E}u$ të tillë që:

$$(a \mathcal{R} x'ueex \mathcal{L} b \wedge c \mathcal{R} x'xbefux' \mathcal{L} d) \text{ ose } (a \mathcal{R} x'x \mathcal{L} b \wedge c \mathcal{R} x'xbex' \mathcal{L} d)$$

Të tregojmë tani që

$$(R_{fac}, x'xbex', L_{de}) = (R_{fu}, x', L_{ue})$$

Së pari, nga përcaktimi i elementëve të K-së dhe meqë $(R_{fa}, x'x, L_{be}) \in K$ kemi:

$$ufa = (x'x)(x'x)' \text{ dhe } beu = (x'x)'(x'x) \text{ ku } (x'x)' \in V(x'x)$$

ose

$$ufax'x = x'x \quad \text{dhe} \quad x'xbeu = x'x$$

ose

$$fax' = x' \quad \text{dhe} \quad xbe = x$$

Nga $xbe = x$ rrjedh $x'xbex' = x'xx'$ ose, $x'xbex' = x'$, që tregon se komponenti i mesit është i njëjtë. Tani mbetet të tregojmë që:

$$(R_{fac}, x', L_{de}) = (R_{fu}, x', L_{ue})$$

Meqë $(R_{fac}, x', L_{de}) \in K$, gjendet $x'' \in V(x')$ i tillë që

$$ufac = x'x'' \text{ dhe } deu = x''x' \text{ ose } fac = fx'x'' \text{ dhe } de = x''x'e$$

Nga ana tjetër $x'x'' \in E(S) = u\overline{E}u \subset \overline{E}u$ dhe $x''x' \in E(S) = u\overline{E}u \subset \overline{E}u$, për më tepër janë të vërteta këto barazime:

$$x'x'' = (x'xx')x'' = (x'x)(x'x'')$$
$$x'x = (x'x''x')x = (x'x'')(x'x)$$

prej të cilave rrjedh $x'x \mathcal{R} x'x''$ në $\overline{E}u$. Por meqë $fu \in \overline{E}u$ kemi:

$$fux'x \mathcal{R} fux'x'' \text{ ose, } fufu \mathcal{R} fac \text{ ose, } fu \mathcal{R} fac$$

Pra $R_{fu} = R_{fac}$ në $\overline{E}u$. Njëlloj tregohet $L_{ue} = L_{de}$ në $u\overline{E}$. Kështu treguam se:

$$(R_{fu}, x', L_{ue})(R_e, x, L_f)(R_{fu}, x', L_{ue}) = (R_{fac}, x'xbex', L_{de}) = (R_{fu}, x', L_{ue}) \qquad (5.3.8)$$

Barazimet (5.3.7) dhe (5.3.8) tregojnë se elementi i çfardoshëm $(R_e, x, L_f) \in K$ ka invers elementin (R_{fu}, x', L_{ue}) ku $x' \in V(x)$ dmth K është gjysëmgrup i rregullt.

(3) Të tregojmë që: $E(K) = \{(R_e, x, L_f) \in K \mid L_f R_e \subset V(x) \text{ dhe } x^2 = x\}$
Supozojmë se elementi (R_e, x, L_f) është idempotent në K.
Pra,

$$(R_e, x, L_f)(R_e, x, L_f) = (R_e, x, L_f) \quad \text{ose} \quad (R_{ea}, xfex, L_{bf}) = (R_e, x, L_f)$$

që do të thotë se $R_{ea} = R_e$, $xfex = x$ dhe $L_{bf} = L_f$ ku $a, b \in E(S) = u\overline{E}u$, të tillë që $a \mathcal{R}\, xfex\, \mathcal{L}\, b$ ose $a \mathcal{R}\, x\, \mathcal{L}\, b$ në S. Por meqë,

$$ue = xx' \Rightarrow eue = exx' \Rightarrow e = exx'$$
$$fu = x'x \Rightarrow fuf = x'xf \Rightarrow f = x'xf$$

do të rrjedhë:

$$fe = x'xf \cdot exx' = x'(xfex)\cdot x' = x'xx' = x'$$

Pra $fe = x'$, domethënë $fe \in V(x)$.
Por $fe \in u\overline{E} \cdot \overline{E}u \subset u\overline{E}u = E(S)$, domethënë fe është idempotent në S. Kështu x' është idempotent në S, dhe meqë S është ortodoks kemi:

$$x = xx'x = xx' \cdot x'x \in E(S),$$

sepse $xx' \in E(S)$ dhe $x'x \in E(S)$, domethënë del se x është idempotent. Pra, $x^2 = x$.
Ndërsa për të treguar se $L_f \cdot R_e \subset V(x)$, marrim elementin çfarëdo $gh \in L_f R_e$ ku $g \in L_f$ dhe $h \in R_e$. Pra $L_g = L_f$ në $u\overline{E}$ dhe $R_h = R_e$ në $\overline{E}u$.
Kështu elementi $(R_h, x, L_g) = (R_e, x, L_f)$ është idempotent në K, që do të thotë (ashtu si edhe për fe) se edhe $gh \in V(x)$.
Treguam kështu se $L_f R_e \subset V(x)$. Për pasojë rrjedh se:

$$E(K) \subset \{ (R_e, x, L_f) \mid L_f R_e \subset V(x) \text{ dhe } x^2 = x \}$$

Le të jetë tani $(R_e, x, L_f) \in K$ një element i tillë që $L_f \cdot R_e \subset V(x)$ dhe $x^2 = x$.
Të tregojmë se $(R_e, x, L_f)^2 = (R_e, x, L_f)$. Nga shumëzimi në K kemi:

$$(R_e, x, L_f)\,(R_e, x, L_f) = (R_{ea}, xfex, L_{bf})$$

ku $a,b \in E(S) = u\overline{E}u$ dhe $a \mathcal{R}\, xfex \mathcal{L}\, b$ në S.
Së pari, meqë $L_f R_e \subset V(x)$ rrjedh se $fe \in V(x)$, pra $xfex = x$.
Së dyti, nga $x^2 = x$ dhe pohimi 5.3.2, rrjedh $(R_e, x, L_f) = (R_{ex}, x, L_{xf})$, prej nga $R_e = R_{ex}$ ose $e\mathcal{R}ex$ në $\overline{E}u$. Por meqenëse kemi edhe $a\mathcal{R}xfex$ në $\overline{E}u$ do të rrjedhë $a\mathcal{R}x$, pra $ea\mathcal{R}ex$ (sepse a; $xfex = x$; e janë elementë të $\overline{E}u$) Në këto kushte është i vërtetë implikimi $e\mathcal{R}ex\mathcal{R}ea \Rightarrow e\mathcal{R}ea$ në $\overline{E}u$ që do të thotë se $R_e = R_{ea}$ në $\overline{E}u$. Njëlloj tegohet se edhe $L_f = L_{bf}$ në $u\overline{E}$. Kështu përfundimisht është vërtetuar se

$$(R_e, x, L_f)^2 = (R_{ea}, xfex, L_{bf}) = (R_e, x, L_f)$$

domethënë $(R_e, x, L_f) \in E(K)$. Prandaj është e vërtetë edhe përfshirja:

$$\{(R_e, x, L_f) \mid L_f R_e \subset V(x) \text{ dhe } x^2 = x\} \subset E(K)$$

që provon se:

$$E(K) = \{(R_e, x, L_f) \mid L_f R_e \subset V(x) \text{ dhe } x^2 = x\}$$

(4) Të tregojmë që $\overline{E(K)} = \{(R_e, x, L_f) \in K \mid x^2 = x\}$

Nëse $(R_k, z, L_p) \in \overline{E(K)}$, atëhere ky element do të ishte prodhim idempotentësh nga $E(K)$. Por në qoftë se (R_e, x, L_f) dhe (R_g, y, L_h) janë dy idempotentë në K atëhere, nga sa treguam më sipër kemi që $x^2 = x$ dhe $y^2 = y$. Për më tepër,

$$(R_e, x, L_f)\cdot(R_g, y, L_h) = (R_{ea}, xfgy, L_{bh})$$

dhe $x \in E(S)$, $y \in E(S)$, ndërsa $fg \in u\overline{E} \cdot \overline{E}u \subset u\overline{E}u = E(S)$
domethënë x, y, fg janë idempotentë në S. Atëherë, meqë S është ortodoks, rrjedh që edhe prodhimi i tyre $xfgy$ është idempotent në S. Kjo tregon se çdo element (R_k, z, L_p) në $\overline{E(K)}$, i cili siç thamë është produkt idempotentësh në $E(K)$, komponentin e mesit z, do ta ketë përsëri idempotent në S dmth $z \in E(S)$.
Pra $(R_k, z, L_p) \in \{(R_e, x, L_f) \in K \mid x^2 = x\}$ dhe kështu ka vend përfshirja:

$$\overline{E(K)} \subset \{(R_e, x, L_f) \in K \mid x^2 = x\}$$

Por është e vërtetë gjithashtu edhe përfshirja e anasjelltë. Kështu nëse $(R_e, x, L_f) \in K$ dhe $x^2 = x$ atëhere (R_e, x, L_x), (R_x, x, L_f) janë idempotentë të K-së. Vërtetë, që (R_e, x, L_x) të jetë idempotent në K duhet që $x^2 = x$ dhe $L_xR_e \subset V(x)$. Barazimi $x^2 = x$ plotësohet. Kështu mbetet të provojmë se $L_x\cdot R_e \subset V(x)$. Le të jetë $ab \in L_xR_e$ ku $a \in L_x$ dhe $b \in R_e$. Pra $L_a = L_x$ dhe $R_b = R_e$, kështu që $(R_b, x, L_a) = (R_e, x, L_x)$. Meqë $(R_b, x, L_a) \in K$ dhe $x^2 = x$, kemi $ub = xx'$ dhe $au = x'x$ për ndonjë $x' \in V(x)$, prej nga rrjedh se:

$$ubx = x \text{ dhe } xau = x \quad \text{ose} \quad xbx = x \text{ dhe } xax = x,$$

sepse u- është njësh i gjysëmgrupit S, (dmth $ux = xu = x$). Shohim gjithashtu se nga $L_a = L_x$ rrjedh $a \mathcal{L} x$ në $u\overline{E}$, dmth gjendet $t \in u\overline{E}$ e tillë që $a = tx$, prej nga $ax = txx = tx^2 = tx = a$. Pra $ax = a$, prej të cilit rrjedh $xax = xa$ ose $x = xa$. Në këto kushte do të kemi:

$$abxab = ab(xa)b = abxb = (ax)bxb = a(xbx)b = axb = (ax)b = ab$$

dhe

$$xabx = (xa)bx = xbx = x$$

që do të thotë se $ab \in V(x)$, ose $L_xR_e \subset V(x)$. Kemi treguar kështu se elementi (R_e, x, L_x) është idempotent në K. Në mënyrë të ngjashme tregohet se edhe $(R_e, x, L_f) \in E(K)$. Mbetet tani për t'u treguar se $(R_e, x, L_f) = (R_e, x, L_x)(R_x, x, L_f)$, që do të dëshmonte se çdo element i formës $(R_e, x, L_f) \in K$ i tillë që $x^2 = x$, shprehet si prodhim idempotentësh në K. Pra, do t'i përkiste $\overline{E(K)}$. Vërtet:

$$(R_e, x, L_x)(R_x, x, L_f) = (R_{ea}, x\cdot x\cdot x\cdot x, L_{bf}) = (R_{ea}, x, L_{bf})$$

ku $a \mathcal{R} x \mathcal{L} b$ dhe $ue = xx'$ ose $e = exx'$. Gjithashtu, nga $(R_{ea}, x, L_{bf}) \in K$ rrjedh ekzistenca e $x'' \in V(x)$ të tillë që $uea = xx''$ ose $ea = exx''$. Por meqë $xx' \mathcal{R} xx''$ në $\overline{E}u$ dhe $e \in \overline{E}u$ rrjedh $exx' \mathcal{R} exx''$ ose, $e \mathcal{R} ea$, d.m.th. $R_e = R_{ea}$ në $\overline{E}u$. Njëlloj tregohet edhe $L_{bf} = L_f$, që do të thotë se është i vërtetë barazimi:

$$(R_e, x, L_f) = (R_{ea}, x, L_{bf})$$

ose

$$(R_e, x, L_f) = (R_e, x, L_x)\,(R_x, x, L_f)$$

d.m.th. elementi i çfardoshëm (R_e, x, L_f) i bashkësisë $\{(R_e, x, L_f) \in K \mid x^2 = x\}$ është prodhim idempotentësh të $E(K)$ dhe kjo tregon se:

$$\{(R_e, x, L_f) \in K \mid x^2 = x\} \subset \overline{E(K)}$$

Kështu përfundimisht kemi treguar se:

$$\overline{E(K)} = \{(R_e, x, L_f) \in K \mid x^2 = x\}$$

(5) Të vërtetojmë që $\overline{u} = (R_u, u, L_u)$ është idempotent medial në K.

Le të jetë (R_e, x, L_f) një element çfarëdo në $\overline{E(K)}$. Tani do të kemi:

$$\begin{aligned}(R_e, x, L_f)(R_u, u, L_u)(R_e, x, L_f) &= (R_{ea}, xfuu, L_{bu})(R_e, x, L_f)\\ &= (R_{ea}, xx'x, L_{bu})(R_e, x, L_f)\\ &= (R_{ea}, x, L_{bu})\,(R_e, x, L_f)\\ &= (R_{eac}, xbuex, L_{df})\\ &= (R_{eac}, xbxx'x, L_{df})\\ &= (R_{eac}, xbx, L_{df})\end{aligned}$$

ku $a \mathcal{R} x \mathcal{L} b$ dhe $c \mathcal{R} xbx \mathcal{L} d$ në S dhe $a, b, c, d \in E(S)$.

Meqë $(R_{ea}, x, L_{bu}) \in K$ rrjedh se $bu \cdot u = x''x$ për ndonjë invers x'' të x-it. Prandaj kemi:

$$bu \cdot u = x''x \;\Rightarrow\; bu = x''x \;\Rightarrow\; b = x''x \;\Rightarrow\; xbx = xx''xx = xx = x$$

Kështu duke synuar që tregojmë vërtetësinë e barazimit

$$(R_{eac}, xbx, L_{df}) = (R_e, x, L_f)$$

kemi treguar se $xbx = x$. Për më tepër nga përcaktimi i K-së, dhe fakti që $(R_e, x, L_f) \in K$ rrjedh

$$ue = xx' \mathcal{R}\, x \;\Rightarrow\; ue \,\mathcal{R}\, x \;\Rightarrow\; e \,\mathcal{R}\, ex$$

në $\overline{E}u$ ku $x' \in V(x)$ (sepse $ue, x \in \overline{E}u$)
Gjithashtu,

$$(R_{eac}, x, L_{df}) \in K \Rightarrow ueac = xx'''\mathcal{R}\, x \Rightarrow ueac\, \mathcal{R}\, x \Rightarrow eac\, \mathcal{R}\, ex$$

në $\overline{E}u$ ku $x''' \in V(x)$, prej nga rrjedh $e\, \mathcal{R}\, ex\, \mathcal{R}\, eac$ në $\overline{E}u$ ose $R_{eac} = R_e$ në $\overline{E}u$.
Njëlloj tregohet se edhe $L_{df} = L_f$. Prandaj $\overline{u} = (R_u, u, L_f)$ është idempotent medial në K.

