UNIVERSITETI I TIRANËS
FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS
DEPARTAMENTI I FIZIKËS

DISERTACION
PËR MBROJTJEN E GRADËS
"DOKTOR I SHKENCAVE"

PËRSHPEJTIMI I LLOGARITJEVE TË FERMIONEVE KIRALE ME ANË TË RRJETAVE TË SHUMËFISHTA NË QCD-NË RRJETORE

Kandidati:
MSc. DAFINA XHAKO

Udhëheqës shkencor:
Prof. Dr. ARTAN BORIÇI

Tiranë 2014

UNIVERSITETI I TIRANËS
FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS
DEPARTAMENTI I FIZIKËS

Disertacion i paraqitur nga:

Msc. Dafina Xhako

për marrjen e gradës shkencore

"DOKTOR"

Në fushën e Fizikës Llogaritëse me temë:

PËRSHPEJTIMI I LLOGARITJEVE TË FERMIONEVE KIRALE ME ANË TË RRJETAVE TË SHUMËFISHTA NË QCD-NË RRJETORE

Udhëheqës shkencor:

Prof.Dr. ARTAN BORIÇI

Mbrohet më datë _____para jurisë së përbërë nga:

1. _____Kryetar
2. _____ Anëtar (oponent)
3. _____Anëtar (oponent)
4. _____Anëtar
5. _____Anëtar

Përmbledhje

Kromodinamika Kuantike (QCD) është teori e bashkëveprimeve të forta, pjesë e modelit standart të grimcave elementare. Në energji të ulta studimi i saj realizohet vetëm me simulime numerike të teorisë të formuluar në rrjeta Euklidiane katërpërmasore. Një tipar i rëndësishëm në këto regjime është mbyllësia e kuarkeve që studiohet nga potenciali statik kuark-antikuark. Në simulimet rrjetore të QCD-së simetria kirale është thelbësore. Për të garantuar këtë simetri në rrjetë përdoren fermionet e mbulimit ose fermionet e mureve domenore. Meqë këto fermione kanë një kosto shumë të lartë llogaritëse, përshpejtimi i algoritmeve do të jepte një kontribut të madh në performancën e simulimeve. Në këtë punim propozohen algoritme të shpejtë invertimi të operatorit kiral të Dirakut që bazohen në idenë e rrjetave të shumëfishta përgjatë përmasës shtesë. Rezultati kryesor i këtij punimi është përshpejtimi në masën 2 deri 12 herë në krahësim me algoritmet që përdoren sot në QCD-në rrjetore. Performanca e tyre shkallëzohet me të anasjelltën e rrënjës katrore të masës së kuarkeve në krahësim me ligjin invers proporcional të algoritmeve standarte. FermiQCD shkallëzohet mirë në sistemet me shumë bërthama llogaritëse. QCDLAB është një paketë shumë e mirë për të testuar algoritmet e reja në dy përmasa hapësinore-kohore.

Fjalë kyçe: QCD-ja rrjetore, potenciali kuark-antikuark, fermione kirale, algoritme invertimi, FermiQCD, QCDLAB

Abstract

Quantum Chromodynamics (QCD) is the theory of strong interactions, part of the standard model of elementary particles. At low energy it is studied with numerical simulations of QCD formulated in four dimensional lattice with Euclidean geometry. An important property in these regime is the quark confinement that is derived from quark antiquark potential behaviour. However, the chiral symmetry is cruical for lattice QCD simulations. In order to guarantee this symmetry on the lattice one uses overlap and domain wall fermions. Since such formulations are very time consuming the acceleration of algorithms is paramount for the perfomance of lattice QCD simulations. We propose fast inverting algorithms for chiral fermions using the geometric multigrid idea along the extra dimension. The main result of this thesis is that the new algorithms are capable to accelerate the convergence 2 to 12 times faster than the state of the art algorithms. Our algorithms scale with the inverse square root of the quark mass, which should be compared to the inverse quark mass scaling of standard inversion algorithms. We found also that FermiQCD scales well with the number of cores and that QCDLAB is a good software to prototype lattice QCD algorithms

Key words: lattice QCD, quark-antiquark potential, chiral fermions, inverting algorithms, FermiQCD, QCDLAB

Përmbajtja

PARATHËNIE IV

HYRJE V

MODELI STANDART DHE KROMODINAMIKA KUANTIKE 1

1.1 Fermionet 2

1.2 Bozonet 3

1.3 Teoria e Bashkëveprimeve të Forta: Kromodinamika Kuantike (QCD) 4
1.3.1 Fushat lëndorë në QCD (Kuarket) 5
1.3.2 Mbyllësia e kuarkeve, modeli i kordës bozonike 6
1.3.3 Masa e kuarkeve 9
1.3.4 Ngarkesa e ngjyrës së kuarkeve 9
1.3.5 Fushat kalibruese në QCD (Gluonet) 9
1.3.6 Liria asimptotike. Konstantja rendëse e çiftimit e QCD 10

1.4 Simetritë e QCD-së dhe thyerja e tyre 13
1.4.1 Simetria Kirale 14
1.4.2 Thyerja spontane e simetrisë kirale 16
1.4.4 Thyerja eksplicite e simetrisë kirale 17

1.5 Kuantizimi i teorive kalibruese 19
1.5.1 Teoritë kalibruese Abeliane - Elektrodinamika kuantike (QED) 19
1.5.2 Teoritë kalibruese jo-Abeliane - Kromodinamika kuantike (QCD) 23
1.5.3 Formalizmi i integralit të udhëve. 26

KROMODINAMIKA KUANTIKE NË RRJETË 29

2.1 Qëllimi i llogaritjeve të QCD-së rrjetore 30

2.2 Formulimi rrjetor 31

2.3 Integrimi i Grasmann-it 38

2.4 Masa e integrimit të Haar-it 39

2.5 Rinormimi dhe limiti i vazhduar 39
2.5.1 Rinormimi i konstantes së çiftimit 39

2.6 Fermione kirale në rrjetë 42

2.6.1 Fermionet e mbulimit ... 44
2.6.2 Fermionet e mureve domenore ... 45
2.6.3 Fermionet e shkurtuara te mbulimit ... 49

SIMULIME NUMERIKE TË QCD-SË RRJETORE ... 55

3.1 Simulime në teorinë e pastër kalibruese SU(3) ... 55

3.2 Gjenerimi i konfiguracioneve ... 57

3.3 Laqet e Wilson-it ... 58
3.3.1 Pllaka (“Plaquette”) ... 58
3.3.2 Laku drejtkëndor ... 58
3.3.3 Laku vëllimor ... 59

3.4 Potenciali statik kuark-antikuark ... 60

3.5 Tensioni i kordës dhe distanca rrjetore. Përcaktimi i shkallës ... 63

3.6 Gabimet e diskretizimit rrjetor dhe kostoja llogaritëse ... 65

3.7 Llogaritjet në paralel me FermiQCD ... 66

3.8 Rezultate ... 68
3.8.1 Teste të performancës së FermiQCD ... 68
3.8.2 Llogaritja e potencialit prej laqeve planare të Wilsoni-it në rrjetë ... 73
3.8.3 Llogaritja e potencialit efektiv prej laqeve planare të Wilsoni-it në rrjetë ... 76
3.8.4 Llogaritja e potencialit efektiv prej laqeve vëllimore të Wilsoni-it në rrjetë ... 82

3.9 Përfundime ... 87

ALGORITME INVERTIMI ... 88

4.1 Llogaritja e përhapësit të kuarkeve, një problem invertimi ... 89

4.2 Metoda standarte të nënhapësirave të Krylov-it ... 91
4.2.1 Algoritmi i Arnold-it ... 92
4.2.2 Algoritmi i Lanczos-it ... 93

4.3 Algoritme invertimi optimale të operatorit kiral (GMRES, CGNE, SHUMR) ... 94

4.4 Algoritmi i Multirrjetave ... 99

4.4 Zhvillimi i algoritmit me dy rrjeta për invertimin e operatorit të mbulimit në SU(3) ... 101

4.5 Rezultate ... 102

4.6 Përfundime **107**

PËRSHPEJTIMI I LLOGARITJEVE TË FERMIONEVE KIRALE NË QCDLAB **108**

5.1 Hyrje në QCDLAB 1.0 ..... **108**

5.2 Simulime numerike në QCDLAB 1.0 ..... **109**
5.2.1 Gjenerimi i pllakës ("Plaquette") 109
5.2.2 Gjenerimi i konfiguracioneve 110
5.2.3 Llogaritja e operatorit të Wilson-Dirakut 111
5.2.4 Studimi i ngarkesës topologjike të fushave kalibruese 115
5.2.5 Llogaritja e operatorit kiral të mbulimit në trajtën e operatorit të shkurtuar të mbulimit 119

5.3 Implementimi i multirrjetave në QCDLAB me GMRESR i parakushtëzuar **120**

5.4 Rezultate **123**
5.4.1 Historia e konvergjencës së algoritmit GMRESR i parakushtëzuar 123
5.4.2 Studimi i përshkallëzimit të algoritmit GMRESR i parakushtëzuar me masën e kuarkut 133

5.5 Përfundime **138**

KONKLUZIONE **139**

BIBLIOGRAFI **141**

BOTIME, KONFERENCA DHE TRAJNIME **148**

FALENDERIME **151**

SHTOJCAT **152**

SHTOJCA A Kodet e llogaritjes të potencialit kuark-antikuark **152**

SHTOJCA B Metoda Jacknife për llogaritjen e gabimeve **162**

SHTOJCA C Kodet e algoritmit me dy rrjeta **162**

SHTOJCA D Kodet e QCDLAB **163**

Parathënie

*Disertacioni në fushën e Fizikës Llogaritëse, me temë "**Përshpejtimi i llogaritjeve të fermioneve kirale me anë të rrjetave të shumëfishta në QCD-në rrjetore**" është rezultat i një pune rreth pesë vjeçare që autorja ka kryer në studimin me metoda numerike të teorisë që përshkruan grimcat elementare dhe bashkëveprimet ndërmjet tyre, e njohur si Kromodinamika Kuantike (Quantum Chromodynamics - QCD).*

Pikënisja për realizimin e kësaj doktorature ka qënë prof. Artan Boriçi i cili ka një eksperiencë të gjatë kërkimore dhe i vetmi në këtë fushë studimi në Shqipëri.

Me qëllim finalizmin me sukses të këtij punimi ka qënë i domosdoshëm zhvillimi i njohurive teorike të thelluara në këtë fushë si dhe aplikimi i teknikave të avancuara llogaritëse.

Lidhur me studimet teorike të thelluara e rëndësishme ka qënë ndjekja e shkollave në fizikën teorike të grimcave elementare, konkretisht e një shkolle dy javore ndërkombëtare në fushën e QCD-së rrjetore në laboratorin e fizikës teorike Bogoliubov (BLTP - Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics) në Rusi si dhe trajnime të tjera në fushën e energjive të larta.

Sa i përket aspektit llogaritës janë realizuar disa trajnime në njohjen dhe zhvillimin e teknikave llogaritëse të avancuara në fushën e QCD-së rrjetore. Vlen të përmenden: trajnimi i programimit në paralel nga Instituti i Qipros CaSToRC (The Computation-based Science and Technology Research Center) dhe trajnimi i HPC (High Performance Computing) organizuar nga HP-SEE (High-Performance Computing Infrastructure for South East Europe's Research Communities), në Greqi të cilët dhanë bazat mbi metodat, mjetet e programimit në paralel dhe analizës së performancës dhe optimizimin të kodeve llogaritës. E rëndësishme ka qënë dhe ndjekja e shkollës ndërkombëtare mbi analizën e të dhënave me metoda Monte Carlo në QCD-në rrjetore në Regensburg, Gjermani.

Gjithashtu janë realizuar një sërë trajnimesh dhe seminaresh të vlefshme si dhe janë shfrytëzuar burimet llogaritëse të tufave të kompjuterave për superllogaritje në Bullgari, në kuadër të pjesëmarrjes me një projekt fitues nga fusha e fizikës llogaritëse në projektin e madh të HP-SEE.