(6) Së fundi mbetet për të treguar se $\overline{E} \cong \overline{E(K)}$ dhe $\overline{u}K\overline{u} \cong S$
Ndërtoj pasqyrimin: $\Phi : \overline{E} \to \overline{E(K)}$

$$x \to (R_{xu}, uxu, L_{ux})$$

Është e qartë se $(R_{xu}, uxu, L_{ux}) \in \overline{E(K)}$, sepse $uxu \in u\overline{E}u = E(S)$. Pra $(uxu)^2 = uxu$.
Pasqyrimi Φ është i përcaktuar drejt sepse $\forall x \in \overline{E}$, shëmbëllimi i tij është i vetëm.
Të tregojmë së pari që ky pasqyrim është injektiv. Supozojmë që për elementët $x, y \in \overline{E}$, kemi $x\Phi = y\Phi$, d.m.th.

$$(R_{xu}, uxu, L_{ux}) = (R_{yu}, uyu, L_{uy})$$

Pra kemi $uxu = uyu$, $xu\, \mathcal{R}\, yu$ në $\overline{E}u$ dhe $ux\, \mathcal{L}\, uy$ në $u\overline{E}$. Kështu që do të ekzistojnë $t \in \overline{E}u$ dhe $g \in u\overline{E}$ të tillë që

$$\begin{array}{lcl}
xu = yut & \text{dhe} & ux = gyu \\
x = yutx & \text{dhe} & x = xguy \\
uxu = u.yutx.u & \text{dhe} & uxu = u.xguy.u \\
uyu = uyutxu & \text{dhe} & uyu = uxguyu \\
y = yutx.uy & \text{dhe} & y = yu.xguy \\
\underline{y = xuy} & \underline{\text{dhe}} & \underline{y = yux}
\end{array}$$

Njëlloj gjejmë se $\underline{x = yux}$ dhe $\underline{x = xuy}$ që tregojnë përfundimisht se $x = y$.
Kështu pasqyrimi Φ – është injektiv.
Së dyti, le të jetë (R_e, x, L_f) është një element çfardo i $\overline{E(K)}$. Të tregojmë se ekziston një element i $\overline{E}$, shëmbëllimi i të cilit sipas Φ është pikërisht (R_e, x, L_f). Meqë $(R_e, x, L_f) \in \overline{E(K)}$, kemi që $x^2 = x \in E(S)$ dhe se ekziston $x' \in V(x)$ i tillë që $ue = xx'$ dhe $fu = x'x$.
Gjithashtu elementi $exf \in \overline{E}$ meqë $e, x, f \in \overline{E}$, sepse $e \in \overline{E}u \subset \overline{E}$, $f \in u\overline{E} \subset \overline{E}$ dhe $x \in E(S) = u\overline{E}u$. Tani të tregojmë që

$$(exf)\Phi = (R_e, x, L_f)$$

Vërtet,

$$(exf)\Phi = (R_{exfu}, uexfu, L_{uexf}), \quad \text{dhe} \quad uexfu = xx'xx'x = xx'x = x$$

Gjithashtu kemi $ue = xx'$ dhe $x\, \mathcal{R}\, xx'$ në $\overline{E}u$ prej nga rrjedh $x\, \mathcal{R}\, ue$ në $\overline{E}u$. Por, meqë $\mathcal{R}$ është kongruencë e majtë në $\overline{E}u$, dhe $e \in \overline{E}u$ kemi $ex\, \mathcal{R}\, e$ ose $R_e = R_{ex}$ në

$\overline{E}u$. Por edhe $R_{exfu} = R_{exx'x} = R_{ex}$. Kështu që $R_{exfu} = R_e$ në $\overline{E}u$ dhe njëlloj gjejmë $L_{uexf} = L_f$ në $u\overline{E}$ që do të thotë se:

$$(R_{exfu}, uexfu, L_{uexf}) = (R_e, x, L_f) \quad \text{ose} \quad (exf)\Phi = (R_e, x, L_f)$$

Pra kemi treguar kështu që Φ-është syrjektiv.
Të tregojmë që Φ-është homomorfizëm. Pra të tregojmë se për çdo dy elementë $x,y \in \overline{E}$ kemi që $(xy)\Phi = x\Phi y\Phi$ ose $(R_{xyu}, uxyu, L_{uxy}) = (R_{ux}, uxu, L_{ux})\,(R_{yu}, uyu, L_{uy})$ dmth duhet të tregojmë se $(R_{xyu}, uxyu, L_{uxy}) = (R_{xua}, uxu.ux.yu.uyu, L_{buy})$, ku $a\mathcal{R}uxuuxyuuyu\mathcal{L}b$ dhe $a,b \in E(S)$. Shohim që komponentët e mesit janë të barabartë sepse:

$$uxu.uxyu.uyu = uxuxyuyu = uxyu$$

Kështu duhet të tregojmë se

$$(R_{xyu}, uxyu, L_{uxy}) = (R_{xua}, uxyu, L_{buy}) \quad \text{ose} \quad (R_{xyu}, uxyu, L_{uxy}) = (R_{xa}, uxyu, L_{by})$$

Pra mbetet për të treguar që $R_{xyu} = R_{xa}$ dhe $L_{uxy} = L_{by}$.
Por meqë $(R_{xyu}, uxyu, L_{uxy}) \in K$ kemi $xyu = (uxyu)\,(uxyu)'$ ku $(uxyu)' \in V(uxyu)$ dhe $(uxyu)\,(uxyu)'\mathcal{R}uxyu$ në $\overline{E}u$, prej nga rrjedh $xyu\ \mathcal{R}\ uxyu$ në $\overline{E}u$. Po ashtu, meqë $(R_{xa}, uxyu, L_{by}) \in K$ do të kemi $xa\mathcal{R}uxyu$ në $\overline{E}u$, prej nga rrjedh se $xyu\ \mathcal{R}\ xa$ në $\overline{E}u$ dmth $R_{xyu} = R_{xa}$ në $\overline{E}u$. Në të njëjtën mënyrë gjejmë se $L_{uxy} = L_{by}$ në $u\overline{E}$ dhe konkludojmë se $(xy)\Phi = x\Phi y\Phi$. Pra $\overline{E} \cong \overline{E(K)}$.
Tani mbetet për të treguar se $\bar{u}K\bar{u} \cong S$. Ndërtoj pasqyrimin:

$$\begin{aligned} \Psi: S &\to \bar{u}K\bar{u} \\ x &\to (R_{xx'}, x, L_{x'x}) \end{aligned}$$

ku $x' \in V(x)$. Së pari të tregojmë që $(R_{xx'}, x, L_{x'x}) \in \bar{u}K\bar{u}$. Vërtetë nëse $(R_e, x, L_f) \in K$, atëherë

$$\begin{aligned} \bar{u}(R_e, x, L_f)\bar{u} &= (R_u, u, L_u)\,(R_e, x, L_f)\,(R_u, u, L_u) \\ &= (R_{ua}, uuex, L_{bf})\,(R_u, u, L_u) \\ &= (R_a, uex, L_{bf})\,(R_u, u, L_u) \end{aligned}$$

ku $ue = xx''$ dhe $fu = x''x$ për ndonjë $x'' \in V(x)$, kështu që do kemi:

$$\begin{aligned} \bar{u}(R_e, x, L_f)\bar{u} &= (R_a, xx''x, L_{bf})\,(R_u, u, L_u) \\ &= (R_a, x, L_{bf})\,(R_u, u, L_u) \\ &= (R_{ac}, xbfuu, L_{du}) \\ &= (R_{ac}, xbfu, L_d) \\ &= (R_{ac}, xbx''x, L_d) \end{aligned}$$

ku a, b, c, d- janë idempotentë në të tillë që $a \mathcal{R} x \mathcal{L} b$ dhe $c \mathcal{R} xbfu \mathcal{L} d$ në S. Pra kemi $\bar{u}(R_{e,} x, L_f)\bar{u} = (R_{ac}, xbx''x, L_d)$, por meqë $(R_{a,} x, L_{bf}) \in K$, rrjedh $bfu = x'''x$ ku $x''' \in V(x)$ ose $xbx''x = xbfu = xx'''x = x$. Kështu që $\bar{u}(R_{e,} x, L_f)\, \bar{u} = (R_{ac}, x, L_d)$, që do të thotë se gjendet $x^* \in V(x)$ i tillë që $uac = xx^*$ ose $ac = xx^*$ dhe akoma $d = du = x^*x$ dmth $\bar{u}(R_{e,} x, L_f)\bar{u} = (R_{xx*}, x, L_{x*x})$. Por meqë $R_{xx*} = R_{xx'}$ në $\overline{E}\, u$ dhe $L_{x*x} = L_{x'x}$ në $u\overline{E}$ për çdo $x', x^* \in V(x)$, konkludojmë se çdo element $\bar{u}(R_{e,} x, L_f)\, \bar{u} \in \bar{u}K\bar{u}$ është i formës $(R_{xx'}, x, L_{x'x})$ ku $R_{xx'}$ dhe $L_{x'x}$ nuk varen nga zgjedhja x' në $V(x)$. Nga sa thamë rrjedh menjëherë injektiviteti dhe syrjektiviteti i pasqyrimit Ψ.

Për të provuar se $S \cong \bar{u}K\bar{u}$, le të tregojmë që për çdo dy elementë $x,y \in S$, kemi

$$(xy)\Psi = x\Psi\, y\Psi$$

Vërtet,

$$x\Psi\, y\Psi = (R_{xx'}, x, L_{x'x}).\ (R_{yy'}, y, L_{y'y}) = (R_{xxa'}, xx'xyy'y, L_{dy'y}) = (R_{xx'a}, xy, L_{dy'y})$$

ku $a,b \in E(S)$ dhe $a \mathcal{R} xy \mathcal{L} d$ në S.

Ndërsa $(xy)\,\Psi = (R_{(xy)(xy)'}, xy, L_{(xy)'(xy)})$. Pra mbetet për të treguar se:

$$R_{xx'a} = R_{(xy)(xy)'} \quad \text{dhe} \quad L_{dy'y} = L_{(xy)'(xy)}$$

Meqë $(R_{xx'a}, xy, L_{dy'y}) \in K$ rrjedh se $uxx'a = (xy)(xy)''$ ose $xx'a = (xy)(xy)''$, sepse u është njësh i S dhe se $(xy)'' \in V(xy)$.

Pra, $R_{xx'a} = R_{(xy)(xy)'}$ dhe njëlloj do të kemi $L_{dy'y} = L_{(xy)'(xy)}$

Kështu përfundimisht kemi treguar edhe $(xy)\Psi = x\Psi\, y\Psi$ dmth $\bar{u}K\bar{u} \cong S$. ■

Në këtë paragraf ne do të tregojmë se çdo gjysmëgrup i rregullt T që përmban një idempotent medial u, mund të ndërtohet në mënyrën e treguar mësipër (me afërsinë e izomorfizmit), ku "tullat" për ndërtimin e tij do ti gjejmë tek vetë gjysmëgrupi T. Konkretisht në rolin e gjysmëgrupit të rregullt të gjeneruar prej idempotentësh do të jetë $\overline{E(T)}$, ndërsa në rolin e gjysmëgrupit ortodoks me njësh do të jetë uTu. Është evidente që të dy nënbashkësitë e T, $\overline{E(T)}$ dhe uTu janë nëngjysmëgrupe të T. Për të gjitha këto që thamë do të vërtetojmë teoremën e mëposhtme:

***Teoremë* 5.3.2.** [27] *N.q.s T është një gjysëmgrup i rregullt që përmban një idempotetnt medial u, atëhere* $T \cong K = K(\overline{E(T)}, uTu)$, *ku pasqyrimi*:

$$\begin{aligned} \theta:\ T &\rightarrow K = K(\overline{E(T)}, uTu) \\ x &\rightarrow (R_{xx'}, uxu, L_{x'x}) \end{aligned}$$

është një izomorfizëm i T-së në K dhe $x' \in V(x) \cap uTu$.

***Vërtetim*.** Në fillim të tregojmë që pasqyrimi θ është i përcaktuar drejt. Pra të tregojmë që nëse $x''\in V(x) \cap uTu$ kemi që $(R_{xx'}, uxu, L_{x'x}) = (R_{xx''}, uxu, L_{x''x})$ ose më saktë të tregojmë se $R_{xx'} = R_{xx''}$ dhe $L_{x'x} = L_{x''x}$. Kjo është evidente sepse:

$$xx' = (xx''x)x' = (xx'')(xx') \quad \text{dhe} \quad xx'' = (xx'x)x' = (xx')(xx'') \quad \text{ku} \quad xx', xx''\in E(T)$$

Por, $x', x''\in uTu$ dmth $x'u = x'$ dhe $x''u = x''$. Pra $xx' = xx'u \in \overline{E(T)}\,u$. Kështu që $xx'\mathcal{R}\, xx''$ në $\overline{E(T)}\,u$ dhe njëlloj tregohet edhe $x'x\mathcal{L}\, x''x$ në $u\,\overline{E(T)}$ prej nga rrjedh se $R_{xx'} = R_{xx''}$ dhe $L_{x'x} = L_{x''x}$ dmth $(R_{xx'}, uxu, L_{x'x}) = (R_{xx''}, uxu, L_{x''x})$ që tregon se θ është i përcaktuar drejt. Shohim gjithashtu se $V(x) \cap uTu \neq \Phi$, për çdo $x \in T$. Vërtetë meqë T është i rregullt, çdo element $x\in T$, ka të paktën një invers $x'\in V(x)$. Nga ana tjetër shohim se,

$$x\,ux'u\,x = xx'x = x \quad \text{dhe} \quad ux'u\,x\,ux'u = ux'xx'u = ux'u$$

Kështu elementi $ux'u \in uTu$ është gjithashtu një invers i x-it, dmth $ux'u \in V(x)$. Pra,

$$ux'u \in V(x) \cap uTu \quad \text{ose} \quad V(x) \cap uTu \neq \Phi$$

Meqë,

$K(\overline{E(T)}, uTu) = \{(R_e, uxu, L_f) \in \overline{E(T)}\,u \,/\, \mathcal{R} \text{ x } uTu \text{ x } u\,\overline{E(T)}\,/\mathcal{L}$, ku $(uxu)(uxu)' = ue$ dhe $(uxu)'(uxu) = fu\}$,

të tergojmë se elementët e formës $(R_{xx'}, uxu, L_{x'x})$ janë elementë të $K(\overline{E(T)}, uTu)$. Për këtë duhet të tregojmë se gjendet $(uxu)' \in V(uxu)$ i tillë që:

$$uxx' = (uxu)(uxu)' \quad \text{dhe} \quad x'xu = (uxu)'(uxu)$$

Vërtet, meqë $x' \in V(x) \cap uTu$, rrjedh $x' = uyu$ për ndonjë $y \in T$. Por kur uyu është një invers i x-it rrjedh se uyu është invers edhe i uxu, dmth $uyu = (uxu)'$, sepse kemi të vërteta barazimet:

$$uxu\cdot uyu\cdot uxu = uxu\cdot x'\cdot uxu = uxx'xu = uxu$$

dhe

$$uyu\cdot uxu\cdot uyu = uyu\cdot x\cdot uyu = x'xx' = x' = uyu$$

Kështu që

$$uxx' = ux\cdot uyu = uxu\cdot uyu = (uxu)(uxu)'$$

dhe

$$x'xu = uyu\cdot xu = uyu\cdot uxu = (uxu)'(uxu)$$

Këto barazime tregojnë $(R_{xx'}, uxu, L_{x'x}) \in K(\overline{E(T)}, uTu)$, për çdo element x nga T.

Tani të vërtetojmë që pasqyrimi θ është injektiv. Le të jenë $x, y \in T$, dy elementë të çfarëdoshëm. Kemi:

$$x\theta = y\theta \Rightarrow (R_{xx'}, uxu, L_{x'x}) = (R_{yy'}, uyu, L_{y'y})$$
$$\Rightarrow R_{xx'} = R_{yy'};\ uxu = uyu;\ L_{x'x} = L_{y'y}$$

Por, meqë $x', y' \in uTu$ do të rrjedhë:

$$ux'u = ux' = x'u = x' \quad \text{dhe} \quad uy'u = uy' = y'u = y'$$

Gjithashtu kemi:

$$y'xy' = (y'u)x(uy') = y'(uxu)y' = y'(uyu)y' = y'yy' = y'$$

Prandaj,

$$R_{xx'} = R_{yy'} \Rightarrow xx' \mathcal{R} yy' \Rightarrow xx' = yy't \quad \text{për ndonjë} \quad t \in \overline{E(T)}u$$

dmth

$$xx'x = yy'tx \Rightarrow x = yy'tx \Rightarrow y'x = y'yy'tx \Rightarrow y'x = y'tx$$

Kështu që $x = yy'tx = yy'x$. Pra,

$$x = yy'x \Rightarrow xy' = yy'xy' \Rightarrow xy' = yy' \Rightarrow xy'y = yy'y \quad \text{ose}$$
$$xy'y = y \qquad (5.4.1)$$

Nga ana tjetër meqë $L_{x'x} = L_{y'y}$ rrjedh se $x'x \mathcal{L} y'y$ në $u\overline{E(T)}$ d.m.th.

$$y'y = lx'x \qquad (5.4.2)$$

për ndonjë $l \in u\overline{E(T)}$ prej nga $y'yx' = lx'xx'$ ose

$$lx' = y'yx' \quad (5.4.3)$$

Shohim akoma që:

$$uyy'yu = uyu = uxu \quad \text{ose}$$
$$(uyu)y'(uyu) = uxu \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (uxu)y'(uxu) = uxu \qquad /\cdot x' \text{ nga të dyja anët}$$
$$\Rightarrow x'uxy'xux' = x'uxux'$$
$$\Rightarrow x'xy'xx' = x'xx'$$
$$\Rightarrow x'xy'xx' = x' \qquad /\cdot x \text{ nga të dyja anët}$$
$$\Rightarrow xx'xy'xx'x = xx'x$$
$$\Rightarrow xy'x = x \qquad (5.4.4)$$

Duke shfrytëzuar barazimet (5.4.1), (5.4.2), (5.4.3) dhe (5.4.4) kemi:

$$\begin{aligned} y &= xy'y = x(y'y) = x(lx'x) = x(lx')x \\ &= x(y'yx')x = x(y'u)y(ux')x = xy'(uyu)x'x \\ &= xy'uxux'x = xy'xx'x \\ &= xy'x \\ &= x \end{aligned}$$

Kemi treguar kështu që pasqyrimi θ është injektiv. Për të treguar se θ është edhe syrjektiv mjafton të tregojmë se për çdo element $(R_e, uxu, L_f) \in K = K(\overline{E(T)}, uTu)$ gjendet një element $y \in T$ i tillë që $y\theta = (R_e, uxu, L_f)$.

Le të marrim $y = exf$ dhe të provojmë që $y\theta = (exf)\theta = (R_e, uxu, L_f)$. Nga përcaktimi i pasqyrimit θ kemi $(exf)\theta = (R_{(exf)(exf)'}, uexfu, L_{(exf)'(exf)})$. Kështu mjafton të tregojmë se janë të vërteta barazimet:

$$uexfu = uxu$$

$$R_{(exf)(exf)'} = R_e$$
$$L_{(exf)'(exf)} = L_f$$

Meqë,

$fu = (uxu)'(uxu) \Rightarrow uxu \cdot fu = uxu \Rightarrow uxfu = uxu$ dhe

$ue = (uxu)(uxu)' \Rightarrow ue \cdot uxu = uxu \Rightarrow uexu = uxu$ ku $(uxu)' \in V(uxu)$

rrjedh se

$$uexfu = (ueu)xfu = ue(uxfu) = ue(uxu) = uexu = uxu$$

Pra treguam $uexfu = uxu$ dmth komponenti i mesit është i barabartë.

Meqë $(R_e, uxu, L_f) \in K$ dhe $(R_{(exf)(exf)'}, uxu, L_{(exf)'(exf)}) \in K$ ekzistojnë inversët $(uxu)', (uxu)'' \in V(uxu)$ të tillë që $ue = (uxu)(uxu)'$ dhe $u(exf)(exf)' = (uxu)(uxu)''$, për më tepër kemi $(uxu)(uxu)' \mathcal{R} (uxu)(uxu)''$ në $\overline{E(T)}u$ ose $ue \mathcal{R} u(exf)(exf)'$ prej nga rrjedh $e \mathcal{R} (exf)(exf)'$ në $\overline{E(T)}u$. Kështu që $R_{(exf)(exf)'} = R_e$ në $\overline{E(T)}u$. Në mënyrë të ngjashme tregohet edhe që $L_{(exf)'(exf)} = L_f$ në $u\overline{E(T)}$. Kështu që kemi:

$$(R_{(exf)(exf)'}, uexfu, L_{(exf)'(exf)}) = (R_e, uxu, L_f) \quad \text{ose} \quad (exf)\theta = (R_e, uxu, L_f)$$

që tregon përfundimisht se θ është syrjektiv.

Mbetet për të treguar tani që θ është homomorfizëm. Le të jenë $x, y \in T$ dy elementë të çfarëdoshëm. Do të kemi:

$$(xy)\theta = (R_{(xy)(xy)'}, uxyu, L_{(xy)'(xy)})$$

ndërsa

$$x\theta y\theta = (R_{xx'}, uxu, L_{x'x})\ (R_{yy'}, uyu, L_{y'y}) = (R_{xx'a}, uxux'xyy'uyu, L_{by'y}) = (R_{xx'a}, uxyu, L_{by'y})$$

ku $a \mathcal{R} uxyu \mathcal{L} b$ në uTu dhe a,b janë idempotentë në uTu. Shihet se komponenti i mesit për $(xy)\theta$ dhe $x\theta y\theta$ është i njëjtë, kështu që mbetet për të treguar që $R_{(xy)(xy)'} = R_{xx'a}$ dhe $L_{(xy)'(xy)} = L_{by'y}$. Meqë $(R_{(xy)(xy)'}, uxyu, L_{(xy)'(xy)}) \in K$ dhe $(R_{xx'a}, uxyu, L_{by'y}) \in K$, gjenden $(uxyu)', (uxyu)'' \in V(uxyu)$ të tilla që:

$$u(xy)(xy)' = (uxyu)(uxyu)' \text{ dhe } uxx'a = (uxyu)(uxyu)''$$

për më tepër kemi $(uxyu)(uxyu)' \mathcal{R} (uxyu)(uxyu)''$ ose $u(xy)(xy)' \mathcal{R} uxx'a$. Por meqë $\mathcal{R}$ është kongruencë e majtë dhe $xx' \in \overline{E(T)}u$, do të rrjedhë $xx' \cdot u(xy)(xy)' \mathcal{R} xx' \cdot uxx'a$ ose $(xy)(xy)' \mathcal{R} xx'a$. Por kjo do të thotë se $R_{(xy)(xy)'} = R_{xx'a}$. Njëlloj tregohet edhe barazimi tjetër $L_{(xy)'(xy)} = L_{by'y}$.

Kështu përfundimisht kemi $(xy)\theta = x\theta y\theta$, që do të thotë se θ është izomorfizëm dhe $T \cong K = K(\overline{E(T)}, uTu)$ ■

5.4. Ndërtimi i një gjysmëgrupi inversiv që përmban një idempotent medial

M. Loganathan në vitin 1987, në [34] ka përshkruar se si mund të ndërtohet një gjysmëgrup i rregullt i cili përmban një idempotent medial duke përdorur si "tulla ndërtimi" një gjysëmgrup të rregullt të gjeneruar prej idempotentësh $\overline{E}$ që përmban një idempodent medial u dhe një gjysmëgrup ortodoks me njësh S, banda e idempotentëve të të cilit është izomorfe me $u\overline{E}u$. Në [31] ne kemi dhënë vërtetime të detajuara të pohimeve që Loganathan formuloi në artikullin e tij.
Duke marrë shkas pikërisht nga ky artikull ne kemi treguar se si mund të ndërtojmë një **gjysmëgrup inversiv që përmban një idempotent medial**. Është e natyrshme se për të përmisuar cilësitë e gjysmëgruit që do të ndërtojmë, nga i rregullt në inversiv, duhet që patjetër të përmisojmë edhe cilësitë e "mjeteve ndërtuese" të tij. Kështu në vend të $\overline{E}$ - gjysmëgrupi i rregullt i gjeneruar prej idempotentësh që përmbante një idempotent medial *u*, ne kemi marrë një bandë ndërrimtare E e cila përmban një idempotent medial *u*.
Le të jetë dhënë E një bandë ndërrimtare dhe *u* një idempotent medial i saj. Le të jetë gjithashtu S një gjysmëgrup ortodoks me njësh, me bandë idempotentësh $E(S) \cong E$. Nga ky izomorfizëm ne do të identifikojmë strukturat $E(S)$ dhe E, kështu që *u* - kthehet në njësh të gjysmëgrupit S.
Vërtet, nëse e do ishte njëshi i *S*, atëhere $e^2 = e$, pra $e \in E(S)$. Nga ana tjetër *u* është njësh për E sepse: $\forall e \in E,\ ue = eu = eeu = eue = e$ dhe meqë $E \cong E(S)$ rrjedh se u kthehet në njësh për $E(S)$, pikërisht nga identifikimi i strukturave izomorfe të mësipërme. Kështu që do të kemi njëkohësisht:

$eu = ue = u$ (*e*- njësh i S-së pra edhe i $E(S)$)

$eu = ue = e$ (*u*- njësh E, pra edhe i $E(S)$)

Prej nga del se $u = e$.
Tani duke përdorur gjysmëgrupet e dhëna E dhe S, do synojmë që të ndërtojmë një gjysëmgrup inversiv K që të përmbajë një idempotent medial.
Le të jenë:

$E/\mathcal{R} = \{R_e \mid e \in E\}$ bashkësia e $\mathcal{R}$-klasave në E

Tani shqyrtojmë bashkësinë:

$$K = K(E,S) = \{ (R_e, x, R_f) \in E/\mathcal{R} \text{ x } S \text{ x } E/\mathcal{R} \mid R_e \subset R_x^S \text{ dhe } R_f \subset L_x^S \}$$

Ku R_x^S dhe L_x^S janë përkatësisht $\mathcal{R}$ - klasa dhe $\mathcal{L}$ - klasa që përmbajnë elementin x në *S*. Por shohim që:

$$R_e \subset R_x^S \Leftrightarrow e\mathcal{R}x \text{ në } S \qquad \text{dhe} \qquad R_f \subset L_x^S \Leftrightarrow x\mathcal{L}f \text{ në } S,$$

d.m.th. kemi $e\mathcal{R}x\mathcal{L}f$ në *S*. Pra bashkësia $K = K(E,S)$ shkruhet në trajtën:

$$K = \{ (R_e, x, R_f) \in E/\mathcal{R} \text{ x } S \text{ x } E/\mathcal{R} \mid e\mathcal{R}x\mathcal{L}f \text{ në } S \}$$

Le të tentojmë ta transformojmë akoma kushtin që duhet të plotësojnë elementët e K. Për këtë do të vërtetojmë ekujvalencën:

$$(e \mathcal{R} x \mathcal{L} f \text{ në } S) \Leftrightarrow (e = xx` \wedge f = x`x)$$

ku $x`$ është një invers i $x$ në $S$. Pra, $xx`x = x$ dhe $x`xx` = x`$

Vërtet, nëse $e = xx`$ dhe $f = x`x$, kemi: $e = xx' \mathcal{R} x \mathcal{L} x'x = f$, pra kemi $e \mathcal{R} x \mathcal{L} f$ në S.

Anasjellas, supozojmë se kemi $e \mathcal{R} x \mathcal{L} f$ në S. Meqë $e\mathcal{R}x$ në S do të ekzistojnë $s,t \in S$ të tillë që $x = et \wedge e = xs$ prej nga rrjedh $ex = et \wedge ex = xsx$. Pra, $ex = et = x$ dhe për pasojë $x = xsx$. Po ashtu tregohet se nga $x \mathcal{L} f$ në S rrjedh $xf = x$ dhe $f = vx$ për ndonjë $v \in S$.

Shënojmë $x' = fse$ dhe kemi:

$$\begin{aligned} xx'x &= x\cdot fse\cdot x = (xf)s(ex) = xsx = x \\ x'xx' &= fse\cdot x\cdot fse = fs(ex)fse = fs\cdot x\cdot fse = \\ &= fs(xf)se = fs\cdot x\cdot se = \\ &= fs(xs)e = fs\cdot e\cdot e = fse = x' \end{aligned}$$

Kështu kemi treguar se x' është një invers i x dhe për më tepër shohim se:

$$\begin{aligned} xx' &= xfse = xse = ee = e \\ x'x &= fsex = fsx = vxsx = vx = f \end{aligned}$$

Prandaj përfundimisht K - merr trajtën:

$$K = \{ (R_e, x, R_f) \in E/\mathcal{R} \text{ x } S \text{ x } E/\mathcal{R} \mid e = xx` \wedge f = x`x \text{ dhe } x` \text{ invers i } x \text{ në } S\}$$

Natyrisht që $K \neq \Phi$ sepse $(R_u, u, R_u) \in K$.

Përcaktojmë në K - një veprim binar si mëposhtë:

$$(R_e, x, R_f)\,(R_h, y, R_k) = (R_{ea}, xfhy, R_{bk})$$

ku $a,b \in E$ të tillë që $a \mathcal{R} xfhy \mathcal{L} b$ në S.

<u>Së pari</u> të tregojmë që $(R_{ea}, xfhy, R_{bk}) \in K$, dmth veprimi i përcaktuar më sipër është veprim algjebrik i mbrendshëm në K.

Meqenëse nga përcaktimi i veprimit të mësipërm kemi $a \mathcal{R} xfhy \mathcal{L} b$ në S rrjedh:

$$ea \mathcal{R} exfhy \quad \text{dhe} \quad xfhyk \mathcal{L} bk$$

dhe meqë $xx' = e$, $y'y = k$, relacionet e fundit shkruhen kështu:

$$(ea \mathcal{R} xx'xfhy \wedge xfhyy'y \mathcal{L} bk) \quad \text{ose} \quad (ea \mathcal{R} xfhy \wedge xfhy \mathcal{L} bk)$$

dmth kemi $ea\,\mathcal{R}\,xfhy\,\mathcal{L}\,bk$ në S që do të thotë se (R_{ea} , $xfhy$, R_{bk}) $\in K$.

<u>Së dyti</u> të tregojmë që ky veprim është i përcaktuar saktë, d.m.th. nuk varet nga përfaqësuesit e klasave të ekuivalencës R_f , R_h dhe as nga idempotentët $a,b\in E$ të tillë që $a\,\mathcal{R}\,xfhy\,\mathcal{L}\,b$ në S. Vërtet, le të jenë $f`\in R_f$ dhe $h`\in R_h$, dy përfaqësues të tjerë të këtyre klasave. Nga përcaktimi i K-së, gjendet inversi x' i x në S, i tillë që:

$$x\cdot fh\cdot y = xx`x\cdot fh\cdot yy`y = x\cdot x`xf\cdot hyy`\cdot y = x\cdot x`xf`\cdot h`yy`\cdot y = x\cdot f`h`\cdot y$$

(barazimi i parafundit është i vërtetë sepse $(R_e,x,R_f)\in K$ dhe duke shfrytëzuar silësitë e tyre kemi: $f = x`x \Rightarrow xf = x \Rightarrow x`x\cdot f = x`x$, dhe në të njëjtën mënyrë veprojmë për $f`$ dhe gjejmë $x`x\cdot f = x`x$, prej nga marrim $x`x\ f = x`x\ f`$ që u shfrytzua më sipër). Kjo tregon se komponenti i mesit në veprimin e përcaktuar nuk varet nga zgjedhja e përfaqësuesve të klasave të ekuivalencës $R_f$ dhe $R_h$ . Të shohim tani që edhe komponenti i majtë $R_{ea}$ , nuk varet as nga zgjedhja përfaqësuesit të $R_e$ ($e$ apo $e`\in R_e$) dhe as nga $a\in E$, apo $a`\in E$ . Vërtet, meqë $a\mathcal{R}\,x\cdot fh\cdot y$ dhe $a`\mathcal{R}\,x\cdot fh\cdot y$ do kemi $a\mathcal{R}a`$ në $E$ , d.m.th. $ea\mathcal{R}ea`$, sepse $\mathcal{R}$ është kongruencë e majtë në E . Nga ana tjetër kemi $e\mathcal{R}e`$ në $E$ sepse $e`\in R_e$ që do të thotë se $e` = e$ nga që $E$ është bandë ndërrimtare. Kështu që $ea\,\mathcal{R}\,e`a`$, d.m.th. elementët $ea$ dhe $e`a`$ i takojnë të njëjtës $\mathcal{R}$- klasë në $E$ . Pra, $R_{ea} = R_{e`a`}$, që do të thotë se edhe komponenti i parë i ( $R_{ea}, x.fh.y, R_{bk}$ ) është i përcaktuar në mënyrë të vetme. Njëlloj tregohet edhe per komponentin e tretë $R_{bk}$ , që nuk varet nga zgjedhja e $k`\in R_k$ dhe e $b`\in E$.