HYRJE

Fizika e grimcave elementare ka hyrë në një fazë të re me fillimin e eksperimenteve me energji 3.5 TeV që po zhvillohen në përshpejtuesin e grimcave Large Hadron Collider në CERN të Gjenevës. Modeli Standart, teoria që përshkruan grimcat elementare dhe bashkëveprimet ndërmjet tyre me anë të fushave të kuantizuara, përmban dy sektorë: sektorin e bashkëveprimeve të forta, përgjegjëse për stabilitetin e bërthamave, si dhe sektorin e bashkeveprimeve elektrodobëta, përgjegjëse për zbërthimet bërthamore dhe dukuritë elektromagnetike.

Sa i takon sektorit të bashkëveprimeve të elektrodobëta, thyerja e simetrisë së Bashkëveprimeve Elektrodobëta bën që modeli standart të mbetet i paplotë pa u zbuluar origjina e thyerjes. Hipoteza kryesore, që mbetet të verifikohet ose të hidhet poshtë në eksperimetet e LHC, është thyerja spontane e simetrisë së një fushe skalare që bashkëvepron me të gjitha fushat e tjera, thyerje kjo që manifestohet fizikisht në ekzistencën e një grimce bozonike me masë disa qindra MeV, të quajtur bozoni Higgs.

Ndërkohë bashkëveprimet e forta të bërthamave dhe energjitë e lidhjes së tyre mund të studiohen vetëm me anë të simulimit numerik të teorise përkatëse, Kromodinamikës Kuantike (QCD) të formuluar në rrjeta Euklidiane katërpërmasore.

Një prej vështirësive parimore të kësaj teorie është pamundësia e paraqitjes së *simetrisë kirale* në rrjeta të tilla hapsinore-kohore. Studimet kanë treguar se paraqitja e kësaj simetrie themelore në rrjetë ka një kosto shumë të lartë llogaritëse.

Në të dyja rastet e mësipërme, bashkëveprimet e forta dhe ato elektrodobëta, simetria kirale ka një vend qendror dhe mund të studiohet vetem me anë të mjeteve numerike. Kosto e lartë llogaritëse e fermioneve kirale rrjetore mbetet një pengesë e madhe për të zhvilluar programin shkencor të kërkimit në fushën e grimcave elementare. Vetëm dy grupe me një fuqi të lartë llogaritëse të instaluar prej disa petaflop janë angazhuar në llogaritje të tilla. Zhvillimi dhe përmirësimi i algoritmeve do të jepte një kontribut të madh në performancën e pergjithshme të simulimeve. Zgjidhësit e Kromodinamikës Kuantike rrjetore duhet të optimizohen pasi matricat dalëse të tyre janë tepër të mëdha për qëllime praktike.

Ky disertacion ka për qëllim të përshpejtojë llogaritjet e përhapësit të fermioneve kirale duke përdorur idetë e rrjetave të shumëfishta. Algoritmet e rrjetave të shumëfishta janë të njohura prej kohësh si një mjet për të përftuar shpejt zgjidhjen e sistemeve lineare (Press *et al.*, 2007). Por vetëm së fundi ka qenë e mundur të zbatohen në rastin e fushave kalibruese (Lüscher, 2007). Duke u nisur prej suksesit të kësaj metode për fermionet katër përmasore me simetri kirale të thyer, disertacioni synon të shtrijë këtë metodë në rastin e fermioneve kirale.

Në kapitullin e parë bëhet një hyrje në Modelin Standart të grimcave elementare si dhe trajtohen elementët dhe veçoritë bazë të teorisë së bashkëveprimeve të forta, kromodinamikës kuantike. Trajtohen simetritë e Langrazhian-it duke kaluar nga rasti i elektrodinamikës kuantike (Quantum Electrodynamics – QED) tek kromodinamika kuantike (Quantum Chromodynamics - QCD). Më pas shihet kuantizimi i një teorie kalibruese dhe llogaritja e madhësive fizike prej pritjes matematike të një operatori O. Gjithashtu studjohet simetria kirale si një tipar i rëndësishëm i QCD-së.

Në kapitullin e dytë trajtohet formulimi rrjetor i kromodinamikës kuantike (QCD-ja rrjetore), në mënyrë që të ruajë ato veçori të hapësirës së vazhduar si dhe qëllimi i llogaritjeve në QCD-në rrjetore. Një tjetër pikë e rëndësishme që trajtohet në këtë kapitull është formulimi i fermioneve në rrjetë, si shfaqet dhe si trajtohet problemi i dublimit të fermioneve në rrjetë

Kapitulli i tretë zhvillon simulimet numerike të teorisë së pastër kalibruese në rrjetë. Ai jep konceptin dhe ndërtimin e objekteve invariante kalibruese në rrjetë, siç janë laqet e Wilson-it, të cilat shërbejnë për llogaritjen e potencialit statik kuark-antikuark. Gjithashtu, trajtohen llojet e gabimeve që ndeshen gjatë këtyre llogaritjeve dhe origjinën e tyre. Ky kapitull zhvillon teknikat e llogaritjes në paralel të QCD-së rrjetore me anë të FermiQCD. FermiQCD është një koleksion klasash, funksionesh dhe algoritmesh në paralel për QCD-në rrjetore të shkruara në C++. Jepet ndërtimi, funksionimi dhe avantazhet e FermiQCD-së në trajtë shembujsh konkretë dhe puna e bërë për testimin dhe njohjen e tij. Po në këtë kapitull jepen rezultatet numerike me kodet e reja të zhvilluara në FermiQCD për llogaritjen e disa madhësive fizike si potenciali kuark-antikuark, apo dhe tensioni i kordës bozonike. Së fundi jepen rezultatet grafike të llogaritjeve dhe përfundimet.

Në kapitullin e katërt trajtohen algoritmet e invertimit ose zgjidhësit e QCD-së rrjetore që ndihmojnë në llogaritjen e përhapësit të kuarkeve në rrjetë. Fokusi i këtij disertacioni është të zhvillojë algoritme të shpejtë për simulimin e fermioneve kirale pasi kiraliteti është veti bazë e QCD-së. Një drejtim i rëndësishëm në zhvillimin e ideve të reja për të fituar në kosto llogaritëse është edhe ai algoritmik përveç atij të përdorimit të teknikave të avancuara në paralel. Kështu, fillimisht kapitulli na njeh me disa prej algoritmeve që vijnë prej nënhapësirave të Krylov-it dhe kostot e tyre llogaritëse. Jepet një hyrje në algoritmin e rrjetave të shumëfishta dhe bazuar mbi këtë ide zhvillohet algoritmi me dy rrjeta për invertimin e operatorit kiral të mbulimit në teorinë SU(3). Së fundi, paraqiten rezultatet numerike të tabeluara dhe ato grafike të testimit të këtij algoritmi si dhe përfundimet.

Kapitulli i pestë i dedikohet zhvillimit të algoritmeve të reja në QCDLAB 1.0, një paketë funksionesh në Matlab/Octave e llogaritjeve numerike të QCD-së rrjetore. Kjo paketë është e përshtatur për teorinë kalibruese U(1) ose rasti i Elektrodinamikës Kuantike në rrjetë (Quantum Electrodynamics - QED) me dy dimensione. Në këtë kapitull jepen fillimisht llogaritjet tona me QCDLAB 1.0 të disa madhësive si pllaka për disa konstante çiftimi, llogaritja e operatorit të Wilson-Dirakut dhe spektri i tij, llogaritja e ngarkesës topologjike të fushave kalibruese. Më tej, bazuar në idenë e algoritmit me dy rrjeta të zhvilluar në kapitullin e katërt, zhvillojmë një algoritëm më të shpejtë në QCDLAB 1.0, GMRESR i parakushtëzuar, për përshpejtimin e llogaritjeve të fermioneve kirale në rrjetë por në teorinë kalibruese U(1).

Së fundi jepen rezultatet e invertimit të operatorit kiral të mbulimit me anë të algoritmit të ri të zhvilluar dhe studimi i përshkallëzimit të tij me masën e kuarkut.

Ndërsa në shtojcat në fund të materialit, paraqiten disa prej kodeve të përshtatura dhe zhvilluara.

KAPITULLI 1

MODELI STANDART DHE KROMODINAMIKA KUANTIKE

Natyrshëm shtrohet pyetja cilat janë grimcat themelore që përbëjnë lëndën? Si kategorizohen ato? Si bashkëveprojnë ato me njëra-tjetrën? A ka një model matematik që mbështet teorinë e grimcave elementare? Që nga koha e zbulimit të elektronit, dhe veçanërisht 60 vitet e fundit, është bërë një përpjekje e jashtëzakonshme eksperimentale dhe teorike për të gjetur përgjigjet e pyetjeve të mësipërme. Modeli Standart aktual i grimcave elementare rrjedh pikërisht nga këto përpjekje (Cheng & Clarendon, 1984), (Griffths, 1987), (Cottingham & Greenwood, 2001), (Boriçi & Rexhepi, 2010). Kështu pikëpamjet më moderne mbi bashkëveprimet themelore dhe ndërtimin e lëndës janë përmbledhur në të ashtuquajturin Modeli Standart (i formuluar në 1970) i pjesëzave elementare. Fjala pjesëz vjen nga latinishtja ”particula” si një sasi relativisht e vogël ose pjesë e vogël diskrete, në veçanti, çdo njësi bazë e materies dhe energjisë (si molekula, atomi, protoni, elektroni, ose fotoni). Fizika e pjesëzave ka të ndërthurura tri aspekte të saj të lidhura ngushtë me njëra-tjetrën:

- ndërtimin e lëndës në kuptimin e pjesëzave në themelin e vet;
- forcat me të cilat bashkëveprojnë këto pjesëza;
- karakterizimin e lëndës dhe forcave ashtu siç, shfaqen ato në energjitë e larta.

Në Modelin Standart lënda dhe forcat përshkruhen me anë të fushave dhe ligjet e lëvizjes së tyre janë kuantike dhe relativiste. Modeli Standart i grimcave bashkëvepruese është një sintezë e tre prej katër forcave themelore në natyrë. Këto forca përshkruhen prej teorive kalibruese, secila prej të cilave karakterizohet nga një konstante çiftimi si më poshtë:

- Bashkëveprimi i fortë $(\alpha_s \sim 1)$
- Bashkëveprimi elektromagnetik $(\alpha_{em} \approx 1/137)$
- Bashkëveprimi i dobët $(G_F \approx 10^{-5} GeV^{-2})$

Dallimi thelbësor i lëndës nga forcat materializohet në llojet e ndryshme të fushave që përshkruajnë lëndën dhe forcat. Kështu, fushat që përshkruajnë lëndën janë fusha fermionike, ose fusha me spin 1/2, ndërsa fushat që përshkruajnë forcat janë fushat bozonike kalibruese me spin 1, pra lënda dhe forcat në Modelin Standart përshkruhen prej fushave thelbësisht të ndryshme. Çdo teori e grimcave elementare duhet të jetë konsistente me relativitetin special. Kombinimi i mekanikës kuantike, elektromagnetizmit dhe relativitetit special çuan Dirakun në ekuacionin tashmë të njohur universialisht si *ekuacioni i Dirakut* dhe në kuantizimin e fushave, në të ashtuquajturën *teori kuantike e fushës*. Teoria kuantike e fushës ka patur si triumfin e saj të parë elektrodinamikën

kuantike, QED, e cila përshkruan bashkëveprimin e elektronit me fushën elektromagnetike. Suksesi i një brezi Fizikantësh pas 1945-ës si Feynman, Schwinger, Tomonaga, Dyson dhe të tjerë, në trajtimin e infiniteteve që vinin prej teorisë çoi në një përputhje spektakolare midis QED dhe eksperimentit, siç përshkruhet në (Cottingham & Greenwood, 2001).

Modeli Standart, siç e përshkruan edhe QED, është një teori e *bashkëveprimit të fushave*. Ndërtimi i Modelit Standart është drejtuar nga principet e simetrisë. Kjo simetri matematikisht jepet nga teoria e grupeve; grupe me rëndësi të veçantë në formulimin e Modelit Standart jepen në (Cottingham & Greenwood, 2001).

Lidhja midis simetrive dhe fizikës gjendet nga teorema Noether (e formuluar në 1918) (Boriçi & Rexhepi, 2010) e cila në thelb pohon se *çdo simetrie të vazhduar të natyrës i korrespondon një ligj ruajtjeje*. Për shembull, rezulton se nga homogjeniteti i hapësirë-kohës, Langrazhiani i një sistemi të mbyllur është invariant ndaj transformimeve uniforme të sistemit në hapësirë dhe në kohë. Transformime të tilla janë si rrjedhim operacione simetrike mbi sistemin. Tregohet se ato çojnë, respektivisht, në ligjet e ruajtjes së momentit kinetik dhe të energjisë. Në seksionin (1.4) përshkruhen në mënyrë më të detajuar simetritë dhe thyerja e tyre.