***Teoremë* 5.4.1.** *K - me veprimin e përcaktuar në të është gjysmëgrup inversiv.*

Vërtetim. Le të jenë (R_e, x, R_f), (R_g, y, R_h) dhe (R_t, z, R_s) tre elementë të çfarëdoshëm të K-së dhe të tregojmë se veprimi i përcaktuar në K është shoqërimtar. Vërtetë,

$$[(R_e, x, R_f)\,(R_g, y, R_h)]\,(R_t, z, R_s) = (R_{ea}, xfgy, R_{bh})\,(R_t, z, R_s) = (R_{eac}, xfgybhtz, R_{ds})$$

ku $a\,\mathcal{R}\,xfgy\mathcal{L}b$ dhe $c\,\mathcal{R}\,xfgybhtz\,\mathcal{L}\,d$ në S dhe

$$(R_e, x, R_f)\,[(R_g, y, R_h)\,(R_t, z, R_s)] = (R_e, x, R_f)(R_{ga}, yhtz, R_{b's}) = (R_{ec`}, xfga`yhtz, R_{d`b`s})$$

ku $a`\,\mathcal{R}\,yhtz\,\mathcal{L}\,b`$ dhe $c`\mathcal{R}\,xfha`yhtz\,\mathcal{L}\,d`$ në S.

Të vërtetojmë në fillim barazimin e komponentëve të mesit. Meqë $(R_{ea}, xfgy, R_{bh})\in K$ rrjedh

$$bh = (xfgy)'(xfgy) \text{ ose } xfgy = xfgybh \text{ ose } xfgyh = xfgybh$$

ose

$$xfgyhtz = xfgybhtz \qquad (5.4.1)$$

Nga ana tjetër meqë $(R_{ga}, yhtz, R_{b'h}) \in K$ do të kemi:

$$ga' = (yhtz)(yhtz)' \text{ ose } yhtz = ga'yhtz$$

prej nga $gyhtz = ga'yhtz$ ose $xfgyhtz = xfga'yhtz$ (5.4.2)
Nga barazimet e mësipërme (5.4.1) dhe (5.4.2) rrjedh se $xfgybhtz = xfga'yhtz$.
Tani shënojmë komponentin e mesit me $w = xfgybhtz = xfga'yhtz$ dhe mbetet për të treguar tani barazimin:

$$(R_{eac}, w, R_{ds}) = (R_{ec`}, w, R_{d`b`s})$$

Meqë këto dy elementë i përkasin K – së kemi: $eac = ww'$ dhe $ec' = ww''$ ku w' dhe w'' janë inversë të w në S që do të thotë se $ww' \mathcal{R} ww''$ në S. Kështu kemi $eac \mathcal{R} ec'$. Pra $R_{eac} = R_{ec`}$. Njëlloj tregohet se edhe $R_{ds} = R_{d'b's}$.
Kështu përfundimisht kemi treguar se veprimi i përcaktuar më sipër në K ka vetinë e shoqërimit d.m.th. K- është gjysëmgrup në lidhje me këtë veprim.
Të provojmë që $K = K(E, S)$ është i rregullt.
Le të jetë $(R_e, x, R_f) \in K$ dhe x' një invers i x i tillë që $xx' = e$ dhe $x'x = f$. Le të tregojmë se $(R_f, x', R_e) \in K$ dhe për më tepër është një invers i elementit (R_e, x, R_f).
Së pari është e vërtetë që $(R_f, x', R_e) \in K$, sepse ekziston një inversi i x', (që është vetë x) i tillë që $f = x'x$. Njëlloj tregohet se edhe $e = xx'$. Prandaj themi se $(R_f, x', R_e) \in K$. Shohim gjithashtu që:

$$\begin{aligned}(R_e, x, R_f)\,(R_f, x', R_e)\,(R_e, x, R_f) &= (R_{ea}, xffx', R_{be})\,(R_e, x, R_f)\\ &= (R_{ea}, xx', R_{be})\,(R_e, x, R_f)\\ &= (R_{eac}, xx'beex, R_{df})\\ &= (R_{eac}, xx'bx, R_{df})\end{aligned}$$

dhe të tregojmë akoma se $(R_{eac}, xx'bx, R_{df}) = (R_e, x, R_f)$.
Meqë $(R_{ea}, xx', R_{be}) \in K$ do të thotë se $be = (xx')'(xx')$ për ndonjë invers $(xx')'$ të xx' ose

$$xx'be = xx' \Rightarrow xx'bxx' = xx' \Rightarrow xx'bxx'x = xx'x \Rightarrow xx'bx = x$$

Kështu që komponenti i mesit është i njëjtë, prandaj mbetet për të treguar që:

$$(R_{eac}, x, R_{df}) = (R_e, x, R_f)$$

Nga fakti që $(R_{eac}, x, R_{df}) \in K$ rrjedh se ekziston x'' invers i x i tillë që:

$$(eac = xx'' \wedge df = x''x) \quad \text{ose} \quad (eac = exx'' \wedge df = x''xf)$$

Nga ana tjetër $xx'' \in E$ dhe $xx' \in E$, për më tepër janë të vërteta këto barazime:

$$\begin{aligned}xx' &= (xx''x)x' = (xx'')(xx')\\ xx'' &= (xx'x)x'' = (xx')(xx'')\end{aligned}$$

prej të cilave rrjedh $xx' \mathcal{R} xx''$ në E. Por meqë $e \in E$ kemi $exx' \mathcal{R} exx''$ ose $ee \mathcal{R} eac$ dmth $e \mathcal{R} eac$. Pra $R_e = R_{eac}$ në E. Njëlloj tregohet $R_f = R_{df}$ në E. Kështu treguam se:

$$(R_e, x, R_f)\,(R_{fu}, x', R_{ue})\,(R_e, x, R_f) = (R_{eac}, xx'bx, R_{df}) = (R_e, x, R_f) \qquad (5.4.3)$$

Nga ana tjetër kemi:

$$\begin{aligned}(R_f, x', R_e)\,(R_e, x, R_f)\,(R_f, x', R_e) &= (R_{fa}, x'eex, R_{be})(R_f, x', R_e)\\ &= (R_{fa}, x'ex, R_{be})(R_f, x', R_e)\\ &= (R_{fa}, x'x, R_{be})(R_f, x', R_e)\\ &= (R_{fac}, x'xbefx', R_{de})\\ &= (R_{fac}, x'xbex', R_{de})\end{aligned}$$

ku a, b, c, d janë idempotentë në S, pra $a, b, c, d \in E$ dhe të tillë që:

$$(\, a \mathcal{R}\, x'eex\, \mathcal{L}\, b \wedge c\, \mathcal{R}\, x'xbefx'\, \mathcal{L}\, d\,) \quad \text{ose} \quad (\, a\, \mathcal{R}\, x'x\, \mathcal{L}\, b \;\wedge\; c\, \mathcal{R}\, x'xbex'\, \mathcal{L}\, d\,)$$

Të tregojmë tani që

$$(R_{fac}, x'xbex', R_{de}) = (R_f, x', R_e)$$

Së pari, nga përcaktimi i elementëve të K-së dhe meqë $(R_{fa}, x'x, R_{be}) \in K$ kemi:

$$fa = (x'x)(x'x)' \quad \text{dhe} \quad be = (x'x)'(x'x) \quad \text{ku } (x'x)' \text{ është invers i } x'x$$

ose

$$fax'x = x'x \quad \text{dhe} \quad x'xbe = x'x$$

ose

$$fax' = x' \quad \text{dhe} \quad xbe = x$$

Nga $xbe = x$ rrjedh $x'xbex' = x'xx'$ ose, $x'xbex' = x'$, që tregon se komponenti i mesit është i njëjtë. Tani mbetet të tregojmë që:

$$(R_{fac}, x', R_{de}) = (R_f, x', R_e)$$

Meqë $(R_{fac}, x', R_{de}) \in K$, gjendet x'' invers i x' në S i tillë që

$$fac = x'x'' \quad \text{dhe} \quad de = x''x' \quad \text{ose} \quad fac = fx'x'' \quad \text{dhe} \quad de = x''x'e$$

Nga ana tjetër $x'x'' \in E$ dhe $x''x' \in E$, për më tepër janë të vërteta këto barazime:

$$\begin{aligned}x'x'' &= (\,x'xx'\,)x'' = (x'x)(x'x'')\\ x'x &= (x'x''x')x = (x'x'')(x'x)\end{aligned}$$

prej të cilave rrjedh $x'x\, \mathcal{R}\, x'x''$ në E. Kështu do të kemi:

$$fx'x\, \mathcal{R}\, fx'x'' \quad \text{ose,} \quad ff\, \mathcal{R}\, fac \quad \text{ose,} \quad f\, \mathcal{R}\, fac$$

Pra $R_f = R_{fac}$ në E. Njëlloj tregohet $R_e = R_{de}$ në E. Kështu treguam se:

$$(R_f, x', R_e)(R_e, x, R_f)(R_f, x', R_e) = (R_{fac}, x'xbex', R_{de}) = (R_f, x', R_e) \qquad (5.4.4)$$

Barazimet (5.4.3) dhe (5.4.4) tregojnë se elementi i çfardoshëm $(R_e, x, R_f) \in K$ ka invers elementin (R_f, x', R_e) dmth K është gjysëmgrup i rregullt.
Për të treguar se K është inversiv, le të hulumtojmë pak për natyrën e idempotentëve të gjysmëgrupit K. Supozojmë se elementi $(R_e, x, R_f) \in K$ është idepotent. Pra është i vërtetë barazimi:

$$(R_e, x, R_f)(R_e, x, R_f) = (R_e, x, R_f)$$

Nga ana tjetër, në bazë të përcaktimit të shumëzimit në K kemi:

$$(R_e, x, L_f)(R_e, x, L_f) = (R_{ea}, xfex, R_{bf})$$

ku $a, b \in E$ janë të tilla që $a \mathcal{R} xfex \mathcal{R} b$ prej nga përftojmë:

$$(R_e, x, R_f) = (R_{ea}, xfex, R_{bf})$$

Nga barazimi i këtyre dy elementëve të K rrjedh se komponenti i mesit i tyre është i njëjtë. Pra do kemi $x = xfex$. Por, duke u nisur nga natyra e elementëve të K dhe nga fakti se $(R_e, x, R_f) \in K$ do kemi edhe barazimet $e = xx'$ dhe $f = x'x$ për ndonjë x' invers të x në S. Në këto kushte kemi:

$$x = xfex = x \cdot x' x \cdot xx' x = xx = x^2$$

Barazimi i fundit tregon se çdo idempotent $(R_e, x, R_f) \in K$ është i tillë që $x^2 = x$, dmth komponenti i mesit është idempotent.
Le të supozojmë tani se $(R_e, x, R_f) \in K$ është një element i tillë që $x^2 = x$. Atëherë kemi:

$$(R_e, x, R_f)(R_e, x, R_f) = (R_{ea}, xfex, R_{bf})$$

ku $e = xx'$, $f = x'x$ dhe $a, b \in E$ të tillë që $a \mathcal{R} xfex \mathcal{R} b$. Prej nga marrim:

$$xfex = x \cdot x' x \cdot xx' \cdot x = xx = x^2 = x$$

Barazimi i fundit tregon se elementët (R_e, x, R_f) dhe $(R_{ea}, xfex, R_{bf})$ e kanë komponentin e mesit të njëjtë. Në këto kushte $a \mathcal{R} xfex \mathcal{R} b$ merr trajtë $a \mathcal{R} x \mathcal{R} b$ nga ku përftojmë:

$$a \mathcal{R} x \Rightarrow ea \mathcal{R} ex \Rightarrow ea = ex \cdot t \quad \text{ose} \quad ea = e \cdot (xt) = et'$$

dhe

$$ea \mathcal{R} e x \Rightarrow e x = ea \cdot s \Rightarrow e x x' = ea \cdot sx' \Rightarrow ee = easx' \quad \text{ose} \quad e = ea \cdot s'$$

Kështu, nga barazimet $ea = et'$ dhe $e = ea \cdot s'$ rrjedh $e \mathcal{R} ea$ ose $R_e = R_{ea}$. Njëlloj provohet edhe barazimi tjetër $R_f = R_{bf}$. Kemi treguar se

$$(R_{ea}, xfex, R_{bf}) = (R_e, x, R_f)$$

ose

$$(R_e, x, R_f)(R_e, x, R_f) = (R_e, x, R_f)$$

që do të thotë se elementi $(R_e, x, R_f) \in K$ për të cilin $x^2 = x$ është idempotent në K. Përfundimisht konkludojmë se:

$$E(K) = \{(R_e, x, R_f) \in K \mid x^2 = x\}$$

Për të konkluduar se gjysmëgrupi K është inversiv mbetet të tregojmë se çdo dy idempotentë të tij janë të përkëmbyeshëm. Vërtet, le të jenë (R_e, x, R_f) dhe (R_h, y, R_k) dy idempotentë nga $E(K)$. Nga cilësia e elementëve të $E(K)$ kemi: $x^2 = x$ dhe $y^2 = y$. Atëherë,

$$(R_e, x, R_f)(R_h, y, R_k) = (R_{ea}, xfhy, R_{bk})$$

dhe

$$(R_h, y, R_k)(R_e, x, R_f) = (R_{ha'}, ykex, R_{b'f})$$

ku $a, b, a', b' \in E$ dhe të tillë që $a \mathcal{R} xfey \mathcal{R} b$ dhe $a' \mathcal{R} ykex \mathcal{R} b'$ në S. Për më tepër, nga cilësia e elementëve të K kemi:

$$e = xx', \ f = x'x, \ h = yy' \text{ dhe } k = y'y$$

Në këto kushte do të përftojmë:

$$xfhy = x(x'x)hy = x(hy) = xy \quad \text{dhe} \quad ykex = y(y'y)ex = y(ex) = yx$$

Tani meqë $x^2 = x$ dhe $y^2 = y$ dhe meqë idempotentët në E janë të përkëmbyeshëm kemi $xy = yx$ ose $xfhy = ykex$ që do të thotë se komponentët e mesit të elementëve $(R_{ea}, xfhy, R_{bk})$ dhe $(R_{ha'}, ykex, R_{b'f})$ janë të barabartë me xy. Për pasojë ata marrin pamjen (R_{ea}, xy, R_{bk}) dhe $(R_{ha'}, xy, R_{b'f})$, kështu ne duhet të provojmëse $R_{ea} = R_{ha'}$ dhe $R_{bk} = R_{b'f}$. Shfrytzojmë cilësinë e elementë të K dhe mund të shkruajmë:

$$ea = (xy)(xy)' \quad \text{dhe} \quad ha' = (xy)(xy)''$$

ku $(xy)'$ dhe $(xy)''$ janë inversë të (xy). Kështu duke shumëzuar nga e majta barazimet e mësipërme me xy kemi:

$$(ea)(xy) = xy \quad \text{dhe} \quad (ha')(xy) = xy$$

Prej katër barazimeve të fundit përftojmë:

$$ea = (xy)(xy)' = (ha')(xy)(xy)' = (ha')t$$

dhe

$$ha' = (xy)(xy)'' = (ea)(xy)(xy)'' = (ea)s$$

Pra konkludojmë se $ea\mathcal{R}ha'$ ose $R_{ea} = R_{ha'}$. Njëloj provohet se edhe $R_{bk} = R_{b'f}$, që do të thotë se kemi vërtetuar barazimin:

$$(R_e, x, R_f)(R_h, y, R_k) = (R_h, y, R_k)(R_e, x, R_f)$$

dmth çdo dy idempotentë të K janë të përkëmbyeshëm. Kjo tregon se gjysmëgrupi K është inversiv.

***Teoremë* 5.4.2.** $\bar{u} = (R_u, u, R_u)$ *është idempotent medial i* K, $E(K) \cong E$ *dhe* $\bar{u}K\bar{u} \cong S$

Vërtetim.

Le të jetë (R_e, x, R_f) një element çfarëdo në $E(K)$. Tani do të kemi:

$$\begin{aligned}(R_e, x, R_f)(R_u, u, R_u)(R_e, x, R_f) &= (R_{ea}, xfuu, R_{bu})(R_e, x, R_f)\\ &= (R_{ea}, xf, R_b)(R_e, x, R_f)\\ &= (R_{ea}, x, R_b)\,(R_e, x, R_f)\\ &= (R_{eac}, xbex, R_{df})\\ &= (R_{eac}, xbxx'x, R_{df})\\ &= (R_{eac}, xbx, R_{df})\\ &= (R_{eac}, xb, R_{df})\end{aligned}$$

ku $a, b, c, d \in E(S)$. Meqë $(R_{ea}, x, R_b) \in K$ rrjedh se $b = x''x$ për ndonjë invers x'' të x-it. Prandaj kemi: $b = x''x \Rightarrow xb = xx''x = x$

Kështu duke synuar që tregojmë vërtetësinë e barazimit $(R_{eac}, xb, R_{df}) = (R_e, x, R_f)$ kemi treguar se $xb = x$. Për më tepër nga përcaktimi i K-së, dhe fakti që $(R_e, x, R_f) \in K$ rrjedh $e = xx'\mathcal{R}\,x \Rightarrow e\,\mathcal{R}\,ex$ në E dhe x' invers i x. Gjithashtu,

$$(R_{eac}, x, R_{df}) \in K \;\Rightarrow\; eac = xx'''\mathcal{R}\,x \;\Rightarrow\; eac\,\mathcal{R}\,x$$

në E dhe x''' invers i x, prej nga rrjedh $e\,\mathcal{R}\,ex\,\mathcal{R}\,eac$ në E ose $R_{eac} = R_e$ në E.

Njëlloj tregohet edhe $R_{df} = R_f$. Prandaj $\bar{u} = (R_u, u, R_u)$ është idempotent medial në K.

<u>Së fundi</u> mbetet për të treguar se $E \cong E(K)$ dhe $\bar{u}K\bar{u} \cong S$

Ndërtoj pasqyrimin: $\Phi : E \to E(K)$ ku $x \to (R_x, x, R_x)$, për çdo $x \in E$

Është e qartë se $(R_x, x, R_x) \in E(K)$, sepse $x \in E$.

Të tregojmë <u>së pari</u> që ky pasqyrim është injektiv. Supozojmë që për elementët $x, y \in E$, kemi $x\Phi = y\Phi$, d.m.th. $(R_x, x, R_x) = (R_y, y, R_y)$, nga ku rrjedh se $x = y$, që do të thotë se pasqyrimi Φ – është injektiv.

<u>Së dyti</u>, le të jetë (R_e, x, R_f) një element çfardo i $E(K)$. Të tregojmë se ekziston një element i E, shëmbëllimi i të cilit sipas Φ është pikërisht (R_e, x, R_f). Meqë $(R_e, x, R_f) \in E(K)$, kemi që $x^2 = x \in E$ dhe njëkohësisht do të ekzistojë x' invers i x i tillë që $e = xx'$ dhe $f = x'x$. Gjithashtu elementi $exf \in E$ meqë $e, x, f \in E$. Tani të tregojmë që

$$(exf)\Phi = (R_e, x, R_f)$$

Vërtet,

$$(exf)\Phi = (R_{exf}, exf, R_{exf}), \quad \text{dhe} \quad exf = (xx')x(x'x) = xx'x = x$$

Gjithashtu kemi $e = xx'$ dhe $x \mathcal{R} xx'$ në E prej nga rrjedh $x \mathcal{R} e$ në ose $ex \mathcal{R} e$. Pra, $R_e = R_{ex}$ në E. Por edhe $R_{exf} = R_{exx'x} = R_{ex}$. Kështu që $R_{exf} = R_e$ në E dhe njëlloj edhe $R_{exf} = R_f$ që do të thotë se:

$$(R_{exf}, exf, R_{exf}) = (R_e, x, R_f) \quad \text{ose} \quad (exf)\Phi = (R_e, x, R_f)$$

Pra kemi treguar kështu që Φ-është syrjektiv.

Të tregojmë që Φ-është homomorfizëm. Pra të tregojmë se për çdo dy elementë $x,y \in E$ kemi që:

$$(xy)\Phi = x\Phi y\Phi \quad \text{ose} \quad (R_{xy}, xy, R_{xy}) = (R_x, x, R_x)\,(R_y, y, R_y)$$

dmth duhet të tregojmë se:

$$(R_{xy}, xy, R_{xy}) = (R_{xa}, xxyy, R_{by}), \text{ ku } a\mathcal{R}xxyy\mathcal{L}b \text{ dhe } a,b \in E(S)$$

Shohim që komponentët e mesit janë të barabartë sepse:

$$xxyy = x^2y^2 = xy$$

Kështu duhet të tregojmë se

$$(R_{xy}, xy, R_{xy}) = (R_{xa}, xy, R_{by})$$

Pra mbetet për të treguar që $R_{xy} = R_{xa}$ dhe $R_{xy} = R_{by}$.

Por meqë $(R_{xa}, xy, R_{by}) \in K$ kemi:

$$xa = (xy)(xy)' \text{ dhe prej saj } xy = (xa)(xy)$$

ku $(xy)'$ është një invers i xy. Barazimet e fundit tregojnë se $R_{xy} = R_{xa}$ në E. Në të njëjtën mënyrë gjejmë se $R_{xy} = R_{by}$ në E dhe konkludojmë se $(xy)\Phi = x\Phi y\Phi$. Pra,

$$E \cong E(K)$$

Tani mbetet për të treguar se $\bar{u}K\bar{u} \cong S$. Ndërtoj pasqyrimin:

$$\Psi: S \to \bar{u}K\bar{u}$$
$$x \to (R_{xx'}, x, R_{x'x})$$

ku x' një invers i x në S.

Së pari të tregojmë që $(R_{xx'}, x, R_{x'x}) \in \bar{u}K\bar{u}$. Vërtetë nëse $(R_e, x, R_f) \in K$, atëherë

$$\begin{aligned}\bar{u}(R_e, x, R_f)\bar{u} &= (R_u, u, R_u)\,(R_e, x, R_f)\,(R_u, u, R_u)\\ &= (R_{ua}, uuex, R_{bf})\,(R_u, u, R_u)\\ &= (R_a, ex, R_{bf})\,(R_u, u, R_u)\end{aligned}$$

ku $e = xx''$ dhe $f = x''x$ për ndonjë invers x'' të x, kështu që do kemi:

$$\begin{aligned}\bar{u}(R_e, x, L_f)\bar{u} &= (R_a, xx''x, R_{bf})\,(R_u, u, R_u)\\ &= (R_a, x, R_{bf})\,(R_u, u, R_u)\\ &= (R_{ac}, xbfuu, R_{du})\\ &= (R_{ac}, xbf, R_d)\\ &= (R_{ac}, xbx''x, R_d)\\ &= (R_{ac}, xx''xb, R_d)\\ &= (R_{ac}, xb, R_d)\end{aligned}$$

ku a, b, c, d- janë idempotentë në të tillë që $a \mathcal{R} x \mathcal{L} b$ dhe $c \mathcal{R} xbf \mathcal{L} d$ në S. Pra kemi:

$$\bar{u}(R_{e,}\, x,\, R_f)\bar{u} \;=\; (R_{ac},\, x,\, R_d),$$

Por barazimi i fundit do të thotë se gjendet x^* invers i x, i tillë që $ac = xx^*$ dhe akoma $d = x^*x$ dmth $\bar{u}(R_{e,}\, x,\, R_f)\bar{u} = (R_{xx*},\, x,\, R_{x*x})$. Por meqë $R_{xx*} = R_{xx'}$ në E (sepse x', x^* janë që të dy inversë të x), konkludojmë se çdo element $\bar{u}(R_{e,}\, x,\, R_f)\bar{u} \in \bar{u}K\bar{u}$ është i formës $(R_{xx'},\, x,\, R_{x'x})$ ku $R_{xx'}$ nuk varet nga zgjedhja x' në $V(x)$.
Nga sa thamë më sipër rrjedh menjëherë injektiviteti dhe syrjektiviteti i pasqyrimit Ψ.
Për të provuar se $S \cong \bar{u}K\bar{u}$, le të tregojmë që për çdo dy elementë $x,y \in S$, kemi

$$(xy)\Psi = x\Psi\, y\Psi$$

Vërtet,

$$x\Psi\, y\Psi = (R_{xx'},\, x,\, R_{x'x}).\,(R_{yy'},\, y,\, R_{y'y}) = (R_{xxa'},\, xx'xyy'y,\, R_{dy'y}) = (R_{xx'a},\, xy,\, R_{dy'y})$$

ku $a,b \in E(S)$ dhe $a\,\mathcal{R}\,xy\,\mathcal{L}\,d$ në S.
Nga ana tjetër shohim se:

$$(xy)\,\Psi = (R_{(xy)(xy)'},\, xy,\, R_{(xy)'(xy)})$$

Pra mbetet për të treguar se:

$$R_{xx'a} \;=\; R_{(xy)(xy)'} \quad \text{dhe} \quad R_{dy'y} = R_{(xy)'(xy)}$$

Meqë $(R_{xx'a},\, xy,\, L_{dy'y}) \in K$ rrjedh se $xx'a = (xy)(xy)''$ për ndonjë invers $(xy)''$ të xy. Pra, $R_{xx'a} = R_{(xy)(xy)''}$ ose $R_{xx'a} = R_{(xy)(xy)'}$. Në të njëjtën mënyrë provohet edhe barazimi tjetër $R_{dy'y} = R_{(xy)'(xy)}$
Kështu përfundimisht kemi treguar edhe $(xy)\Psi = x\Psi\, y\Psi$ dmth $\bar{u}K\bar{u} \cong S$. ■

Tani, ne do të tregojmë të anasjellën, që çdo gjysmëgrup inversiv T që përmban një idempotent medial u, mund të ndërtohet në mënyrën e treguar mësipër (me afërsinë e izomorfizmit), ku "tullat" për ndërtimin e tij do ti gjejmë tek vetë gjysmëgrupi T. Konkretisht do të tregojmë se T është izomorf me gjysmëgrupin $K = K(E(T),T)$, për ndërtimin e të cilit folëm në paragrafin paraardhës.
Është e vërtetë teorema e mëposhtme:

***Teoremë* 5.4.3.** *N.q.s T është një gjysëmgrup inversiv që përmban një idempotetnt medial u, atëhere* $T \cong K = K(E(T),T)$, *ku pasqyrimi*:

$$\theta:\; T \;\rightarrow\; K = K(E(T),T)$$
$$x \;\rightarrow\; (R_{xx'},\, x,\, R_{x'x})$$

është një izomorfizëm i T-së në K dhe x' inversi i x në T
Vërtetim. Meqë T është inversiv do të thotë se x' është invers i vetëm i x në T. Kjo tregon se pasqyrimi θ është i përcaktuar drejt. Meqë,

$$K(E(T),T) = \{(R_{e,}\, x,\, R_f) \in E(T)/\mathcal{R} \times T \times E(T)/\mathcal{R},\ |\ \text{ku } xx' = e \text{ dhe } x'x = f\},$$

rrjedh se elementët e formës $(R_{xx'},\, x,\, R_{x'x})$ janë elementë të $K(E(T),T)$ duke patur parasysh përcaktimin e elementëve të tij.

Tani të vërtetojmë që pasqyrimi θ është injektiv. Le të jenë $x, y \in T$, dy elementë të çfarëdoshëm. Kemi:

$$x\theta = y\theta \Rightarrow (R_{xx'}, x, R_{x'x}) = (R_{yy'}, y, R_{y'y}) \Rightarrow x = y$$

Për të treguar se θ është edhe syrjektiv mjafton të tregojmë se për çdo element $(R_e, x, R_f) \in K = K(E(T), T)$ gjendet një element $y \in T$ i tillë që $y\theta = (R_e, x, R_f)$.
Le të marrim $y = exf$ dhe të provojmë që $y\theta = (exf)\theta = (R_e, x, R_f)$. Nga përcaktimi i pasqyrimit θ kemi $(exf)\theta = (R_{(exf)(exf)'}, exf, R_{(exf)'(exf)})$. Kështu mjafton të tregojmë se janë të vërteta barazimet:

$$exf = x; \quad R_{(exf)(exf)'} = R_e; \quad R_{(exf)'(exf)} = R_f$$

Vërtetë,

$$exf = xx'xf = xx'x = x$$

Pra treguam $exf = x$ dmth komponenti i mesit është i barabartë. Në këto kushte merren menjëherë edhe dy barazimet e tjera:

$$R_{(exf)(exf)'} = R_{xx'} = R_e \quad \text{dhe} \quad R_{(exf)'(exf)} = R_{x'x} = R_f$$

që tregon përfundimisht se θ është syrjektiv. Mbetet për të treguar tani që θ është homomorfizëm. Le të jenë $x, y \in T$ dy elementë të çfarëdoshëm. Do të kemi:

$$(xy)\theta = (R_{(xy)(xy)'}, xy, R_{(xy)'(xy)}),$$

ndërsa

$$x\theta y\theta = (R_{xx'}, x, R_{x'x})\,(R_{yy'}, y, R_{y'y}) = (R_{xx'a}, xx'xyy'y, R_{by'y}) = (R_{xx'a}, xy, R_{by'y})$$

ku $a\mathcal{R}xy\mathcal{L}b$ në T dhe a,b janë idempotentë të tij. Shihet se komponenti i mesit për $(xy)\theta$ dhe $x\theta y\theta$ është i njëjtë, kështu që mbetet për të treguar që $R_{(xy)(xy)'} = R_{xx'a}$ dhe $R_{(xy)'(xy)} = R_{by'y}$. Meqë $(R_{xx'a}, xy, R_{by'y}) \in K$,

$$xx'a = (xy)(xy)' \quad \text{dhe} \quad by'y = (xy)'(xy)$$

prej nga rrjedh se $R_{(xy)(xy)'} = R_{xx'a}$ dhe $R_{(xy)'(xy)} = R_{by'y}$. Kështu përfundimisht kemi treguar se $(xy)\theta = x\theta y\theta$, që do të thotë se θ është izomorfizëm dhe $T \cong K = K(E(T), T)$ ■

5.5 Ndërtimi i gjysmëgrupit të rregullt që përmban një idempotent medial normal

Fundin e këtij punimi do t'ia kushtojmë ndërtimit të gjysmëgrupeve të rregullta që përmbajnë një idempotent medial normal. Do përdorim si "tulla ndërtimi" **a)** një gjysmëgrup të rregullt i gjeneruar prej idempotentësh $\overline{E}$ që përmban një idempotent medial normal *u* dhe **b)** një gjysmëgrup inversiv me njësh S, semillatica e idempotentëve të cilit E^0 është izomorfe me $u\overline{E}u$. Kështu ne do ti identifikojmë këto dy struktura, pra $E^0 = u\overline{E}u$

Le të jetë S një gjysmëgrup i rregullt që përmban një idempotent medial normal *u*. Shënojmë F_u dhe ${}_uF$ relacionet e ekuivalencës që u shoqërohen translacioneve $\lambda_u : x \to ux$, $\rho_u : x \to xu$, ku:

$$x\,F_u\,y \Leftrightarrow x\lambda_u = y\lambda_u \Leftrightarrow ux = uy \quad \text{dhe} \quad x\,{}_uF\,y \Leftrightarrow x\rho_u = y\rho_u \Leftrightarrow xu = yu$$

Është e vërtetë kjo teoremë:

***Teoremë* 5.5.1.** [31],[33] *Le të jetë S- një gjysmëgrup i rregullt dhe le të jetë* $u \in S$ *një idempotent medial. Atëherë pohimet e mëposhtme janë ekuivalente*:

(1) *u- është normal*

(2) *Relacionet e Green-it* $\mathcal{R}, \mathcal{L}$ *në* $\overline{E}$ *jepen nga* $\mathcal{R} = {}_uF$ *dhe* $\mathcal{L} = F_u$ ■

***Rrjedhim* 5.5.1.** [31],[33] *N.q.s. u është idempotent medial normal, atëherë në* $\overline{E}$ *kemi* $\mathfrak{D} = \mathcal{F}$ *ku* $x\,\mathcal{F}\,y \Leftrightarrow uxu = uyu$ ■

Supozojmë tani që $\overline{E}$ është një gjysmëgrup i rregullt i gjeneruar prej idempotentësh që përmban një idempotent medial normal *u*. Le të jetë E^0 semillatica $u\overline{E}u$, dhe supozojmë që *S* është një gjysmëgrup inversiv me njësh me semillaticë idempotentësh izomorfe me E^0. Atëherë ne do të identifikojmë algjebrikisht semillaticat $E(S)$ dhe $E^0 = u\overline{E}u$. Me këtë marrëveshje elementi u i E^0, kthehet në njësh të gjysmëgrupit inversiv *S*. Pra është njëlloj sikur të themi se heqim nga S bashkësinë e idempotentëve të tij duke "transplnatuar" në vend të saj E^0. Kështu mund të shkruajmë: $a \in S \Rightarrow aa^{-1} \in E^0 = u\overline{E}u$ dhe meqë u është njësh i gjysmëgrupit *S*, rrjedh se $aa^{-1} = uaa^{-1}$ për pasojë kemi: $a = aa^{-1}a = uaa^{-1}a = ua$. Njëlloj tregohet edhe barazimi tjetër $a = au$. Dmth $au = a = ua$ për çdo a në *S*. Prandaj *u* luan rolin e njëshit në *S*.