1.1 Fermionet

Në modelin standart grimcat elementare me spin ½ me çiftësi të përcaktuar +1 ose -1 njihen me emrin *fermione*. Fermionet janë grimcat që përbëjnë lëndën. Sipas teoremës të statistikës spinore, fermionet i binden rregullit përjashtues të Paul-it. Çdo fermion ka antigrimcën e vet korresponduese. Konkretisht, përbërsit bazë të lëndës janë gjashtë kuarke: *u (up), d (down), s (strange), c (charm), b (bottom), t (top)* secila prej të cilave vjen në tre ngjyra dhe gjashtë leptone: e^- *(elektroni),* ν_e *(neutrino elektronike),* μ^- *(muoni),* ν_μ *(neutrino muonike),* τ *(tau),* ν_μ *(neutrino tau).* Dallimi kryesor ndërmjet tyre është tipi i bashkëveprimit në të cilin ata marrin pjesë. Kuarket marrin pjesë në të tri bashkëveprimet themelore të Modelit Standart ndërsa leptonet nuk marrin pjesë në bashkëveprimet e forta. Në grupin e fermioneve futen gjithashtu të gjitha grimcat e përbëra prej një grupimi kuarkesh dhe leptonesh. Kështu grupimet e 3-kuarkeve quhen *barione* (si protoni, neutroni) ndërsa grupimet me 2–kuarke quhen *mezone*. Grimcat që bashkëveprojnë me anë të bashkëveprimit të fortë, përfshirë barionet dhe mezonet por përjashtuar leptonet (që nuk bashkëveprojnë me anë të bashkëveprimit të fortë) quhen *hadrone.* Kuarket dhe leptonet klasifikohen në tre gjenerata në varësi të masës së tyre. Në Tabelën 1.1 jepet ky klasifikim.

Tabelë 1.1 Klasifikimi i kuarkeve dhe leptoneve në tre gjenerata sipas masës së tyre

Gjenerata e parë	Gjenerata e dytë	Gjenerata e tretë
e^- *(elektroni)*	μ^- *(muoni)*	τ *(tau)*
ν_e *(neutrino elektronike)*	ν_μ *(neutrino muonike)*	ν_μ *(neutrino tau)*
u (kuarku up)	*s (kuarku strange)*	*b (kuarku bottom)*

d (kuarku down)	*c (kuarku charm)*	*t (kuarku top)*

Një tipar dallues midis këtyre grimcave është e ashtuquajtura *aroma* ose *shija* (nga anglishtja "flavour"). Aroma të ndryshme grimcash dallohen prej ngarkesës elektrike dhe prej masës. Në Tabelën 1.2 paraqiten aromat e ndryshme te grimcave në varësi të ngarkesës elektrike dhe masës që kanë.

Tabelë 1.2 Klasifikimi i kuarkeve dhe leptoneve sipas aromave

Fermionet					
Leptonet (spin 1/2)			Kuarket (spin 1/2)		
Aroma	Masa (GeV/c^2)	Ngarkesa elektrike	Aroma	Masa (GeV/c^2)	Ngarkesa elektrike
e^- *(elektroni)*	0.000511	-1	*u (kuarku up)*	0.003	2/3
ν_e *(neutrino elektronike)*	< 1x10^{-8}	0	*d (kuarku down)*	0.006	-1/3
μ^- *(muoni)*	0.106	-1	*s (kuarku strange)*	1.3	2/3
ν_μ *(neutrino muonike)*	< 0.0002	0	*c (kuarku charm)*	0.1	-1/3
τ *(tau)*	1.7771	-1	*b (kuarku bottom)*	175	2/3
ν_μ *(neutrino tau)*	<0.02	0	*t (kuarku top)*	4.3	-1/3

1.2 Bozonet

Bashkëveprimi midis grimcave ose fushave lëndore realizohet nëpërmjet grimcave ose fushave kalibruese të quajtura *bozone*. Bozonet janë grimcat elementare me spin të plotë dhe i binden statistikës Bose-Einstein. Fermionet lidhen me lëndën ndërsa bozonet janë grimca që lidhen me bashkëveprimin. Bozonet elementare janë 12 nga të cilët: 8 gluone të bashkëveprimeve të forta, $W^{\pm}$ dhe Z të bashkëveprimit të dobët dhe fotoni γ për bashkëveprimet elektromagentike. Modeli Standart nuk përfshin forcën gravitacionale, nuk ka ende një teori kuantike të gravitetit. Bozonet mund të gjenden jo vetëm si grimca elementare por edhe të përbëra prej një grupi grimcash të tjera elementare me kushtin që së bashku këto grimca të ruajnë tiparet e një bozoni. Për shembull mezonet janë bozone të përbëra nga një kuark dhe një antikuark. Struktura matematikore që përshkruan bashkëveprimin e bozoneve kalibruese është një teori kalibruese lokale (Weyl, 1929) me grup kalibrimi $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$. Në Tabelën 1.3 jepen bozonet elementare, masa dhe ngarkesa e tyre elektrike.

Tabelë 1.3 Klasifikimi i bozoneve elementare sipas masës dhe ngarkesës elektrike

Bozonet (spin 1)

Bashkëveprimi elektrodobët			Bashkëveprimi i fortë (ngjyra)		
Emri	Masa (GeV/c^2)	Ngarkesa elektrike	Emri	Masa (GeV/c^2)	Ngarkesa elektrike
γ *(foton)*	0	0	g *(gluon)*	0	0
W^-	80.4	-1			
W^+	80.4	+1			
Z^0	91.187	0			

Një tipar dallues i gluoneve është ngarkesa e ngjyrës. Gluonet janë grimca elementare që veprojnë si grimca ndërmjetëse ose kalibruese për bashkëveprimet e forta midis kuarkeve, analoge me krijimin e fotonit në bashkëveprimin elektromagnetik midis dy ngarkesave elektrike. Në terma teknikë, gluonet janë bozone kalibruese vektorialë që ndërmjetësojnë bashkëveprimin e fortë të kuarkeve në kromodinamikën kuantike (QCD). Ndryshe nga fotonet të cilat ndërmjetësojnë bashkëveprimin elektromagnetik por u mungon ngarkesa elektrike, gluonet në vetvete mbajnë ngarkesën e ngjyrës të bashkëveprimeve të forta. Në këtë mënyrë gluonet marrin pjesë në bashkëveprimin e fortë duke mos qënë vetëm ndërmjetës të tij, duke e bërë QCD më komplekse për tu studiuar se elektrodinamika kuantike (QED). Ekzistojnë 8 tipe gluonesh të pavarura që dallohen nga ngarkesa e ngjyrës. Vetë kuarket karakterizohen nga tre ngjyra: e kuqe *r* (red), blu *b* (blue) dhe jeshile *g* (green) dhe antikuarket karakterizohen nga tre antingjyrat: $\bar{r}$, $\bar{b}$, $\bar{g}$. Gluonet karakterizohen nga kombinimi i ngjyrave dhe antingjyrave. Kështu ekzistojnë 8 gjëndje të pavarura ngjyrash të normuara të cilat japin tetë tipet e gluoneve të paraqitura në Tabelën 1.4.

Tabelë 1.4 Kalsifikimi i 8-të gluoneve sipas kombinimit të ngjyrave r (e kuqe), b (blu) dhe g (jeshile)

Gluonet	$\left(r\bar{b}+b\bar{r}\right)/\sqrt{2}$	$\left(r\bar{g}+g\bar{r}\right)/\sqrt{2}$	$\left(b\bar{g}+g\bar{b}\right)/\sqrt{2}$	$\left(r\bar{r}+b\bar{b}\right)/\sqrt{2}$
	$-i\left(r\bar{b}-b\bar{r}\right)/\sqrt{2}$	$-i\left(r\bar{g}-g\bar{r}\right)/\sqrt{2}$	$-i\left(b\bar{g}-g\bar{b}\right)/\sqrt{2}$	$\left(r\bar{r}-b\bar{b}-2g\bar{g}\right)/\sqrt{6}$

1.3 Teoria e Bashkëveprimeve të Forta: Kromodinamika Kuantike (QCD)

Formulimi i një teorie që përshkruan sjelljen e bashkëveprimeve të forta, siç është Kromodinamika Kuantike (QCD - Quantum Chromodynamics) ka qënë rezultat i një pune shumë vjeçare kërkimesh. QCD, si një teori kuantike e fushës dhe pjesë e modelit standart të grimcave elementare, përshkruan bashkëveprimin midis kuarkeve dhe gluoneve. Ndër vetitë tipike të kuarkeve është fakti se ato karakterizohen nga një

ngarkesë ”*ngjyre*”[1] dhe bashkëveprojnë me anë të bashkëveprimit të fortë (forcë e ngjyrës). Për distanca të vogla (energji të larta), QCD shfaq tiparet e lirisë asimptotike, ndërkohë që për distanca të mëdha (energji të ulta), kuarket dhe gluonet janë të mbyllur në grupe me ngjyrë neutrale të quajtura hadrone. U formulua hipoteza se hadronet përbëhen prej grimcave të tjera që përbëjnë modelin e kuarkeve (Gell-Mann, 1964).

Modeli statik i kuarkeve plotësohet duke futur konceptin e ngjyrës si shkallë lirie kalibruese SU(3) të fushës së kuarkeve. Mosvrojtueshmëria e ngjyrës në natyrë tregon edhe mbyllësinë dhe mosvrojtueshmërinë e kuarkeve të lira. Liria asimptotike u vëzhgua në eksperimentet në SLAC (Standford Linear Acelerator) gjatë shpërhapjeve thellësisht inelastike ndërmjet leptoneve dhe protoneve. Në këto shpërhapje kuarket sillen sikur të ishin të lira, ndonëse nuk mund të prodhohen si pjesëza të lira. Më 1973 Fritzsch, Gell-Mann dhe Leutëyler (Fritzsch *et al.*, 1973) propozuan QCD si teori kalibruese jo-Abeliane e ndërtuar prej grupit kalibrues SU(3). Në të njëjtin vit, u tregua nga Gross & Wilczek (1973) dhe Politzer (1973) se teoria kalibruese jo-Abeliane shfaq lirinë asimptotike. Struktura e duhur për ta diskutuar këtë veçori është ekuacioni i grupit të rinormimit (Renormalization Group - RG)[2]. Pasoja e rinormimit të një teorie të fushës kuantike është fakti se konstantja e çiftimit që figuron në Langrazhian është konstante “rendëse” (*running coupling*). I ashtuquajturi β- funksioni, kuantifikon varësinë e çiftimit sipas shkallës energjitike sipas relacionit $\beta(g) = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = \frac{\partial g}{\partial \ln \mu}$, ku μ është shkalla energjitike e një procesi fizik të dhënë. Për energji të larta (në distanca të vogla), çiftimi bëhet i vogël, i tillë që kuarket sillen si grimca të lira. Në këtë regjim, metoda perturbative jep parashikime shumë të mira për madhësi fizike që lidhen me energjitë e larta.

1.3.1 Fushat lëndorë në QCD (Kuarket)

Kuarket janë grimcat që marrin pjesë në bashkëveprimin e fortë dhe si rrjedhim janë bazë e teorisë kromodinamike kuantike. Simbolikisht shpesh shënohen me q. Nga pikpamja relativiste, ato përshkruhen nga spinorët e Dirakut $\psi_\alpha \;\; x$ me katër komponente $\alpha = 1,...,4$ të cilat janë funksione të koordinatave hapësirë – kohë $x^\mu = (t, x, y, z)$. Në rastin kur kuarket nuk bashkëveprojnë me grimca ose fusha të tjera, ato do ti binden ekuacionit të lirë të Dirakut,

$$i\partial\!\!\!/ - m \;\; \psi \;\; x \;\; = 0 \qquad \text{(I.3.1)}$$

[1] Në fizikën e grimcave ngarkesa e ngjyrës është një veti tipike e kuarkeve dhe gluoneve e cila lidhet me bashkëveprimin e fortë midis tyre në teorinë e kromodinamikës kuantike (QCD). Ngarkesa e ngjyrës ka analoge të saj ngarkesën elektrike tek teoria e elektrodinamikës kuantike (QED).