Le të jetë tani T_{E^0} bashkësia e të gjithë izomorfizmave midis idealeve kryesore të E^0. Le të jenë $\theta, \varphi \in T_{E^0}$ dy izomorfizma të tillë $\theta : e_\theta E^0 \to f_\theta E^0$ dhe $\varphi : e_\varphi E^0 \to f_\varphi E^0$ ku $e_\theta, e_\varphi, f_\theta, f_\varphi$ janë elementë të E^0. Përcaktojmë shumëzimin në T_{E^0} si më poshtë:

$$\theta \cdot \varphi : e_{\theta\varphi}E^0 \to f_{\theta\varphi}E^0 \quad \text{ku} \quad e_{\theta\varphi} = (f_\theta e_\varphi)\theta^{-1} \quad \text{dhe} \quad f_{\theta\varphi} = (f_\theta e_\varphi)\varphi$$

Shohim se kur $x \in \overline{E}$ dhe $\theta \in T_{E^0}$ kemi:

$$e_\theta x e_\theta = e_\theta u \cdot x \cdot u e_\theta = e_\theta \cdot uxu \cdot e_\theta \in e_\theta E^0 e_\theta = e_\theta E^0$$

Shënojmë $\mathcal{J}(\overline{E})$ gjysmëgrupin e plotë të transformimeve në $\overline{E}$ dhe shtrijmë çdo $\theta \in T_{E^0}$ në një pasqyrim $\overline{\theta} \in \mathcal{J}(\overline{E})$ i përcaktuar nga barazimi: $x\overline{\theta} = (e_\theta x e_\theta)\theta$ për çdo $x \in \overline{E}$.

***Teoremë* 5.5.2.** [31],[33] *Pasqyrimi* $T_{E^0} \to \mathcal{J}(\overline{E})$ *i tillë që* $\theta \to \overline{\theta}$ *për çdo* $\theta \in T_{E^0}$ *është homomorfizëm i* T_{E^0} *në* $\mathcal{J}(\overline{E})$.

***Vërtetim*:** Rrjedh menjëherë për analogji me vërtetimin e lemës 2.2 në artikullin "split orthodox semigrup" të D.B. Mc Alister dhe T.S. Blyth, J. Algebra, 51 (1978) faqe 491 – 525. [20] ■

Le të jetë tani μ: S $\to T_{E^0}$ i tillë që $\forall a \in S$, $a \xrightarrow{\mu} \mu_a$, homorfizmi i njohur Munn-it. Atëherë për çdo $a \in S$, pasqyrimi μ_a: $aa^{-1}E^0 \to a^{-1}aE^0$ i përcaktuar nga barazimi $x\mu_a = a^{-1}xa$ është një izomorfizëm i $aa^{-1}E^0$ në $a^{-1}aE^0$. Të tregojmë se $\forall\, x \in aa^{-1}E^0$, $a^{-1}xa \in a^{-1}aE^0$. Vërtetë: $a^{-1}xa = a^{-1}(aa^{-1}e)a$, ku $x = aa^{-1}e$ për ndonjë e nga E^0. Kështu $a^{-1}(aa^{-1}e)a = a^{-1}a(a^{-1}ea)$. Por $(a^{-1}ea)$ $(a^{-1}ea) = a^{-1}eea\, a^{-1}a = a^{-1}ea$, që do të thotë se $a^{-1}ea \in E^0$. Prandaj $a^{-1}xa = a^{-1}a(a^{-1}ea) \in a^{-1}aE^0$. Le të shënojmë tani: $e_a = aa^{-1}$ dhe $f_a = a^{-1}a$. Kështu nëse $a \in S$ dhe $\mu_a : e_aE^0 \to f_aE^0$ është izomorfizmi përkatës i elementit a, të tregojmë se $\mu_{a^{-1}} = \mu_a^{-1}$. <u>Së pari</u> të dy këta izomorfizma pasqyrojnë bashkësinë $a^{-1}aE^0$ në $aa^{-1}E^0$. <u>Së dyti</u> nëse $a^{-1}ae$ është një element çfarëdo i $a^{-1}aE^0$ të tregojmë se: $(a^{-1}ae)\,\mu_{a^{-1}} = (a^{-1}ae)\,\mu_a^{-1}$. Vërtetë: $(a^{-1}ae)\,\mu_{a^{-1}} = a\,(a^{-1}ae)a^{-1} = aea^{-1}$, ndërsa $(a^{-1}ae)\,\mu_a^{-1} = aa^{-1}e'$ për ndonjë $e' \in E^0$ d.m.th

$$(aa^{-1}e')\,\mu_a = a^{-1}ae \quad \text{ose}$$

$$a^{-1}(aa^{-1}e')a = a^{-1}ae \Rightarrow a^{-1}e'a = a^{-1}ae \Rightarrow$$
$$\Rightarrow aa^{-1}e'a = ae \Rightarrow aa^{-1}e'aa^{-1} = aea^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow aa^{-1}aa^{-1}e' = aea^{-1} \Rightarrow a\,a^{-1}e' = aea^{-1}$$

Atëherë,

$$(a^{-1}ae)\,\mu_a^{-1} = aa^{-1}e' = aea^{-1} = a\,(a^{-1}ae)a^{-1} = (a^{-1}ae)\;\mu_{a^{-1}}$$

Kjo tregon se μ_a^{-1} dhe $\mu_{a^{-1}}$ përputhen. Le të jenë tani $\mu_a : e_aE^0 \to f_aE^0$ dhe $\mu_b : e_bE^0 \to f_bE^0$ dy izomorfizma nga T_{E^0} duke shënuar μ_{ab} kompozimin $\mu_a\mu_b$ do të kemi:

$$\mu_a\mu_b = \mu_{ab} : e_{ab}E^0 \to f_{ab}E^0$$

Të provoj që $e_{ab} = (f_ae_b)\mu_{a^{-1}}$ dhe $f_{ab} = (f_ae_b)\mu_b$. Vërtet,

$$(f_ae_b)\mu_{a^{-1}} = a(f_ae_b)a^{-1} = a(a^{-1}abb^{-1})a^{-1} = abb^{-1}a^{-1} = (ab)(ab)^{-1} = e_{ab}$$

dhe

$$(f_ae_b)\mu_b = b^{-1}(f_ae_b)b = b^{-1}(a^{-1}abb^{-1})b = b^{-1}a^{-1}ab = (ab)^{-1}(\mathrm{ab}) = f_{ab}$$

Duke u nisur nga këto përcaktime do të shënojmë me $\overline{\mu}$ homorfizmin e përbërë $S \longrightarrow T_{E^0} \longrightarrow \mathcal{J}(\overline{E})$ sipas të cilit $a \longrightarrow \mu_a \longrightarrow \overline{\mu_a}$. Do të vazhdojmë me hipotezat e mësipërme për $\overline{E}$, E^0 dhe S. Le të jenë $\mathcal{R}$ dhe $\mathcal{L}$ relacionet e Green-it në $\overline{E}$.

***Teoremë* 5.5.3.** [33] *Nëse* $a,b \in S$ *dhe* $g,h,v,w \in \overline{E}$ *të tillë që* $g\,\mathcal{L}\,e_a$, $h\,\mathcal{R}\,f_a$, $v\,\mathcal{L}\,e_b$, $w\,\mathcal{R}\,f_b$, *atëherë* $hv \in E^0$, *dhe* $g\,(hv)\overline{\mu}_{a^{-1}}\,\mathcal{L}\,e_{ahvb}$ *dhe* $(hv)\overline{\mu}_b \cdot w\ \mathcal{R}\ f_{ahvb}$

***Vërtetim*:** Nga $h\,\mathcal{R}\,f_a$ rrjedh se $h = f_a y$ për ndonjë y nga $\overline{E}$ prej nga rrjedh se: $f_a h = f_a\ f_a y = f_a y = h$ dhe njëlloj tregohet se edhe $v e_b = v$, $h f_a = f_a$, $e_b v = e_b$. Prandaj $hv = f_a h \cdot v e_b = u f_a h \cdot v e_b u = u h v u \in u\overline{E}u = E^0$ d.m.th. $hv \in E^0$ dhe për më tepër shohim që:

$$\begin{aligned} g\cdot(hv)\overline{\mu}_{a^{-1}}e_{ahvb} &= g\cdot(hv)\overline{\mu}_{a^{-1}}(f_a e_{hvb})\mu_{a^{-1}} = \mathrm{g}(f_a hv f_a)\,\mu_{a^{-1}}(f_a e_{hvb})\mu_{a^{-1}} = \\ &= \mathrm{g}(f_a hv f_a e_{hvb})\,\mu_{a^{-1}} = g[f_a hv f_a(f_{hv}e_b)\mu_{hv}]\,\mu_{a^{-1}} = \\ &= g(f_a hv f_a f_{hv} e_b f_{hv})\,\mu_{a^{-1}} = g(f_a hv f_{hv} e_b f_a)\mu_{a^{-1}} = g(f_a hv f_a)\,\mu_{a^{-1}} = \\ &= g\cdot(hv)\,\overline{\mu}_{a^{-1}} \ (\text{ku } hvf_{hv} = hv, ve_b = v \text{ dhe } f_a, f_{hv}, e_b \in E^0) \end{aligned}$$

Meqë $x\mu_{a^{-1}} \in e_a E^0$, ku $x = f_a hv f_a$, $hv = f_{hv} \in E^0$ dhe $hv \in E^0$, duke shfrytëzuar edhe teoremën 5.5.1.(2), do të kemi:

$$\begin{aligned} e_{ahvb}\cdot g(hv)\overline{\mu}_{a^{-1}} &= e_{ahvb}\cdot g(f_a hv f_a)\mu_{a^{-1}} = e_{ahvb} u g(f_a hv f_a)\mu_{a^{-1}} = e_{ahvb} e_a (f_a hv f_a)\mu_{a^{-1}} = \\ &= e_{ahvb}(f_a hv f_a)\mu_{a^{-1}} = (f_a e_{hvb})\mu_{a^{-1}}(f_a hv f_a)\mu_{a^{-1}} = (f_a e_{hvb} f_a\ hv f_a)\mu_{a^{-1}} = \\ &= [f_a(f_{hv}e_b)\mu_{(hv)^{-1}} f_a hv f_a]\,\mu_{a^{-1}} = (f_a \cdot hv f_{hv} e_b \cdot f_a hv f_a)\ \mu_{a^{-1}} = \\ &= (f_a f_{hv} e_b)\,\mu_{a^{-1}} = [f_a(f_{hv}e_b)\mu_{(hv)^{-1}}]\,\mu_{a^{-1}} = \\ &= (f_a e_{hvb})\,\mu_{a^{-1}} = e_{ahvb} \end{aligned}$$

Pra $g\cdot(hv)\overline{\mu}_{a^{-1}}\,\mathcal{L}\,e_{ahvb}$, $[(hv)\overline{\mu}_b w\,\mathcal{R}\,f_{ahvb}]$. ■

Meqenëse $g\mathcal{L}e_a$ në $\overline{E}$ rrjedh se $g = x e_a$ për ndonjë x nga $\overline{E}$. Prej nga:

$$gu = x e_a u = x(e_a u) = x e_a = g$$

d.m.th. $g = gu$ dhe njëlloj tregohet se $h = uh$

Shqyrtojmë tani bashkësinë:

$$W = W(\overline{E}, S, \overline{\mu}) = \{(g,a,h) \in \overline{E}\,u \ \text{x}\ S\ \text{x}\ u\overline{E}\ \mid g\,\mathcal{L}\,e_a,\ h\,\mathcal{R}\,f_a\}$$

dhe përcaktojmë në të shumëzimin:

$$(g,a,h)\cdot(v,b,w) = (g\cdot(hv)\overline{\mu}_{a^{-1}}, ahvb, (hv)\overline{\mu_b}\cdot w)$$

***Teoremë* 5.5.4.** [33] **(a)** *W - është gjysmëgrup në lidhje me veprimin e mësiprm*
(b) *W - është gjysmëgrup i rregullt*

(c) *Elementi* (f_a, a^{-1}, e_a) *- është invers i elementit* (g,a,h) *në* W

(d) $E(W) = \{(g,a,h) \mid a^2 = a, g = ghg, h = hgh\}$

(e) $\overline{E(W)} = \{(g,a,h)\} \mid a^2 = a\}$

(f) (u,u,u) *- është idempotent medial normal në* W

***Vërtetim*:**

(a) Nëse (g,a,h), (v,b,w), $(x,c,y) \in W$ atëherë komponenti i parë i prodhimit $[(g,a,h)\cdot(v,b,w)](x,c,y)$ është:

$$g(hv)\overline{\mu}_{a^{-1}} \cdot [(hv)\overline{\mu}_b wx]\overline{\mu}_{(ahvb)^{-1}} = g(hv)\overline{\mu}_{a^{-1}} \cdot [(hv)\overline{\mu}_b wx]\overline{\mu}_{b^{-1}} \cdot \overline{\mu}_{(hv)^{-1}}\overline{\mu}_{a^{-1}} =$$
$$= g(f_a hv f_a \cdot f_a[(hv)\overline{\mu}_b wx]\overline{\mu}_{b^{-1}}\overline{\mu}_{(hv)^{-1}} f_a)\mu_{a^{-1}} =$$
$$= g(f_a hv f_a[hv(wx)\overline{\mu}_{b^{-1}}]\overline{\mu}_{(hv)^{-1}} f_a)\mu_{a^{-1}} =$$
$$= g(f_a \cdot hv(wx)\overline{\mu}_{b^{-1}} \cdot f_a)\mu_{a^{-1}} = g[hv(wx)\overline{\mu}_{b^{-1}}]\overline{\mu}_{a^{-1}},$$

(ku $hv = (hv)^{-1} \in E^0$) dhe ky i fundit është komponenti i parë i produktit $(g,a,h)[(v,b,w)\cdot(x,c,y)]$. Pra komponentët e parë të produkteve $[(g,a,h)\cdot(v,b,w)](x,c,y)$ dhe $(g,a,h)[(v,b,w)\cdot(x,c,y)]$ përputhen. Njëlloj tregohet se edhe komponentët e tretë, përputhen. Meqë komponentët e mesit janë të barabartë në mënyrë evidente, atëherë themi se veprimi i përcaktuar më sipër në W gëzon vetinë e shoqërimit, që do të thotë se W është gjysmëgrup.

(b) Nëse $(g,a,h) \in W$, atëherë $(f_a, a^{-1}, e_a) \in W$ sepse $f_a = a^{-1}a = e_{a^{-1}}$ dmth $f_a \mathcal{L}\, e_{a^{-1}}$

Kështu:

$$(g,a,h)(f_a, a^{-1}, e_a) = (g(hf_a)\overline{\mu}_{a^{-1}}, ahf_a a^{-1}, (hf_a)\overline{\mu}_{a^{-1}} e_a) =$$
$$= (g \cdot f_a\overline{\mu}_{a^{-1}}, aa^{-1}, f_a\overline{\mu}_{a^{-1}} e_a) = (g \cdot f_a\mu_{a^{-1}}, aa^{-1}, f_a\mu_{a^{-1}} e_a) =$$
$$= (ge_a, aa^{-1}, e_a e_a) = (g, aa^{-1}, e_a)$$

dhe

$$(g,a,h)(f_a, a^{-1}, e_a)(g,a,h) = (g, aa^{-1}, e_a)(g,a,h) =$$
$$= (g(e_a g)\overline{\mu}_{aa^{-1}}, aa^{-1}e_a ga, (e_a g)\overline{\mu}_a h) =$$
$$= (g \cdot e_a\overline{\mu}_{aa^{-1}}, a, e_a\overline{\mu}_a \cdot h) = (ge_a, a, f_a h) = (g,a,h)$$

Kështu elementi i çfarëdoshëm $(g,a,h) \in W$ është i rregullt , d.m.th gjysmëgrupi W është i rregullt.

(c) Duke patur parasysh vërtetimin e pikës **(b)**, në të cilën treguam se

$$(g,a,h)(f_a, a^{-1}, e_a)(g,a,h) = (g,a,h)$$

mjafton të tregojmë që:

$$(f_a, a^{-1}, e_a)(g,a,h)(f_a, a^{-1}, e_a) = (f_a, a^{-1}, e_a)$$

Vërtet, duke shfrytëzuar faktin se nga $g \mathcal{L}\, e_a$ rrjedh $e_a g = e_a$ do të kemi:

$$
\begin{aligned}
(f_a, a^{-1}, e_a)(g,a,h)(f_a, a^{-1}, e_a) &= (f_a, a^{-1}, e_a)(g, aa^{-1}, e_a) = \\
&= (f_a \cdot (e_a g)\overline{\mu}_a, a^{-1} e_a g a a^{-1}, (e_a g)\overline{\mu}_{aa^{-1}} e_a) = \\
&= (f_a \cdot e_a \overline{\mu}_a, a^{-1}, e_a \overline{\mu}_{aa^{-1}} e_a) = \\
&= (f_a \cdot f_a, a^{-1}, e_a \cdot e_a) = \\
&= (f_a, a^{-1}, e_a)
\end{aligned}
$$

Fakti që W është i rregullt garanton që çdo element në këtë gjysmëgrup ka një element invers, ndërsa në **(c)** ne gjetëm një të tillë për (g,a,h), pikërisht (f_a, a^{-1}, e_a).

(d) Le të shqyrtojmë katrorin e një elementi çfarëdo $(g,a,h) \in W$:

$$
\begin{aligned}
(g,a,h)(g,a,h) &= (g \cdot (hg)\overline{\mu}_{a^{-1}}, ahga, (hg)\overline{\mu}_a h) = \\
&= (g(f_a hg f_a)\mu_{a^{-1}}, ahga, (e_a hg e_a)\mu_a h) = \\
&= (g(hg)\mu_{a^{-1}}, ahga, (hg)\mu_a h)
\end{aligned}
$$

ku $hg \in E^0$, $h = f_a h$, $g = g e_a$, prej nga $hg = (f_a h)g = f_a f_a hg = f_a hg f_a$, sepse elementët hg dhe f_a si elementë të E^0 janë të përkëmbyeshëm. Pra $hg = f_a hg f_a$ dhe njëlloj tregohet që $hg = e_a hg e_a$.

Le të jetë tani (g,a,h) një idempotent në W. Pra $(g,a,h) \cdot (g,a,h) = (g,a,h)$ dmth $(g(hg)\mu_{a^{-1}}, ahga, (hg)\mu_a h) = (g,a,h)$. Duke barazuar komponentët e mesit të këtyre dy tresheve do të kemi:

$$ahga = a \Rightarrow aa^{-1} = e_a = ahgaa^{-1} = ahge_a = ahg$$

dhe

$$f_a = a^{-1}a = a^{-1}ahga = f_a hga = hga$$

Pra $e_a = ahg$ dhe $f_a = hga$. Por meqënëse elementi $hg \in E^0$ është idempotent, kemi $a = ahga = ahg \cdot hga = e_a f_a \in E^0$ prandaj $a = a^2$. Prej nga rrjedh se $a^{-1} = a$ (sepse S-është inversiv që do të thotë se çdo element i tij ka një invers të vetëm dhe meqë a është idempotent, ai ka invers veteveten). Kështu që $(hg)\mu_{a^{-1}} = (hg)\mu_a = ahga = a$. Duke barazuar tani dy komponentët anësorë kemi $ga = g$ dhe $ah = h$, prej nga rrjedh:

$$ghg = g \cdot ah \cdot ga = gahga = ga = g \quad \text{dhe} \quad hgh = ah \cdot g \cdot ah = ahgah = ah = h$$

Këto dy barazimet e fundit tregojnë përfundimisht që çdo idempotent në W është i formës (g,a,h) ku $a^2 = a$, $g = ghg$ dhe $h = hgh$.

Pra,

$$E(W) \subseteq \{(g,a,h) \mid a^2 = a, g = ghg, h = hgh\}$$

Anasjellt as, le të jetë $(g,a,h \in W$, i tillë që $a^2 = a$, $g = ghg$, $h = hgh$ dhe të provojmë që $(g,a,h) \in E(W)$. Vërtetë, $e_a = a = a^{-1} = f_a$, sepse $e_a = aa^{-1} = aa = a$; $f_a = a^{-1}a = aa = a$. Kështu që nga teorema 5.5.1.(2) e zbatuar në $\overline{E}$ ($\mathcal{R} = {}_uF$ dhe $\mathcal{L} = F_u$) kemi:

$ug = ue_a = e_a = a$ (sepse $ug = u\,(ge_a) = (ug)\,e_a = e_a\,(ug) = (ue_a)\,g = e_a g = e_a$)

$hu = f_a u = f_a = a$ (sepse $hu = (f_a h)\,u = f_a\,(hu) = (hu)\,f_a = h\,(u\,f_a) = h\,f_a = f_a$)

Por, meqënëse $g = ghg$, $h = hgh$ dhe u është idempotent medial normal në $\overline{E}$ do të kemi:

$$hg = hgh\cdot g = h(ugh)\cdot g = hu\cdot ghg = hug \quad (\; ugh = gh \;\text{ sepse }\; gh \in E^0 \;)$$

Prandaj do të kemi akoma: $ahga = ahuga = a\cdot hu\cdot uga = aaaa = a^4 = a$ që do të thotë se komponenti i mesit i prodhimit $(g,a,h) \cdot (g,a,h)$ është a. Tani barazimet:

$$g\cdot(hg)\mu_{a^{-1}} = g(hg)\mu_a = g\cdot ahga = ga = gug = g$$

dhe

$$(hg)\mu_a h = ahga\cdot h = ah = huh = h$$

tregojnë se komponenti i parë dhe i tretë i prodhimit $(g,a,h) \cdot (g,a,h)$ janë përkatësisht g dhe h. Pra, $(g,a,h) \cdot (g,a,h) = (g,a,h)$, d.m.th. $(g,a,h) \in E(W)$, që dëshmon faktin se:

$$\{(g,a,h) \mid a^2 = a, g = ghg, h = hgh\} \subseteq E(W)\}$$

Pra,

$$E(W) = \{(g,a,h) \mid a^2 = a, g = ghg, h = hgh\}$$

(e) Duke u nisur nga kuptimi i gjysmëgrupit të gjeneruar nga një bashkësi A do të kemi që çdo element i $\overline{E(W)}$ është një prodhim idempotentësh nga *E(W)*, dhe nga **(d)** komponenti i mesit i secilit prej idempotentëve të *E(W)* ishte $a = a^2$, pra një element i semillaticës $E^0 = u\overline{E}u$. Tani, nga përcaktimi i shumëzimit në *W*, komponenti i mesit të produktit të të dy idempotentëve të *E(W)* do të jetë një element i E^0. Në mënyrë induktive tregohet që komponenti i mesit i prodhimit të më shumë se dy elementëve nga *E(W)*, pra i çdo elementi $\overline{E(W)}$, do të jetë gjithashtu një element nga E^0, d.m.th. idempotent. Kështu treguam se: $\overline{E(W)} \subseteq \{(g,a,h) \mid a^2 = a\}$. Anasjelltas, le të jetë $(g,a,h) \in W$, ku $a^2 = a$, atëherë: $gag = g(ag) = ga = g$, $aga = (ag)a = aa = a$ dhe $hah = (ha)h = ah = h$, $aha = a(ha) = aa = a$ d.m.th $g,h \in V(a)$ ku barazimet $ag = a$, $ga = g$, $ah = h$, $ha = a$ rrjedhin nga relacionet $g\,\mathcal{L}\,e_a$, $h\,\mathcal{R}\,f_a$ në $\overline{E}$. Kështu duke u mbështetur në **(d)** del që elementët (g,a,a) dhe (a,a,h) janë idempotentë në *W*, Për më tepër kemi që: $(g,a,a)(a,a,h) = (g\cdot a\mu_a, a, a\mu_a h) = (ga, a, ah) = (g,a,h)$. Kjo tregon që çdo element (g,a,h) ku $a^2 = a$, është një element prodhim idempotentësh nga *E(W)*, d.m.th: $\{(g,a,h) \mid a^2 = a\} \subseteq \overline{E(W)}$. Kështu, përfundimisht kemi treguar se:

$$\overline{E(W)} = \{(g,a,h) \mid a^2 = a\}$$

(f) Le të jetë (g,a,h) një element çfarëdo i $\overline{E(W)}$. Ne do të kemi $a^2 = a$ d.m.th. $a^{-1} = a$. Prandaj:

$$(g,a,h)(u,u,u)(g,a,h) = (g(hu)\overline{\mu}_a, ahu, (hu)\overline{\mu}_u u)(g,a,h) =$$

$$= (\,gahua, ahu, uhu)(g,a,h\,) = (\,g,a,a\,)\,(\,g,a,h\,) =$$

$= (g\ (ag)\overline{\mu}_a,\ aaga,\ (ag)\overline{\mu}_a\ \ h\ ) = (\ g\ a\overline{\mu}_a,\ a,\ a\overline{\mu}_a\ \ \ h\ ) =$
$= (g, a\mu_a, a, a\mu_a \cdot h) = (ga,\ a,\ ah) =$
$= (g,a,h)$

(ku: $hu = a = ua$, $ga = g$, $ag = a$, $ah = h$) që tregon se (u,u,u) është idempotent medial.
Le të jenë tani $(u,u,u)(g,a,h)(u,u,u)$ dhe $(u,u,u)(g',b,h')(u,u,u)$ dy elemente të çfardoshëm të $\overline{E(W)}$. Atëherë kemi:

$$(u,u,u)(g,a,h)(u,u,u) = (u(ug)\overline{\mu}_u, uga, (ug)\overline{\mu}_a h)(u,u,u) =$$

$$(\ uau,a,ah)(u,u,u) = (a,a,h)(u,u,u) = (a(hu)\overline{\mu}_a, ahu, (hu)\overline{\mu}_u u) = (a,a,a)$$

(ku $hu = a$, $ug = a$). Njëlloj do të gjejmë se $(u,u,u)(g',b,h')(u,u,u) = (b,b,b)$.
Por, elementi (a,a,a) ku $a^2 = a \in E^0$ është i përkëmbyeshëm me çdo element tjetër (b,b,b) ku $b^2 = b \in E^0$. Vërtet:

$$(a,a,a)\ (b,b,b) = (a(ab)\overline{\mu}_a, ab, (ab)\overline{\mu}_b b) = (ab, ab, ab) = (ba,ba,ba) = (b,b,b)\ (a,a,a)$$

sepse $ab = ba$, për $a,b \in E^0$. Përfundimisht treguam se çdo dy elementë të $(u,u,u)\overline{E(W)}$ (u,u,u) janë të përkëmbyeshëm, dmth $(u,u,u)\overline{E(W)}(u,u,u)$ është semillaticë, e për pasojë (u,u,u) është idempotent medial normal në W. ■
Deri tani, në këtë paragraf, kemi treguar se me anë të një gjysmëgrupi të rregullt të gjeneruar prej idempotentësh $\overline{E}$, që përmban një idempotent medial normal u dhe të një gjysmëgrupi inversiv me njësh S, semillatica e idempotentëve të të cilit është izomorfe me semillaticën $E^0 = u\overline{E}u$, mund të ndërtojmë një gjysmëgrup të rregullt $W = W(\overline{E}, S, \overline{\mu})$ që përmban një idempotent medial normal (u,u,u).
Tani do të shohim nëse ka lidhje midis gjysmëgrupeve $\overline{E(W)}$ dhe $\overline{E}$, si dhe midis gjysmëgrupit $(u,u,u)W(u,u,u)$ dhe gjysmëgrupit inversiv S. Faktikisht një lidhje ekziston dhe siç e tregon dhe teorema e mëposhtme ato janë respektivisht izomorfe.

***Teoremë* 5.5.5.** $\overline{E(W)} \cong \overline{E}$ *dhe* $(u,u,u)W(u,u,u) \cong S$.
***Vërtetim*:** Në teoremën 5.5.4.(e) kemi treguar se kur $(g,a,h) \in \overline{E(W)}$, kemi $a^2 = a$ ose $a = e_a$ pra $gah = ge_ah = gh$. Tani ndërtojmë pasqyrimin: $\phi : \overline{E(W)} \longrightarrow \overline{E}$ të tillë që $(g,a,h)\phi \longrightarrow gh$ Të provojmë se ϕ është izomorfizëm. Së pari, ϕ është syrjektiv. Vërtetë, nëse $x \in \overline{E}$, atëherë do të kemi: $x = xux = xuxux = xu{\cdot}uxu{\cdot}ux$ ku $uxu \in E^0$ dhe $(xu)\lambda_u = u(xu) = uxu$, $(uxu)\lambda_u = u(uxu) = uxu$. Këto barazime tregojnë se është i vërtetë relacioni $xu\ F_u\ uxu$ dhe nga 5.5.1.(2) do të rrjedhë $\mathcal{L} = F_u$ në $\overline{E}$. Njëlloj tregohet që $\mathcal{R} = {}_uF$ në $\overline{E}$. D.m.th. kemi:

$$xu \mathcal{L}\, uxu = e_{uxu} \quad \text{dhe} \quad ux \mathcal{R}\, uxu = f_{uxu}$$

Duke shfrytëzuar përsëri teoremën 5.5.4.(e) do të kemi $(xu, uxu, ux) \in \overline{E(W)}$, por meqë nga përcaktimi i ϕ kemi $(xu,uxu,ux)\phi = xu\ ux = xux = x$, rrjedh që ϕ është syrjektiv. Së dyti, le të jenë $(g,a,h),(\nu,b,w) \in \overline{E(W)}$ të tilla që $(g,a,h)\phi = (\nu,b,w)\phi$. Meqë $a^2 = a$ dhe $b^2 = b$ ne mund të kemi këtë konfiguracion për $\mathfrak{D}$ - klasat:

	a		h
	g		gh

	b		w
	ν		νw

sepse $g\mathcal{L}\, a \Rightarrow gh\mathcal{L}\, ah \Rightarrow gh\mathcal{L}\, h$ dhe $h\mathcal{R}\, a \Rightarrow gh\mathcal{R}\, ga \Rightarrow gh\mathcal{R}\, g$. Njëlloj do kemi $\nu w\mathcal{L}\, w$ dhe $\nu w\mathcal{R}\, \nu$. Por, meqë $(g,a,h)\phi = (\nu,b,w)\phi$ kemi $gh = \nu w$, kështu të dy $\mathfrak{D}$ - klasat e skematizuara më sipër përputhen, prandaj a dhe b i përkasin së njëjtës $\mathfrak{D}$ -klasë, (sepse $a,b \in E^0 = u\bar{E}u \subset \bar{E}$) Nga rrjedhimi 5.5.1., meqenëse në $\bar{E}$ kemi $\mathfrak{D} = \mathcal{F}$, shkruajmë:

$$a\, \mathfrak{D}\, b \Rightarrow a\, \mathcal{F}\, b \Rightarrow uau = ubu \Rightarrow a = b$$