[2] RG- është një strukturë matematikore që lejon studimin sistematik të një sistemi fizik në shkallë distancash (energjish) të ndryshme. Ai lidhet ngushtë me invariancën ndaj shkallëzimit, simetri në të cilën një sistem fizik mbetet i njëjtë në të gjitha shkallët.

ku m nënkuptohet të jetë masa e "lirë" dhe $\not{\partial}$ operatori i Dirakut. Gjëndjet e thjeshta të këtyre kuarkeve janë valë plane standarte

$$\psi_{k,\lambda}\ x\ = u\ k,\lambda\ e^{-i\ Et-\vec{x}\vec{k}}\ , \qquad \text{(I.3.2)}$$

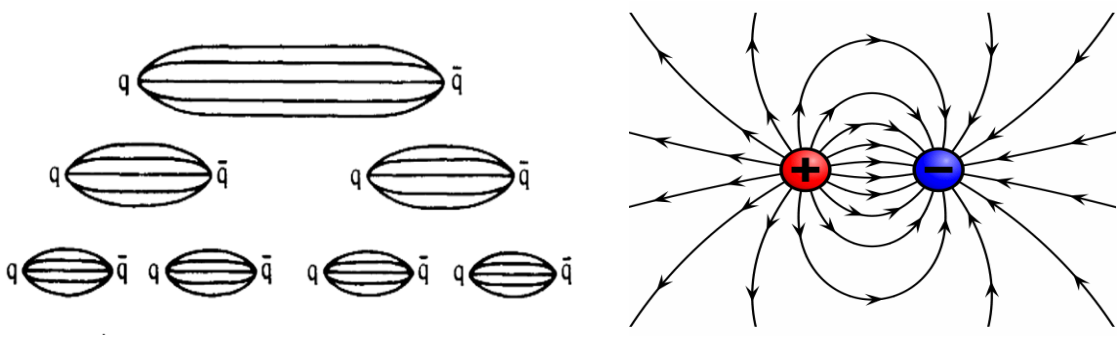
ku $k^{\mu}=\left(E,\vec{k}\right)$ dhe λ tregojnë katër-momentin dhe polarizimin, dhe $u\left(k,\lambda\right)$ është funksioni valor spinor. Siç dihet ekuacioni i Dirakut mund të nxirret gjithashtu edhe prej densitetit langrazhian,

$$\mathcal{L}\ x\ = \bar{\psi}\ x\ \ i\not{\partial} - m\ \psi\ x\ . \qquad \text{(I.3.3)}$$

Megjithatë, në të vërtetë, kuarke të lira nuk janë vëzhguar kurrë; ky fenomen njihet si *mbyllësia e kuarkeve* dhe është pasojë e rëndëishme e dinamikës së bashkëveprimeve të forta në energji të ulta.

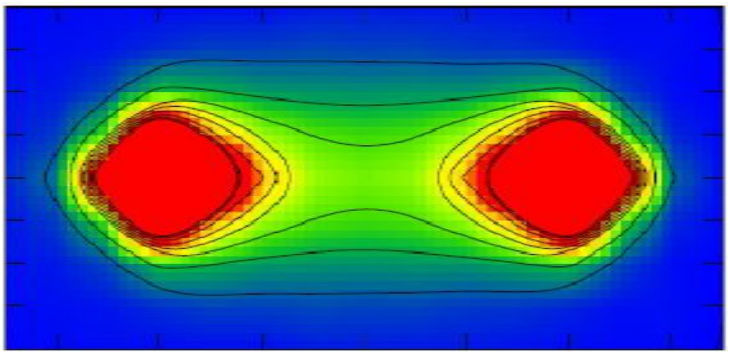
1.3.2 Mbyllësia e kuarkeve, modeli i kordës bozonike

Në 1970-ën, eksperimentet e përshpejtuesve të grimcave, konfirmuan ekzistencën e kuarkeve, megjithëse kuarke të veçuara nuk u vëzhguan asnjëherë në natyrë. Kuarket gjenden të mbyllura përjetësisht në hadrone ose në grupime me ngarkesë ngjyre neutrale. Origjina e mbyllësisë së kuarkeve nuk është zbuluar drejtpërdrejt por një mekanizëm është forca që i mban të bashkuar dy kuarke me ngarkesë ngjyre. Kështu, ne dimë se në QED, fusha elektrike midis dy grimcave me ngarkesë elektrike, dobësohet me largimin e tyre nga njëra-tjetra, duke lejuar p.sh elektronet të jenë të lirë nga bërthama atomike. Potenciali që karakterizon dy ngarkesat është ai i Coulomb-it dhe vijat e fushës elektrike kanë shpërhapje radiale. Ndërsa me largimin e dy kuarkeve nga njëri-tjetri, fusha gluonike formon "*tuba të ngushtë*" të cilat i mbajnë kuarket të bashkuar (Figura 1.1) (Smilga, 2001), (Muta, 2009). Sipas këtij modeli, kuarket janë të lidhura me *fije* ose *korda* në



Figurë 1.1 Krahasimi i bashkëveprimit të dy burimeve me ngarkesë elektrike (ana e majtë e figurës) rasti i QED, me atë të dy burimeve me ngarkesë ngjyre (ana e djathte e figurës) rasti i QCD.

trajtën e flukseve të ngjyrës së kuarkeve (Nambu 1974). Kështu, energjia e një kuarku dhe antikuarku është e lokalizuar në zona të ngushta të hapësirës përgjatë kordës si në Figurën 1.1. Kjo nuk është e vërtetë vetëm për kuarket por edhe për gluonet, e cila çon në formimin e atyre që quhen *korda* ose flukse të ngjyrës së kuarkeve. Energjia e një kuarku dhe antikuarku është e lokalizuar në zona të ngushta të hapësirës përgjatë kordës si në Figurën 1.2. Kështu, vijat e fushës midis dy kuarkeve nuk shpërhapen në hapësirë (rasti elektromagnetik), por janë të loakalizuara në një tub të ngushtë përgjatë distancës kuark-antikuark.



Figurë 1.2 Grafiku i densitetit energjitik midis një çifti statik kuark-antikuark i marrë prej Cardoso *et al*., (2009). Duket qartë korda lidhëse kuark-antikuark

Siç dihet, dëndësia e energjisë është konstante përgjatë një kordë. Si rrjedhim, energjia e bashkëveprimit midis një kuarku dhe antikuarku do të jetë në përpjestim të drejtë me distancën ndërmjet tyre

$$E(r) \to Kr, \tag{I.3.4}$$

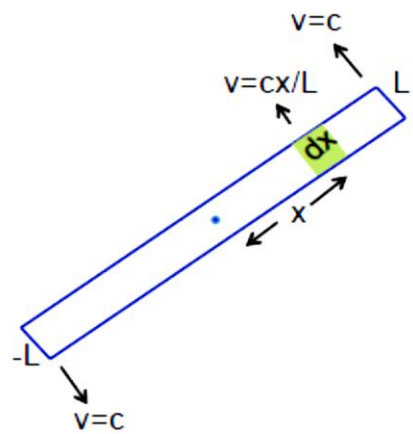
ku K është *tensioni i kordës*. Prodhimi i një çifti kuark-antikuark nga vakumi ose prej zhdukjes së çiftit e^+e^- favorizon këputjen e kordës kur rritet gjatësia e saj r. Kjo bën që prej kordës fillestare të krijohen dy korda të reja e kështu me rradhë si në Figurën 1.1. Ky proçes ndalon derisa gjatësia e kordave të jetë e rendit të shkallës hadronike pra $1\,fm\left(200MeV^{-1}\right)$ ose derisa energjia e saj të jetë e rendit të masave të hadroneve $1GeV$. Në këtë mënyrë gjendet një vlerësim i përafërt për tensionin e kordës:

$$K \sim 200MeV^2. \tag{I.3.5}$$

Modeli i kordës bozonike është në gjëndje të shpjegojë vrojtimet eksperimentale se spinet dhe masat e hadroneve qëndrojnë në trajektoret e Regge-s (Collins, 1977), pra

$$M_J^2 = \frac{1}{\alpha} J \tag{I.3.6}$$

ku $\alpha = 0.9 GeV^{-1}$. Tani të shohim si prodhohet kjo varësi eksperimentale prej modelit të kordës. Konsiderojmë një model të thjeshtë, një kordë lidhëse midis një kuarku dhe antikuarku të lehtë, me gjatësi $2L$, Figura 1.3.



Figurë 1.3 Paraqitja skematike e një korde lidhëse midis një kuarku dhe antikuarku me gjatësi 2L

Meqënëse kuarket janë praktikisht pa masë ata lëvizin me shpejtësinë e dritës dhe shpejtësia e një segmenti dx të kordës në distancë x nga origjina jepet nga $v = xc/L$. Në qoftë se shënojmë me K tensionin e kordës, ose energjinë për njësi të gjatësisë të fluksit në gjëndjen e tij të prehjes, atherë kontributi në energji dhe momentin këndor i elementit dx do të jetë:

$$\begin{aligned} dE &= \gamma K dx \\ dJ &= \gamma K v x dx, \end{aligned} \tag{I.3.7}$$

nga ku

$$M = \int_{-L}^{L} dx \frac{K}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}} = \int_{-L}^{L} dx \frac{K}{\left(1 - x^2/L^2\right)^{1/2}} = \pi K L \tag{I.3.8}$$

dhe

$$J = \int_{-L}^{L} dx \frac{Kx^2/L}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}} = \int_{-L}^{L} dx \frac{Kx^2/L}{\left(1 - x^2/L^2\right)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} K L^2. \tag{I.3.9}$$

Kështu, $M^2 = 2\pi K J$ dhe duke e krahësuar atë me (I.3.6) gjendet tensioni i kordës $K = 1/2\pi\alpha$. Prej vlerës eksperimentale të α gjendet $K \approx 200 MeV^2$ në përputhje me vlerësimin e përafërt që u tha më sipër.

1.3.3 Masa e kuarkeve

Duke qënë se kuarket nuk mund të vëzhgohen si grimca të lira, sigurisht dhe masat e tyre nuk mund të maten direkt, kështu që kuptimi i vërtetë i masës së kuarkeve kërkon një shpjegim më të detajuar. Masa e një kuarku është praktikisht një parametër në langrazhianin e teorisë të bashkëveprimeve të forta, e cila përshkruan vetë-bashkëveprimin e kuarkut dhe nuk mund të vëzhgohet drejtpërdrejt. Si i tillë, parametri i masës luan rolin e një konstante çiftimi në një teori kuantike fushe dhe është teknikisht i varur nga shkalla e momentit dhe skema e rinormimit që do të trajtohen në seksionin (2.5). Sipas modelit standart, masat e kuarkeve janë gjeneruar nëpërmjet thyerjes së simetrisë së një kalimi fazor të bashkëveprimeve elektrodobëta. Aspekte më të detajuara të thyerjes së simetrisë, siç është për shembull edhe ekzistenca e bozonit të Higgs-it janë ende në studim e sipër në eksperimentet e goditësit të energjive të larta (Bryner, 2013), (Overbye, 2013).

1.3.4 Ngarkesa e ngjyrës së kuarkeve

Kuarket marrin pjesë në bashkëveprimin e fortë sepse ato zotërojnë ngarkesë të ngjyrës. Ngarkesat e ngjyrës janë analoget e ngarkesës elektrike në elektrodinamikën kuantike, por me ndryshime thelbësore. Ngarkesa elektrike është një madhësi skalare në kuptimin që ngarkesa totale e një sistemi elektrik është thjesht shuma algjebrike e ngarkesave individuale. Nga ana tjetër ngarkesa e ngjyrës përbën një *ngarkesë kuantike vektoriale*, një koncept i ngjashëm me momentin këndor në mekanikën kuantike. Ngarkesa totale e ngjyrës e një sistemi merret duke kombinuar ngarkesat individuale përbërse sipas një grupi teorik rregullash analoge me ato të kombinimit të momentit këndor në mekanikën kuantike. Siç u përmend më sipër kuarket kanë tre gjëndje bazë të ngarkesës së ngjyrës, të cilat indeksohen si $i = 1, 2, 3$ ose red, green dhe blue duke imituar tre ngjyrat themelore e kuqe, e gjelbër dhe blu. Tre gjëndjet e ngjyrës formojnë një bazë në hapësirën tre dimensionale vektoriale komplekse. Një gjëndje e përgjithshme ngjyre e një kuarku është kështu një vektor në këtë hapësirë. Gjëndja e ngjyrës mund të rrotullohet nga matrica unitare 3 x 3. Grupi i transformimeve të tilla unitare me përcaktor njësi formon një grup Lie SU(3) (Gaviria *et.al.*, 2006). Hapësira tre dimensionale e ngjyrës formon një përfaqsim fondamental të SU(3). Kuarket, ashtu si elektronet, kanë anti-grimcat e tyre të quajtura antikuark, simbolikisht $\bar{q}$. Antikuarket kanë të njëjtin spin dhe masë me kuarket por me shenjë të kundërt. Nga një pikëpamje më e gjërë mbyllësia e kuarkeve mund të shikohet si mbyllësi e ngjyrës: bashkëveprimet e forta nuk lejojnë gjëndje përveç atyre singlete-ngjyre ose neutrale të ekzistojnë në natyrë. Evidenca të forta të mbyllësisë së ngjyrës dalin nga simulimet numerike të kromodinamikës kuantike, siç do ti shohim në kapitujt në vijim.

1.3.5 Fushat kalibruese në QCD (Gluonet)

Kuarket nuk bashkëveprojnë me njëri-tjetrin në mënyrë të drejtpërdrejtë; ky bashkëveprim realizohet nëpërmjet disa “agjentëve” ndërmjetës të quajtur *gluone*. Ashtu

si fotonet në elektrodinamikën kuantike, gluonet që luajnë të njëjtin rol në bashkëveprimin e fortë janë grimca pa masë, me spin 1 me dy gjëndje polarizimi të majtë dhe të djathtë. Ato përfaqsohen nga një potencial vektorial katër-përmasor $A^{\mu}(x)$ me një indeks Lorentz-i $\mu = 0,1,2,3$ ashtu si në elektromagnetizëm. Megjithatë, duhen përcaktuar disa kushte mbi $A^{\mu}(x)$ në mënyrë që të zgjidhen vetëm shkallët e lirisë fizike, pasi përcaktime të ndryshme të kësaj madhësie japin të njëjtën fizikë. Këto kushte quhen *kushte kalibrimi*. Për të njëjtën arsye $A^{\mu}(x)$ janë quajtur *potenciale kalibrimi* dhe gluonet janë quajtur *grimca kalibrimi*. Në seksionin (1.5) ku trajtohen teoritë kuantike të fushës jepet në mënyrë më të detajuar matematikore invarianca kalibruese e langrazhianit të teorisë për elektrodinamikën kuantike dhe kromodinamikën kuantike.

1.3.6 Liria asimptotike. Konstantja rendëse e çiftimit e QCD

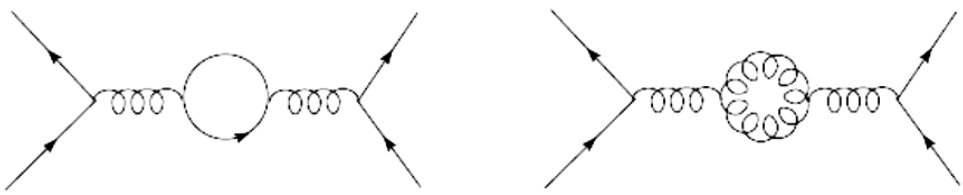
Në fizikë shkalla e madhësive varion nga ato më të voglat (të rendit të shkallës së Planck-ut) deri në ato të rendit të Universit. Ekzistojnë një numër i madh fenomenesh të cilat përshkruhen në mënyra të ndryshme parë nga këndvështrimi i shkallës fizike të tyre. Fenomenet në shkallë të vogël përshkruhen nga fizika e grimcave elementare, fizika nukleare etj. Ndërsa fenomenet e shkallëve të mëdha studjohen nga kozmologjia, astrofizika e kështu me rradhë. Përcaktimi i shkallës fizike është një nga konceptet më thelbësore dhe të rëndësishme në fizikë. Le të shohim si përcaktohet shkalla fizike në Elektrodinamikën Kuantike (QED) dhe më pas në Kromodinamikën Kuantike (QCD). Një hap i parë në studimin e fizikës elektromagnetike është marrja në konsideratë e forcës midis dy ngarkesave elektrike. Për të shpjeguar këtë fenomen, le të risjellim rastin e elektrodinamikës, në të cilën forca e bashkëveprimit midis dy ngarkesave elektrike q_1 dhe q_2 në vakum jepet nga ligji i Coulomb-it,

$$F = \frac{1}{4\pi}\frac{q_1 q_2}{r^2}. \qquad \text{(I.3.10)}$$

Ndërkohë, në qoftë se dy ngarkesat ndodhen në një mjedis me konstante dielektrike $\varepsilon > 1$ forca ka trajtën

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad \text{(I.3.11)}$$

e cila mund të shprehet në formën e rastit të vakumit në qoftë se fusim një ngarkesë efektive $\tilde{q}_i = q_i / \sqrt{\varepsilon}$. Kështu efekti i mjedisit mund të konsiderohet si të modifikosh ngarkesat në mënyrë të përshtatshme. Në teorinë kuantike të fushës, gjëndja e vakumit përbëhet nga gjëndja me energji minimale dhe është e mbushur me elektrone me energji negative. Kur një foton kalon përgjatë këtij vakumi, ai mund të shkaktojë kalimin e gjëndjes energjitike të elektronit nga negative në pozitive, duke krijuar virtualisht një çift elektron-pozitron, i njohur si fluktuacion i vakumit, i treguar në diagramën majtas në Figurën 1.4.



Figurë 1.4 Polarizimi kuantik i vakumit i cili efektivisht ndryshon fuqinë e forcës bashkëvepruese. Diagrama në të majtë vjen nga QED ku bashkëveprimi bëhet më i fuqishëm për distanca të vogla (efekti-screening). Diagrama në të djathtë vjen nga natyra jo-lineare e bashkëveprimeve midis gluoneve në QCD dhe ka efekt- antiscreening, i cili bën çifitimin më të dobët në distanca të vogla.

Për këtë arsye, bashkëveprimi midis dy elektroneve në vakum mund të shprehet nga

$$F = \frac{e_{eff}^2}{4\pi r^2} = \frac{\alpha_{em}(r)}{r^2}, \qquad \text{(I.3.12)}$$

ku α_{em} është një konstante efektive e strukturës fine (konstante çiftimi) që varet nga distanca r. Për $r \to \infty$ konstantja e çiftimit mat forcën e bashkëveprimit për gjëndjen energjitike minimale dhe ka vlerën $\alpha_{em} = 1/137.035$. Varësia e kësaj konstanteje nga distanca ose gjëndja energjitike përcaktohet nga një ekuacion diferencial në elektrodinamikën kuantike,

$$\mu \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} = \beta(\alpha(\mu)), \qquad \text{(I.3.13)}$$

ku μ është një shkallë energjitike që shpesh korrespondon me $1/r$. β - funksioni mund të llogaritet në teorinë perturbative. Vihet re se forca e bashkëveprimit midis dy elektroneve rritet me zvogëlimin e distancës midis tyre. Kështu, *elektrodinamika kuantike është një teori me çiftim të fortë në shkallë shumë të vogël distancash*.

Në të njëjtën mënyrë, një pikënisje për të kuptuar shkallën e bashkëveprimeve të forta është marrja në konsideratë e forcave midis kuarkeve. Një fenomen i rëndësishëm lidhur me këto forca që u zbulua në eksperimentet e kryera në regjime të larta energjish është *liria asimpotike*. Sipas kësaj vetie forca e bashkëveprimit midis kuarkeve zvogëlohet me zvogëlimin e distancës midis tyre. Për këtë studim në vitin 2004, Gross, Politzer dhe Wilczek (Gross *et.al.*, 1973) fituan çmimin Nobel në fizikë.

Në Kromodinamikën Kuantike densiteti Langrazhian përbëhet nga termi gluonik dhe ai fermionik dhe i vetmi parametër dimensional është masa e zhveshur e kuarkut. Kështu QCD-ja klasike është e pavarur nga shkalla (shkallë-invariante) në limitin kiral $m_q \to 0$. Mbas kuantizimit gjithsesi, shkallë-invarianca thyhet duke u shfaqur një shkallë në mënyrë jotriviale. Ky quhet ndryshe si transformim dimensional. Në këtë mënyrë janë krijuar shumë madhësi dimensionale në QCD-në reale, siç është "hendeku i masës",

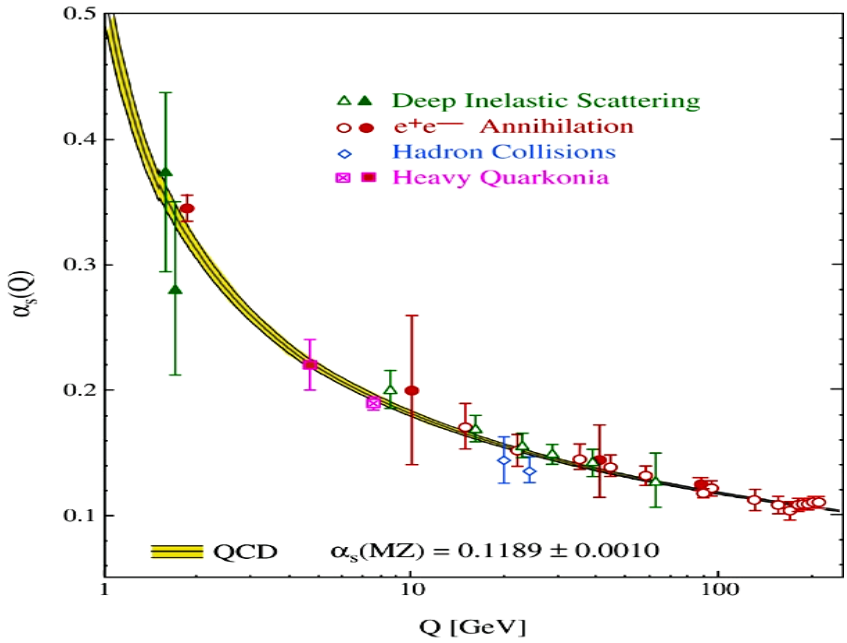
masat e hadroneve etj. Ashtu si në QED edhe në QCD, shkruhet i njëjti ekuacion diferencial për konstanten e çiftimit të fortë por β - funksioni ka tjetër formë në këtë rast, ai jepet nga

$$\beta(\alpha) = -\frac{\beta_0}{2\pi}\alpha^2 + \ldots \qquad \text{(I.3.14)}$$

(Gross *et.al.*, 1973), ku $\beta_0 = 11 - 2/3(n_f)$ ku n_f është numri i aromave aktive të kuarkut. Termi i dytë tek β_0 vjen nga efekti i çiftit quark-antikuark. Ai përshkallëzohet si numri i aromave të kuarkut dhe është negativ (siç do të ishte në QED). Megjithatë termi i parë, 11, ka shenjë të kundërt dhe vjen nga kontributi jo-linear i gluoneve. Konstantja e çiftimit të kromodinamikës kuantike ka formën e mëposhtme (Muta, 1989) të varësisë nga shkalla energjitike μ

$$\alpha_s(\mu) = \frac{2\pi}{\beta_0 \ln(\mu / \Lambda_{QCD})}, \qquad \text{(I.3.15)}$$

e cila shkon në zero me $\mu \to \infty$ ose distanca që i afrohen zeros. Kjo sjellje e çuditshme e konstantes së çiftimit është verifikuar në eksperimentet e energjive të larta me një saktësi mjaft të lartë (Bethke, 2007) siç tregohet në Figurën 1.5, ku Q është shkurtimi për shkallën "rendëse".



Figurë 1.5 Konstantja "rendëse" e çiftimit të QCD-së; të dhënat eksperimentale kundrejt parashikimeve teorike marrë nga (Bethke, 2007).

Konstantja Λ_{QCD} është një shkallë e brëndshme e QCD. Konstantja e çiftimit fut një parametër dimensional Λ_{QCD}, e cila përcakton shkallën në të cilën konstantja e çiftimit bëhet e madhe dhe teoria bëhet joperturbative. Në fakt, kjo konstante thjesht vendos shkallën fizike të bashkëveprimeve të forta. Në modelin standart me tre aroma kuarkesh, $\Lambda_{QCD} \sim 250 MeV$.