Nga përputhja e $\mathfrak{D}$ -klasave të mësipërme del gjithashtu se elementet g dhe ν gjenden në $\mathcal{R}$-klasën që përcakton elementi $gh = \nu w$, d.m.th. kemi $g\mathcal{R}\nu$, dhe meqenëse $\mathcal{R} = {}_uF$ në $\bar{E}$ rrjedh se $g\ {}_uF\ \nu$ ose $g\rho_u = \nu\rho_u \Rightarrow gu = \nu u$. Prandaj kemi:

$$g = gug = gu \cdot ug = \nu u \cdot ua = \nu u \cdot ub = \nu u \cdot u\nu = \nu u\nu = \nu$$

dhe është e qartë se:

$$g\, \mathcal{L}\, a \Rightarrow gF_u a \Rightarrow ug = ua; \quad a\, \mathcal{L}\, b \Rightarrow aF_u b \Rightarrow ua = ub \quad \text{dhe} \quad b\, \mathcal{L}\, \nu \Rightarrow bF_u \nu \Rightarrow ub = u\nu$$

Pra $g = \nu$ dhe njëlloj edhe $h = w$. Kështu $(g,a,h) = (\nu,b,w)$. Pra është i vërtetë implikimi: $(g,a,h)\phi = (\nu,b,w)\phi \Rightarrow (g,a,h) = (\nu,b,w)$. Dmth pasqyrimi ϕ është edhe injektiv, pra bijektiv. Së fundi le të jenë $(g,a,h),(\nu,b,w) \in \overline{E(W)}$. Në $\overline{E(W)}$ kemi $a^2 = a$ dhe $b^2 = b$, prandaj:

$$\begin{aligned}
[(g,a,h)(\nu,b,w)]\phi &= (g(h\nu)\bar{\mu}_a, ah\nu b, (h\nu)\bar{\mu}_b \cdot w)\phi \\
&= g(h\nu)\bar{\mu}_a \cdot (h\nu)\bar{\mu}_b \cdot w = gah\nu a \cdot bh\nu bw = \\
&= g \cdot h\nu \cdot a \cdot b \cdot h\nu \cdot w = ga \cdot h\nu \cdot bw = \\
&= gh \cdot \nu w = (g,a,h)\phi \cdot (\nu,b,w)\phi
\end{aligned}$$

(sepse $g = ge_a = ga, w = f_b w = bw$ dhe $a,b,h\nu \in E^0$)

Pra ϕ është izomorfizëm dhe $\overline{E(W)} \cong \bar{E}$

Tani do të ndërtojmë një izomorfizëm të $(u,u,u)W(u,u,u) \longrightarrow S$. Për këtë le të hetojmë pak për trajtën e elementeve të $(u,u,u)W(u,u,u)$.
Le të jetë $(u,u,u)(g,a,h)(u,u,u) \in (u,u,u)W(u,u,u)$. Atëherë,

$$\begin{aligned}(u,u,u)(g,a,h)(u,u,u) &= (u,u,u)(g\cdot(hu)\bar{\mu}_{a^{-1}}, ahu, (hu)\bar{\mu}_u \cdot u) = \\ &= (u,u,u)(g\cdot f_a\mu_{a^{-1}}, af_a, f_a) = = (u,u,u)(ge_a, a, f_a) = \\ &= (u,u,u)(g,a,f_a) = (u\cdot(ug)\bar{\mu}_u, uga, (ug)\bar{\mu}_a \cdot f_a) = \\ &= (u\cdot e_a, e_a a, f_a \cdot f_a) = (e_a, a, f_a)\end{aligned}$$

Shqyrtojmë pasqyrimin $\theta : (u,u,u)W(u,u,u) \longrightarrow S$ ku

$$[(u,u,u)(g,a,h)(u,u,u)]\theta = (e_a, a, f_a)\theta = a$$

Meqë:

$$(e_a, a, f_a)\theta = (e_b, b, f_b)\theta \Rightarrow a = b \Rightarrow e_a = e_b,\ f_a = f_b \Rightarrow (e_a, a, f_a) = (e_b, b, f_b)$$

rrjedh se θ është injektiv. Por për çdo a nga S kemi $(e_a, a, f_a) \in (u,u,u)W(u,u,u)$ dhe $(e_a, a, f_a)\theta = a$ d.m.th. θ është edhe syrjektiv. Tani barazimet:

$$\begin{aligned}[(e_a, a, f_a)(e_b, b, f_b)]\theta &= [e_a\cdot(f_a e_b)\bar{\mu}_{a^{-1}}, af_a e_b b, (f_a e_b)\bar{\mu}_b f_b]\theta = [e_a(f_a e_b)\mu_{a^{-1}}, ab, (f_a e_b)\mu_b f_b]\theta = \\ &= (e_a e_{ab}, ab, f_{ab} f_b)\theta = (e_{ab}, ab, f_{ab})\theta = ab = (e_a, a, f_a)\theta\cdot(e_b, b, f_b)\theta\end{aligned}$$

tregojnë se θ është izomorfizëm. Për pasojë kemi: $(u,u,u)W(u,u,u) \cong S$. ■

6. KONKLUZIONE DHE PROJEKTE PËR TË ARDHMEN

Meqenëse klasa e gjysmëgrupeve abundantë është një zgjerim i klasës së gjysmëgrupeve të rregullt (e cila është një klasë mjaft e studiuar nga algjebristët), me studimin e tyre synohet që shumë veti të gjysmëgrupeve të rregullt të mund të implementohen në një klasë më të gjerë gjysmëgrupesh, siç është ajo e gjysmëgrupeve abundantë.

Studimi i gjysmëgrupeve abundantë ka nisur nga gjysma e dytë e viteve ’70 dhe artikujt mbi to janë relativisht të pakët. Kështu mendoj se në këtë punim doktorature kemi dhënë një kontribut modest në studimin e mëtejshëm të tyre. Dua të veçoj këtu teoremat që kam formuluar dhe vërtetuar në artikujt [29], [30] dhe të përfshira në këtë punim në kapitillin 4, kundrashembullin 2.2.1, shembullin 2.2.1 si dhe vërtetimet e bëra në kapitujt 4 dhe 5.

Në të ardhmen një rëndësi të veçantë do ti kushtoj studimit të gjysmëgrupeve abundantë nëpërmjet idealeve minimalë nga një lidhje që është vënë re midis prezencës së idempotentëve në idealet minimale dhe në $\mathcal{R}^*$ e $\mathcal{L}^*$ - klasat e këtij gjysmëgrupi.

Objekt i punës time në të ardhmen do të jetë gjithashtu edhe përpjekja për vërtetimin e ndonjë vetie të gjysmëgrupeve ortodoksë edhe në gjysmëgrupet kuazi-adekuatë, apo të vetive të gjysmëgrupeve inversivë në gjysmëgrupet adekuatë.

Një sfidë interesante do te jetë edhe dhënia përgjigje problemit: “Për ç’farë kushtesh plotësuese një gjysmëgrup adekuat i tipit A kthehet në një gjysmëgrup inversiv”, etj.

7. BIBLIOGRAFIA

[1] Clifford A. H. and Preston G. B.
"The Algebraic Theory of Semigroups", Vol.1, Math. Surveysof the American Math. Soc. 7,
Providence, R. I., 1961.

[2] J. M. Howie, *University of St. Andrews, scotland*
"An Introduction to Semigroup theory", Academic Press, London, New York, San Francisco, 1976.

[3] Miller, D. D. and Clifford, A. H,
"Regular $\mathfrak{D}$-classes insemigroups", *Trans. American Math. Soc.* 82 (1956), 270-280.

[4] Reilly, N. R. And Scheiblich, H. E.
"Congruences on regular semigrups", *Pacific J. Math.* 23 (1967), 349-360.

[5] Vagner, V. V.
"Generalised groups", *Doklad*y *Akad. Nauk SSSR* 84 (1952), 1119-1122 (Russian)

[6] Preston, G. B.
1954a "Invers Semigroups", *J. London Math. Soc.* 29 (1954), 396-403
1954b "Invers Semigroups with minimal right ideals", *J. London Math. Soc.* 29 (1954), 404-411.
1954c "Representations of inverse semigroups", *J. London Math. Soc.* 29 (1954), 411-419

[7] Green, J. A.
"On the structure of semigroups", *Ann. of Math*. 54 (1951), 163-172

[8] Andersen, O.
"Eine Bericht über die Struktur abstrakter Halbgruppen", Thesis (Staats-examensarbeit),
Hamburg, 1952.

[9] John Fountain
"Abundant semigroups" *Proc. London Math. Soc.* 3, 44 (1982), 103-129

[10] D. B. McAlister,
"One-to-one partial right translations of a right cancellative semigroup", *J. Algebra, 43* (1976), 231-251.

[11] F. Pastijn,
"A representation of a semigroup by a semigroup of matrices over a group with zero", *Semigroup Forum,* 10 (1975), 238-249.

[12] El-Qallali,
"On the construction of a class of abundant semigroups" Miramare – Trieste, September 1987

[13] A. El-Qallali, J. B. Fountain,
"Quasi-adequate semigroups", *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 91A, 91-99, *1981*

[14] J. B. Fountain,
"Adequate semigroups", *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* (1979), 22, 113-123

[15] Sabine Koppelberg,

"Minimal ideals and minimal idempotents", *Lecture notes at the department of Mathematics, Free University of Berlin*, 2010, Chapter 6, 37-42

[16] M. V. Lawson,
"Abundant rees matrix semigroups", *J. Austral. Math. Soc. (Series A)* 42 (1987), 132-142

[17] Xiaojiang Guo,
"F-abundant semigroups", *Glasgow Math*. J. 43 (2001) 153–163

[18] A. El-Qallali,
"Abundant semigroups with a Multiplicative Type A Transversal", *Semigroup Forum, Vol*
47 (1993), 327-340

[19] A. El-Qallali, J.B. Fountain,
Idempotent-connected abundant semigroups, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* (Sect. A) 91 (1981/82) 79-90

[20] D.B. McAlister and T.S. Blyth,
Split Orthodox Semigroups, Journal of Algebra, 51, 491-525 (1978)

[21] X. J. Kong,
Abundant semigroups with quasi-ideal adequate transversals, Adv. Math. (China) 37 (2008), no. 1, 31-40.

[22] Xiangjun Kong, Pei Wang,
Abundant semigroups with quasi-ideal S-adequate transversals, Commun. Korean Math. Soc. 26 (2011), No. 1, pp. 1-12

[23] Hui Chen,
Construction of a kind of abundant semigroups, Mathematical Communications 11(2006)

[24] A. H. Clifford, G. B. Preston,
The algebraic theory of semigroups, July 28, 1960, The tulane university of Louisiana

[25] Blyth , T. S and R. B. McFadden ,
On the construction of a class of regular semigroups, J. Algebra, 81 (1983), 1-22.

[26] Osman Hysa, Edmond Pisha,
Disa kontribute në fushën e gjysmëgrupeve abundantë, kuazi-adekuatë dhe adekuatë, Buletini 13 i FSHN, Tiranë 2012.

[27] Osman Hysa, Edmond Pisha,
Some classes of semigroups that have medial idempotent and some construction theorem, 1st International Conference in Computer Science and Mathematics 2011 (ICCSM2011) 3-5 Jan 2011, EPOKA University, Tirana, ALNABIA.

[28] A. El-Qallali, J. B. Fountain,
Quasi-adequate Semigroups, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 91A, 91-99, 1981

[29] Osman Hysa, Aurela Biçaku,
The homomorphisms in the adequate semigroups, 1st International Western Balkans Conference, IWBCMS – 2013, Elbasan, May 30 – June 1, 2013.

[30] Osman Hysa,
Homomorphisms in the adequate semigroups of the type A, ICRAE2013, Shkodër

2013
[31] Osman Hysa,
Ndërtimi i gjysmëgrupeve të rregullt që përmbajnë një idempotent medial ose një idempotent medial normal. Mikroteza për mbrojtjen e masterit, Tiranë 2009.
[32] Osman Hysa,
The Construction of Regular Semigroups With Medial Idempotent, International Journal of Basic & Applied Sciences IJBAS-IJENS Vol:12 No:06.
[33] Osman Hysa, Edmond Pisha,
Gjysmëgrupet e rregullta që përmbajnë një idempotent medial normal, Buletini i shkencave natyrore, Universiteti, "F,S.Noli", Korçë, Nr.22, 2011
[34] M. Loganathan,
Regular semigroups with a medial idempotent. S. Forum 36 (1987), 69-74.

Abstrakti

Gjysmëgrupet abundantë janë një përgjithsim i gjysmëgrupeve të rregullt. Në vitin 1951, J.A.Green, futi në gjysmëgrupe nocionin e relacioneve $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ dhe $\mathcal{J}$. Ata njihen si relacionet e Green-it dhe luajtën një rol të rëndësishëm në investigimin e mëtejshëm të gjysmëgrupeve të rregullt, ortodoksë dhe inversivë. Kështu Howie në monografinë e tij, "An Introduction to Semigroup theory", tregon se gjysmëgrupet e rregullta karakterizohen si gjysmëgrupe në të cilët çdo $\mathcal{L}$-klasë dhe çdo $\mathcal{R}$-klasë përmban të paktën një idempotent.
Në vitin 1975, F.Pastijn, futi në gjysmëgrupe kuptimin e relacioneve të përgjithsuara të Green-it dhe i shënoi ato me $\mathcal{R}^*$, $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{H}^*$, $\mathcal{D}^*$, $\mathcal{J}^*$. Prej këtu, u përkufizuan gjysmëgrupet abundantë si gjysmëgrupe në të cilët çdo $\mathcal{R}^*$-klasë dhe çdo $\mathcal{L}^*$-klasë përmban të paktën një idempotent. Më pas u përkufizuan edhe disa nënklasa të rëndësishme të tyre si ajo e gjysmëgrupeve kuazi-adekuatë, adekuatë, etj. Nga përkufizimi rrjedh se klasat e gjysmëgrupeve abundantë, kuazi-adekuatë dhe adekuatë janë respektivisht, zgjerim i klasave të gjysmëgrupeve të rregullt, ortodoksë dhe inversivë.
Në këtë punim ne kemi sjellë një kontribut të mëtejshëm në studimin e gjysmëgrupeve abundantë dhe të nënklasave të tyre, si dhe kemi formuluar dhe vërtetuar disa teorema konstruksioni për disa tipe të veçantë gjysmëgrupesh abundantë.

Fjalë kyçe: gjysmëgrup, abundant, quazi-adekuat, adekuat, normal medial idempotent, band.

Abstract

The abundant semigroups are a generalization of a regular semigroups. In 1951, J.A.Green, introduced in the semigroups the relations $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ dhe $\mathcal{J}$. They are known as Green 's relations and played an important role in the further investigation of the regular, orthodox and inversiv semigroups. Thus, Howie in his monograph, "An Introduction to semigroup theory", shows that the regular semigroups characterized as semigroups in the which, every $\mathcal{L}$-class and $\mathcal{R}$-class contains at least one idempotent .
In 1975, F.Pastijn, introduced in the semigroups the generalization relations of Green and marked them with $\mathcal{R}^*$, $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{H}^*$, $\mathcal{D}^*$, $\mathcal{J}^*$. From here, were defined the abundant semigroups as semigroups in the which every $\mathcal{R}^*$-class and $\mathcal{L}^*$-class contains at least one idempotent. After this were defined some important subclasses of them as quasi-adequate, adequate, etc. By the definition it follows that the class of abundant, quasi-adequate and adequate are respectively an extension of the regular, orthodox and inversiv classes.
In this paper we have broght in a contribution to the further study of the abundant semigroups and their subclasses. We have formulated and proved also, several construction theorems for some particular types of abundant semigroups.

Key words: semigroup, abundant, quasi-adequate, adequate, normal medial idempotent, band.