Në regjime të larta energjish ose distanca të vogla, fizika e bashkëveprimeve të forta mund të studjohet me metoda perturbative për shkak të lirisë asimptotike në këto regjime. Ndërkohë në energji të ulta ose distanca të mëdha, bashkëveprimet janë të çiftuara fort dhe efektet joperturbative janë të rëndësishme. Pikërisht shfaqja e shkallës energjitike të QCD-së pasuron fenomenologjinë e saj.

1.4 Simetritë e QCD-së dhe thyerja e tyre

Më sipër trajtuam shkallën e bashkëveprimeve të forta Λ_{QCD} nëpërmjet konstantes rendëse të çiftimit α_s. Me anë të këtij trajtimi mund të fusim nocionet e kuarkeve të lehta dhe të rënda. Kështu *kuarke të lehta* do të quhen kuarket që kanë masë shumë më të vogël se Λ_{QCD}, dhe *kuarke të rënda* ato që kanë masë shumë më të madhe se Λ_{QCD}. Saktësisht, aromat up dhe down kualifikohen për kuarket e lehta, ndërsa charm, bottom dhe top si kuarke të rënda. Kuarku strange përbën një veçanti pasi nuk mund të klasifikohet as i lehtë e as i rëndë dhe është shumë kompleks për ta trajtuar teorikisht. Do të fokusohemi më tepër tek kuarket e lehta, të cilët janë ndoshta më të përshtatshmit për botën reale. Për të kuptuar fizikën e kuarkeve të lehta, është e përshtatshme të konsiderojmë një limit teorik në të cilin masat e tyre janë ekzaktësisht zero. Siç do të shikohet dhe në kapitujt vijues, fizika e botës reale nuk është shumë e ndryshme nga ky limit teorik.

Ligjet e ruajtjes në fizikë rrjedhin prej simetrive të caktuara në natyrë. Në qoftë se veprimi i një sistemi është invariant ndaj disa transformimeve simetrie të shkallëve të lirisë, atëherë kemi të bëjmë me ligjet përkatëse të ruajtjes. Kështu dimë se kanë vend korrespondencat:

- Invarianca ndaj zhvendosjes në kohë ($t = t + a$) sjell ligjin e ruajtjes së energjisë ($\frac{dE}{dt} = 0$)
- Invarianca ndaj zhvendosjes në hapësirë ($r_i \to r_i + b_i$) sjell ligjin e ruajtjes së impulsit ($\frac{dp^i}{dt} = 0$).
- Invarianca ndaj rrotullimit në hapësirë ($r_i \to R_{ij} r_j$, me $RR^T = 1$) sjell ligjin e ruajtjes së momentit kinetik ($\frac{dJ^i}{dt} = 0$).

Referuar teoremës Noether (Noether, 1918) çdo simetrie të Langrazhianit të një teorie fushe i përgjigjet një ligj ruajtje. ***Simetria kirale është një prej simetrive mjaft të rëndësishme që zotëron Langrazhiani i QCD-së.***

1.4.1 Simetria Kirale

Densiteti langrazhian i kromodinamikës kuantike me gjeometri Euklidiane, siç do të shihet më në detaj në seksionin (1.5), jepet si:

$$\mathcal{L}\ x\ = \sum_{i=1}^{N_f}\left[\bar{\psi}_i\ x\ \ \not{D} + m_i\ \ \psi_i\ \ x\ \right] - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad \text{(I.4.1)}$$

ku termi i parë është kontribut i fushave fermionike dhe i dyti i atyre gluonike. Në shprehjen e mësiperme $\psi_i\ \ x$ është fusha fermionike që i korrespondon një kuarku me aromë i (me masë m_i); $\not{D} = \gamma^\mu\left[\partial_\mu - igA_\mu\ \ x\ \right]$, dhe $A_\mu\ \ x$ është fusha gluonike, e cila mund të zbërthehet si

$$A_\mu\ \ x\ \ = \sum_a \lambda^a A_\mu^a\ \ x\ \ . \qquad \text{(I.4.2)}$$

Tenzori i fushës jepet si

$$F_{\mu\nu}\left(x\right) = \sum_a \lambda^a F_{\mu\nu}^a\left(x\right). \qquad \text{(I.4.3)}$$

Ky tenzor është i lidhur me potencialin vektorial nga

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c. \qquad \text{(I.4.4)}$$

λ^a janë gjeneratorët e grupit të kalibrimit të ngjyrës, pra $SU\left(3\right)$, dhe f_{abc} janë struktura konstante.

Lë të shohim rastin e simetrisë kirale të Langrazhian-it të QCD-së me dy aroma kuarkesh (*up* dhe *down*). Në qoftë se një kuark ka masë zero, atëherë spini i kuarkut mund të jetë i orientuar sipas kahut të lëvizjes, në këtë rast quhet kuark i djathtë (right-handed), ose në kah të kundërt me lëvizjen, në këtë rast quhet kuark i majtë (left-handed). Meqënëse një kuark pa masë lëviz me shpejtësinë e dritës, orientimi ose *kiraliteti i* kuarkut është i pavarur nga çdo strukturë Lorentz-i nën të cilën bëhet ky vëzhgim. Kiraliteti mund të zgjidhet nga matrica e Dirac-ut γ_5 pasi hamiltoniani i lirë komuton me të. Për këtë qëllim përcaktojmë një *operator të projektimit* $P_\pm \equiv \left(1 \pm \gamma_5\right)/2$ për të projektuar veçmas kuarket me kiralitet të majtë dhe ato me kiralitet të djathtë sipas,

$$\psi_{Lf}\ \ x\ \ = \frac{1}{2}\ \ 1-\gamma_5\ \ \psi_f\ \ x$$

$$\psi_{Rf}\ \ x\ \ = \frac{1}{2}\ \ 1+\gamma_5\ \ \psi_f\ \ x\ \ . \tag{I.4.5}$$

Ku indeksimi f tregon aroma të ndryshme, R - djathtas, L-majtas. Në rastin konkret

$$\psi_f\ \ x\ \ = \begin{bmatrix} u\ \ x \\ d\ \ x \end{bmatrix}. \tag{I.4.6}$$

Atherë duke futur dy komponentet u dhe d të kuarkut në të dyja kiralitetet, Langrazhiani mund të shkruhet si

$$\mathcal{L} = \ \bar{u}_L\ \ \bar{d}_L \begin{pmatrix} \not{D} & 0 \\ 0 & \not{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} + \ \bar{u}_L\ \ \bar{d}_L \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} + (L \leftrightarrow R) + \mathcal{L}_{gluonike} \tag{I.4.7}$$

Vetëm në qoftë se $m_u = m_d = 0$, Langrazhiani në (I.4.7) është *invariant ndaj rrotullimeve të veçanta* $U(2)$ mbi fushat fermionike me kiralitet të majtë ose të djathtë. Më saktësisht nën transformimin,

$$\begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix} \to V_i \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}, \tag{I.4.8}$$

me $V_i \in U(2)$ dhe $i = L, R$. Me fjalë të tjera bashkëveprimet gluonike nuk e ndryshojnë *helicitetin* e kuarkut. Pra *simetria kirale ruhet* në këtë rast.

Nga teorema e Noether-it çdo parametri të vazhduar të grupit të simetrisë i korresondon ruajta e një tipi rryme. Grupi $U(2)$ ka katër parametra realë, dhe si rrjedhim duhet te ekzistojnë *tetë rryma të ruajtura*. Po fokusohemi në gjashtë prej tyre, të quajtura *rryma vektoriale* dhe *boshtore*, respektivisht:

$$J_\mu^a = \bar{\psi}\gamma_\mu \frac{\tau^a}{2}\psi, \qquad J_\mu^{5a} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 \frac{\tau^a}{2}\psi, \tag{I.4.9}$$

ku $a = 1,2,3$ dhe τ^a është gjenerator i grupit $SU(2)$. Për kuarket pa masë, gjashtë ngarkesat vektoriale (V) dhe boshtore (B), $Q_{V,B}^a$, që i korrespondojnë këtyre rrymave, do të komutonin me Hamiltonianin, $\left[H_{QCD}, Q_V^a\right] = \left[H_{QCD}, Q_B^a\right] = 0$ dhe do të ruheshin. Kështu në qoftë se kemi vlera vehtjake të H_{QCD}, $H_{QCD}\left|\psi\right\rangle = E\left|\psi\right\rangle$ si rrjedhim gjëndjet $Q_V^a\left|\psi\right\rangle$ dhe $Q_B^a\left|\psi\right\rangle$ do të degjeneroheshin. Në të vërtetë kjo nuk ndodh në natyrë. Kjo do

të thotë se natyra nuk e respekton simetrinë e Hamiltonian-it në këtë mënyrë (Wigner). Kjo do të thotë se simetria është *"thyer spontanisht"*.

1.4.2 Thyerja spontane e simetrisë kirale

Simetritë dhe thyerjet e tyre janë pjesë e rëndësishme e fizikës moderne. Simetria hapsinore dhe shtrirjet e saj supersimetrike janë bazat e ndërtimit të teorive kuantike të fushës. Simetritë e brëndshme, siç është izospini (simetria proton dhe neutron, quarket up dhe down), shija, ngjyra, etj, formojnë strukturën themelore të modelit standart. Nga ana tjetër, studimi i thyerjeve të simetrisë është me po aq interes sa dhe vetë studimi i simetrive. Thyerja spontane e simetrisë është një fenomen i zakonshëm në fizikë; ndodh në mekanikën kuantike apo edhe në shumë raste të fizikës së materies së kondesuar siç është magnetizimi spontan i një ferromagneti. Një ilustrim i mirë do të ishin kalimet fazore të rendit të dytë nga mekanika statistike. Ashtu siç e dimë ka shumë shembuj të kalimeve fazore të rendit të dytë në të cilat ndodh një ndryshim i vazhdueshëm i rendit të parametrave. Konsiderojmë një copë materiali magnetik. Hamiltoniani i tij sigurisht është simetrik në lidhje me rrotullimin dhe natyrisht që pritshmëria është e tillë edhe për funksionin valor të gjëndjes bazë të tij. Por nuk ndodh kështu nën një vlerë të caktuar kritike të temperaturës së sistemit në të cilën ndodh një magnetizim spontan. Vektori i magnetizimit orientohet përgjatë një drejtimi të caktuar në hapësirë, dhe si rrjedhim simetria e rrotullimit humbet. Thuhet në këtë rast se *simetria e rrotullimit është thyer spontanisht*. Gjithashtu, për një përcjellës nën një temperaturë të caktuar, simetria elektromagnetike U(1) thyhet spontanisht the funksioni valor i çiftit Cooper (në fizikën e materies së kondesuar, një çift Cooper përbëhet nga dy elektrone (ose fermione te tjera) të grupuar në temperaturë të ulët në një mënyrë të caktuar) merr një vlerë të caktuar klasike.

Simetria kirale është një simetri e vazhduar në kuptimin që ajo përmban një sërë transformimesh të cilat janë të lidhur ngushtësisht me njëra-tjetrën. Në rastin e thyerjes spontane të një simetrie të vazhduar, gjenerohen infinit gjëndje vakumi të degjeneruara, të cilat nxisin eksitime pa masë të ashtuquajtura bozone të Goldston-it. Në rastin e magnetizimit, bozon i Goldston-it është funksioni valor spinor pa masë.

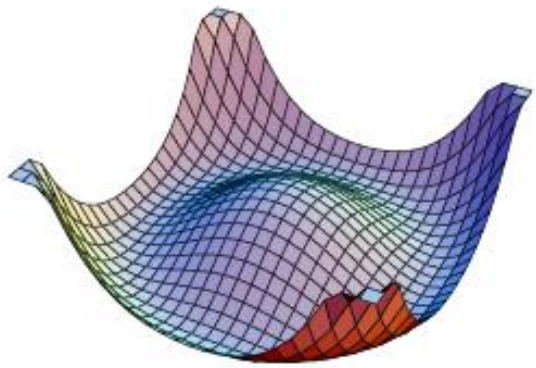
Një mënyrë e thjeshtë për ta kuptuar më mirë thyerjen e simetrisë kirale është marrja në konsideratë e dinamikës së fushës skalare ϕ_i

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi_i\partial_{\mu}\phi_i - V \quad \phi \quad . \tag{I.4.10}$$

Në qoftë se $V \quad \phi$ është invariant ndaj rrotullimit katër-përmasor $\phi_i \to L_{ij}\phi_j$, sistemi ka një simetri të rendit $O(4) \sim SO(3)\times SO(3)$. Le të marrim si shembull të thjeshtë formën e potencialit

$$V \quad \phi \quad = -\frac{1}{2}\mu^2\phi_i^2 - \frac{1}{4}\lambda \quad \phi_i^2 \quad ^{2} \tag{I.4.11}$$

Simetria $SO(4)$ thyhet spontanisht në $SO(3)$ kur $\mu^2 \leq 0$. Ashtu siç tregohet edhe në Figurën 1.6, minimumi i potencialit i korrespondon $\phi_i^2 = c^2 = \sqrt{-\lambda / \mu^2}$ e cila ka një numër të pafundëm zgjidhjesh, që i korrespondojnë një numri infinit vakumesh, të gjitha të përftuara nga njëra-tjetra me anë të disa rrotullimeve $O(4)$.



Figurë 1.6 Potenciali i fushës skalare kur ndodh thyerja spontane e simetrisë. Minimumi i potencialit tani është një hypersipërfaqe, e cila nuk është invariante ndaj rotullimeve SO(4).

Vakumi fizik mund të zgjidhet të jetë njëri prej zgjidhjeve infinit të mundshme. Me tu veçuar një zgjidhje, për shembull $\phi_i = 0,0,0,c$, ky vakum është akoma invariant ndaj rrotullimeve $SO(3)$ të tre dimensioneve të para. Kjo korrespondon me thyerjen e simetrisë nga $SO(4)$ në $SO(3)$, analoge me grupin e izospinit. Mendojmë sikur të fillonim me një gjëndje vakumi në çdo pikë të hapësirë-kohës, dhe të bëjmë një rrotullim të ndryshëm në pika të ndryshme hapësirë-kohë. Energjia e gjëndjes së re duhet të jetë proporcionale me derivatin e rrotullimeve në hapësirë, pasi një rrotullim i zakonshëm nuk gjeneron energji. Me zhdukjen e derivatit, energjia duhet të shkojë në zero. Si rrjedhim, eksitimi i lidhur me rrotullimin nuk ka masë. Ky është një bozon Goldston-i. Si pasojë e simetrisë kirale, ka tre mënyra të pavarura për të kryer një rrotullim të një vakumi të zgjedhur, kemi tre bozone të mundshme të Goldston-it. Këto bozone u identifikuan së pari më 1950, si $\pi^{\pm,0}(x)$. Fakti që simetria kirale nuk është ekzakte ($m_u \neq m_d \neq 0$) çon në një masë pioni të vogël (krahësuar me Λ_{QCD}), $m_\pi \sim 140 MeV$.

1.4.4 Thyerja eksplicite e simetrisë kirale

Origjina e Spinit janë rrotullimet në $\mathbb{R}^3$. Një fermion pra nuk është gjë tjetër veçse një shkallë lirie spinore. Në hapësirën Euklidiane kemi $t \to it$. Kështu, energjia e një shkalle lirie fermionike do të ishte imagjinare dhe do te jepet me anë të barazimit

$$E = \pm i\vec{\sigma}\cdot\vec{p}, \qquad \Rightarrow \qquad E^2 + \vec{p}^{\,2} = 0. \tag{I.4.12}$$

Barazimet kuantomekanike janë ato të Weyl-it

$$\begin{aligned} &\left(\partial_0 + i\vec{\sigma}\cdot\nabla\right)\phi(x) = 0 \\ &\left(\partial_0 - i\vec{\sigma}\cdot\nabla\right)\chi(x) = 0, \end{aligned} \tag{I.4.13}$$

ku $\phi(x), \chi(x) \in \mathbb{C}^2$. Në fakt bashkësia e barazimeve të Weyl-it është një rast i veçantë i barazimit të Dirac-ut:

$$\begin{pmatrix} 0 & \partial_0 - i\vec{\sigma}\cdot\nabla \\ \partial_0 + i\vec{\sigma}\cdot\nabla & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} = 0. \tag{I.4.14}$$

Duke përgjithësuar barazimet e Weyl-it për masë m të ndryshme nga zero kemi:

$$\begin{pmatrix} m & \partial_0 - i\vec{\sigma}\cdot\nabla \\ \partial_0 + i\vec{\sigma}\cdot\nabla & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} = 0, \tag{I.4.15}$$

Duke futur fushën e Dirac-ut me 4-komponente:

$$\psi\ \ x\ \ = \begin{pmatrix} \phi\ \ x \\ \chi\ \ x \end{pmatrix}, \tag{I.4.16}$$

si dhe gamma matricat e Dirac-ut në hapësirën Euklidiane,

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{I.4.17}$$

përfundimisht barazimi i Dirac-ut mund të shkruhet në trajtën

$$\gamma^\mu \partial_\mu + mI\ \ \psi\ \ x\ \ = 0. \tag{I.4.18}$$

Në rastin Euklidian matricat γ_μ kënaqin algjebrën e Dirac-Clifford-it:

$$\left\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\right\} = \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} I_4, \tag{I.4.19}$$

ndërsa $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ antikomuton me gjithë të tjerat. Simetria kirale është ekzakte kur masat e fermioneve janë zero. Kjo do të thotë matematikisht qe operatori i Dirac-ut antikomuton me matricën γ_5,

$$\{D, \gamma_5\} = 0. \tag{I.4.20}$$

Por në të vërtetë, ***simetria thyhet në mënyrë eksplicite*** prej faktit se masat e zhveshura të kuarkeve m_u dhe m_d, ndonëse shumë të lehta, janë të ndryshme nga zero, pra

$$\{D, \gamma_5\} = \{\gamma^\mu \partial_\mu + m, \gamma_5\} = 2m\gamma_5 \neq 0. \tag{I.4.21}$$

Kështu, operatori i Dirac-ut thyhen në mënyrë eksplicite simetrinë kirale, ndaj janë bërë kërkime për riformulime apo modifikime të këtij operatori, siç do të shikojmë në seksionet vijuese, me qëllim ruajtjen e simetrisë kirale duke plotësuar kushtin matematikor (I.4.20)

1.5 Kuantizimi i teorive kalibruese

Teoritë kalibruese besohet të përfshijnë të gjithë bashkëveprimet e grimcave elementare. Një qasje sistematike është ajo e formulimit Langrazhian të një teorie fushe. Në teorinë e fushës punohet me konceptin fushë. Fushat janë funksione të hapësirës dhe kohës: $\Phi_i(x, y, z, t)$. Langrazhiani (ose densiteti i Langrazhianit) është një funksion i Φ_i dhe i derivateve hapësinore-kohore të saj. Në mënyrë kompakte, ekuacionet e Ojler-Langranzhit mund të shkruhen

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \ . \tag{I.5.1}$$

Fillimisht le të trajtojmë rastin e bashkëveprimeve elektromagnetike për të kaluar më pas në teorinë e bashkëveprimeve të forta (Gattringer & Lang, 2009).

1.5.1 Teoritë kalibruese Abeliane - Elektrodinamika kuantike (QED)

Para së të shkruajmë Langrazhianin e elektrodinamikës kuantike lë të shohim Langrazhianin e Dirac-ut për një fushë spinore (spin 1/2). N.q.se kemi një fushë spinore të Diracut ψ densiteti Langrazhian i Dirac-ut jepet nga:

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi, \tag{I.5.2}$$

ku ψ dhe $\bar{\psi}$ janë variabla të pavarur, m masa e grimcës dhe ∂_μ derivati i pjesshëm sipas drejtimit μ. Duke zëvendësuar Langrazhianin $\mathcal{L}_D$ në ekuacionin e Ojler-Langrazhit marrim:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \tag{I.5.3}$$

γ^μ janë matrica 4×4 që i binden algjebrës së Clifford – Dirac-ut,

$$\begin{aligned} \left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right] &= 2\delta_{\mu\nu} \\ \gamma_\mu^\dagger &= \gamma_\mu \end{aligned} \tag{I.5.4}$$

Gjithashtu përcaktojmë:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4 \tag{I.5.5}$$

si dhe

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \gamma_5^\dagger. \tag{I.5.6}$$

Paraqitja e matricave Gama jepet si

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \qquad i = 1,2,3 \\ \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{I.5.7}$$

Këto elementë matricorë janë në vetvete matrica 2×2 dhe σ_i janë matricat e Paul-it,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{I.5.8}$$

Ekuacioni (I.5.3) është ekuacioni i Dirak-ut ose ekuacioni i lëvizjes për një fushë fermionike të lirë (fermion me masë *m*).

Langrazhiani i dytë që do trajtojmë është ai i Maksuell-it për një fushë vektoriale pa masë me një term burim

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - eJ^\mu A_\mu = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{I.5.9}$$

ku A_μ është potenciali vektorial elektromagnetik dhe $F^{\mu\nu}$ është tenzori i fushës elektromagentike i cili përcaktohet nga

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{I.5.10}$$

Në të njëjtën mënyrë n.q.se zëvëndësojmë Langrazhianin $\mathcal{L}_M$ në ekuacionin e Ojler-Langrazhit gjenden ekuacionet e Maksuell-it:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = eJ^\nu. \tag{I.5.11}$$

Nga kombinimi i këtyre dy Langrazhianeve (I.5.2) dhe (I.5.9) mund të shkruajmë Langrazhianin e elektrodinamikës kuantike

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \tag{I.5.12}$$

Tani le të shikojmë disa *simetri të Langrazhianit* ose transformime që e lenë atë invariant. Le të nisemi përsëri prej Langrazhianit të Dirac-ut për një fushë spinore. Duket qartë se një transformim fazor *global* ose transformim kalibrues i formës

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi \tag{I.5.13}$$

e le të pandryshuar këtë Langrazhian (Griffths, 1987).

Hapi tjetër është të testojmë sjelljen e Langrazhian-it nën një transformim kalibrues *lokal*. Një transformim kalibrues lokal është i formës

$$\psi \to e^{i\alpha(x)}\psi \ . \tag{I.5.14}$$

Në këtë rast, transformimi kalibrues lokal është një rrotullim fazor i cili ndryshon nga pika në pikë. Një përpjekje e drejtpërdrejtë për të kontrolluar invariancën e Langrazhianit në fjalë ndaj këtij transformim do të dështonte. Ndërkohë, është e mundur që të rishkruajmë këtë Langrazhian në një formë të tillë që të jetë invariant ndaj këtij shndërrimi. Për termin ku bën pjesë masa nuk ka kufizime në lidhjen midis transformimit global dhe lokal. Ndërlikimet vijnë prej futjes së derivateve. Derivati i fushës $\psi(x)$ në drejtimin n^μ gjendet nga

$$n^\mu\partial_\mu\psi = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\psi(x+n\epsilon)-\psi(x)}{\epsilon} \tag{I.5.15}$$

Në këtë eukacion duket qartë diferenca që bëhet midis dy fushave me faza të ndryshme. Për të kompensuar diferencën në fazat transformuese fusim një madhësi $U\ x,y$ të quajtur ndryshe *"transportues kalibrimi"* (gauge transporter), i cili varet prej dy pikave dhe ndjek ligjin e transformimit,

$$U(x,y) = e^{ia(x)}U(x,y)e^{-ia(y)}, \tag{I.5.16}$$

me

$$U(y,y) = 1 \ . \tag{I.5.17}$$

Madhësinë e futur $U \ \ x,y$ mund ta konsiderojmë si një fazë të pastër. Termat $\psi(x)$ dhe $U(y,x)\psi(x)$ ndjekin të njëjtin ligj transformimi. Ky fakt shfrytëzohet për të shkruar të ashtuquajturin derivat kovariant

$$n^{\mu} D_{\mu}\psi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\psi(x+\epsilon n) - U(x+\epsilon n, x)\psi(x)}{\epsilon} \tag{I.5.18}$$

Nëse pranojmë që madhësia $U(x,y)$ është një funksion i vazhduar i pikave x dhe y, atëherë mund ta zbërthejmë atë sipas distancës midis dy pikave

$$U(x+\epsilon n, x) = 1 - ie\epsilon n^{\mu} A_{\mu}(x) + O(\epsilon^2). \tag{I.5.19}$$

Termi i zhvendosjes ϵn^{μ} paraqet një fushë të re vektoriale $A_{\mu}(x)$ dhe e është një konstante arbitrare. N.q.se zëvëndësojmë (I.5.19) tek (I.5.18) derivati kovarinat merr formën

$$D_{\mu}\psi(x) = \partial_{\mu}\psi(x) + ieA_{\mu}\psi(x) = (\partial_{\mu} + ieA_{\mu})\psi(x). \tag{I.5.20}$$

Mund të përdorim ekuacionin e sipërm për të gjetur ligjin e transformimit të $A_{\mu} \ \ x$ nën transformimin lokal kalibrues. Kjo realizohet nëse zëvëndësojmë (I.5.14) tek (I.5.20). Rezultati që merret është

$$A_{\mu}(x) \to A_{\mu}(x) - \frac{1}{e}\partial_{\mu}\alpha(x) \tag{I.5.21}$$

Tani shohim nëse transformohet në të njëjtën mënyrë si fusha ψ edhe derivati kovariant D_{μ}:

$$\begin{aligned} D_{\mu}\psi(x) \to & \left[\partial_{\mu} + ie(A_{\mu}(x) - \frac{1}{e}\partial_{\mu}\alpha(x))\right] e^{i\alpha(x)}\psi(x) \\ &= i(\partial_{\mu}\alpha(x))e^{i\alpha(x)}\psi(x) + e^{i\alpha(x)}\partial_{\mu}\psi(x) + ieA_{\mu}(x)e^{i\alpha(x)}\psi(x) - i(\partial_{\mu}\alpha(x))e^{i\alpha(x)}\psi(x) \\ &= e^{i\alpha(x)}(\partial_{\mu} + ieA_{\mu})\psi(x) \\ &= e^{i\alpha(x)}D_{\mu}\psi(x) \end{aligned} \tag{I.5.22}$$

Duket qartë nga rezultati i marrë se edhe derivati kovariant shndërohet në të njëjtën formë si fusha ψ. Që të shkruajmë në formë të plotë të gjithë Langrazhianin, na nevojitet edhe termi kinetik për fushën $A_{\mu}(x)$. Pamë se, derivati kovariant transformohej njëlloj si fusha ψ. Komutatori i derivatit kovariant ndjek gjithashtu të njëjtin ligj transformimi,

$$[D_\mu, D_\nu]\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}[D_\mu, D_\nu]\psi(x) \quad \text{(I.5.23)}$$

kjo pasi të llogarisësh komutatorin jep:

$$\begin{aligned}\left[D_\mu, D_\nu\right] &= \left[\partial_\mu + ieA_\mu(x), \partial_\nu + ieA_\nu(x)\right] \\ &= \left[\partial_\mu, \partial_\nu\right] + ie\left(\left[\partial_\mu, A_\nu\right] - \left[\partial_\nu, A_\mu\right]\right) - e^2\left[A_\mu, A_\nu\right] \\ &= ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &= ieF_{\mu\nu},\end{aligned} \quad \text{(I.5.24)}$$

i cili është invariant kalibrues, pra:

$$\begin{aligned}\left[D_\mu, D_\nu\right] &\to \left[D'_\mu, D'_\nu\right] \\ &= ie(\partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu) \\ &= ie(\partial_\mu[A_\nu(x) - \frac{1}{e}\partial_\nu\alpha(x)] - \partial_\nu[A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)]) \\ &= ieF_{\mu\nu}.\end{aligned} \quad \text{(I.5.25)}$$

Tani mund të shkruajmë të plotë Langrazhianin *lokal invariant kalibrues* për fushën fermionike me potencial vektorial A_μ

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad \text{(I.5.26)}$$

Zëvëndësimi i operatorit ∂_μ *me* D_μ *konverton një Langrazhian global invariant në një lokal invariant*. ***Këto fusha janë quajtur fusha kalibruese*** (Peskin & Schoeder, 1995). Ideja e invariancës kalibruese, u fut nga Herman Weyl (Weyl, 1929). Një transformim global mund të mendohet si shumëzimi i fushës ψ me një fazë komplekse U

$$\psi \to U\psi, \quad \text{(I.5.27)}$$

ku $U^\dagger U = 1$ dhe me përcaktimin e $U = e^{i\theta}$. Grupi i fazave që plotësojnë këto kushte është $U(1)$. Simetria quhet simetria $U(1)$ invariant kalibruese. Simetria kalibruese është një parim fondamental që përcakton formën e Langrazhianit të QED. Grupi i simetrisë kalibruese për QED është $U(1)$. Në vitin 1954, Yang dhe Mills aplikuan të njëjtën ide për grupin $SU(2)$ (Yang & Mills, 1954), që më vonë u shtri edhe për grupin $SU(3)$, duke çuar kështu tek *kromodinamika kuantike*.

1.5.2 Teoritë kalibruese jo-Abeliane - Kromodinamika kuantike (QCD)

Pasi paraqitëm grupin e simetrive të QED në seksionin paraardhës, le ta shtrijmë dhe përgjithësojmë edhe për QCD-në.

Kuarke me aroma të ndryshme kanë masa të ndryshme. Langrazhiani për një *aromë të lirë* do të shkruhej

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \left[i\bar{\psi}_r\gamma^\mu\partial_\mu\psi_r - m\bar{\psi}_r\psi_r\right] + \left[i\bar{\psi}_b\gamma^\mu\partial_\mu\psi_b - m\bar{\psi}_r\psi_b\right] \\ &+ \left[i\bar{\psi}_g\gamma^\mu\partial_\mu\psi_g - m\bar{\psi}_r\psi_g\right]\end{aligned} \tag{I.5.28}$$

N.q.se futim shënimin kompakt

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_r \\ \psi_b \\ \psi_g\end{pmatrix}, \qquad \bar{\psi} = \begin{matrix}\psi_r & \psi_b & \psi_g\end{matrix}, \tag{I.5.29}$$

Langrazhiani i mësipërm mund të shkruhet

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \tag{I.5.30}$$

Tani le të interesohemi për simetritë e Langrazhianit. Për këtë arsye shohim sjelljen e tij ndaj transformimit kalibrues

$$\psi \to U\psi, \qquad (\bar{\psi} \to \bar{\psi}U^\dagger), \tag{I.5.31}$$

ku U është tani një matricë 3×3. Dihet se çdo matricë unitare mund të shkruhet si eksponenciali i një matrice Hermitiane H:

$$U = e^{iH}. \tag{I.5.32}$$

Një matricë e tillë Hermitiane mund të ndërtohet prej

$$H = \alpha I + \frac{\lambda^k}{2}a^k, \qquad k = 1...8 \tag{I.5.33}$$

ku (për algjebrën U(3)) α, $a^1, a^2, ... a^8$ janë 9 numra realë, $\lambda^1, \lambda^2, ... \lambda^8$ janë të matricat e Gell-Mann dhe është përdorur shuma sipas indeksit k. Kështu:

$$U = e^{i(\alpha I + \frac{\lambda^k}{2}a^k)} = e^{i\alpha}e^{i\frac{\lambda^k}{2}a^k}. \tag{I.5.34}$$

Termi i parë është vetëm një transformim faze si në rastin e U(1) dhe termi i dytë $e^{i\frac{\lambda^k}{2}a^k}$ është një matricë me përcaktor 1 dhe i përket grupit SU(3). Ky transformim global mund të bëhet lokal duke përcaktuar varësinë hapësirë-kohe të *a*

$$\psi \to e^{i\frac{\lambda^k}{2}a^k(x)}\psi = e^{it^k a^k(x)}\psi, \qquad (\frac{\lambda^k}{2} \to t^k). \tag{I.5.35}$$

Në implementimin e invariancës lokale kalibruese të Langrazhianit të QCD, problemi është më i ndërlikuar për shkak të grupit të simetrisë ***jo-Abelian***. Teoria e fushës me një simetri jo-komutuese është quajtur *teori kalibruese jo-Abeliane*. Procedura e ndërtimit të një Langrazhiani lokal invariant kalibrues është e njëjtë si tek QED. Ligji i transformimit të tij në këtë rast do shkruhej:

$$U(x,y) \to \Omega(x)U(x,y)\Omega^{\dagger}(y) = e^{i\alpha^k(x)t^k}U(x,y)e^{-i\alpha^k(y)t^{k\dagger}}. \qquad \text{(I.5.36)}$$

kemi $U(y,y)=1$. Rrotull $U=1$ një matricë e tillë mund të zbërthehet në terma të gjeneratorit Hermitian të $SU(3)$

$$U(x+\epsilon n,x) = 1 - ig\epsilon n^{\mu}A^k{}_{\mu}t^k(x) + O(\epsilon^2). \qquad \text{(I.5.37)}$$

Hapi tjetër është të vendosim këtë shprehje tek shprehja për derivatin kovariant nga ku marrim:

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - igA^k{}_{\mu}t^k. \qquad \text{(I.5.38)}$$

Në mënyrë analoge me QED, mund të derivohet ligji i transformimit për $A^k{}_{\mu}$ dhe rezultati është

$$A^k_{\mu}t^k \to \Omega(x)(A^k_{\mu}t^k + \frac{i}{g}\partial_{\mu})\Omega^{\dagger}(x). \qquad \text{(I.5.39)}$$

Tani le të shohim shndërrimin e derivatit kovariant:

$$\begin{aligned} D_{\mu}\psi &= (\partial_{\mu} - igA^k_{\mu}t^k)\psi \\ &\to \left[\partial_{\mu} - ig(\Omega(x)(A^k_{\mu}t^k + \frac{i}{g}\partial_{\mu})\Omega^{\dagger}(x))\right]\Omega(x)\psi \\ &= \left[\partial_{\mu} - ig([1+i\alpha^k t^k][A^k_{\mu}t^k + \frac{i}{g}\partial_{\mu}][1-i\alpha^j t^j])\right](1+i\alpha^l t^l)\psi \\ &= \left[\partial_{\mu} - igA^k_{\mu}t^k - i(\partial_{\mu}\alpha^k)t^k + g[\alpha^k t^k, A^j_{\mu}t^j]\right](1+i\alpha^l t^l)\psi \\ &= (1+i\alpha^k t^k)D_{\mu}\psi. \end{aligned} \qquad \text{(I.5.40)}$$

Në veprimet e mësipërme zëvëndësuam $\Omega(x) = e^{i\alpha^k(x)t^k}$ në rendin e parë të përafrimit sipas $\alpha(x)$ pasi eksponenti nuk komuton me derivatin. Ky rezultat na tregon se edhe derivati kovariant ndjek të njëjtin ligj transformimi si fusha ψ. Mbas këtij përfundimi, mund të shkruajmë Langrazhianin lokal invariant kalibrues megjithë termin e bashkëveprimit:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\ \ i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m\ \ \psi - \frac{1}{4}(F^k_{\mu\nu})^2. \qquad \text{(I.5.41)}$$

Tani mund të tregojmë invariancën lokale kalibruese të tenzorit të fushës $F^k_{\mu\nu}$ duke llogaritur komutatorin e dy derivateve kovariantë

$$\begin{aligned}\left[D_\mu, D_\nu\right] &= \left[\partial_\mu - igA^k_\mu t^k, \partial_\nu - igA^j_\nu t^j\right] \\ &= -ig(\partial_\mu A^k_\nu t^k - \partial_\nu A^k_\mu t^k - ig\left[A^k_\mu t^k, A^j_\nu t^j\right]) \\ &= -ig(\partial_\mu A^k_\nu - \partial_\nu A^k_\mu t + gf^{kjl} A^j_\mu A^l_\nu) t^k \\ &= -igF^k_{\mu\nu} t^k,\end{aligned} \tag{I.5.42}$$

ku kemi shfrytëzuar relacionet komutuese të matricave të Gell-Mann:

$$\left[t^i, t^j\right] = if^{ijk} t^k, \tag{I.5.43}$$

ku f^{ijk} është një strukturë numrash konstante, është ekuivalent me ε_{ijk} të grupit $SU(2)$. Kështu tenzori i fushës për kromodinamikën kuantike bëhet:

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu - gf^{ijk} A^j_\mu A^k_\nu. \tag{I.5.44}$$

Kjo paraqitje tregon qartë *se kjo madhësi nuk është më një madhësi invariant kalibruese*, pasi për shkak të termit të fundit komutatori nuk bëhet zero. Ka kështu *8 tenzorë të fushës* dhe secili lidhet me një rrotullim të dhënë në një hapsirë abstrakte. Si dendësi të Langrazhianit, merret përfundimisht gjurma:

$$\mathcal{L}_{kinetic} = -\frac{1}{2} tr\left[(F^k_{\mu\nu} t^k)^2\right] = -\frac{1}{4}(F^k_{\mu\nu})^2 \tag{I.5.45}$$

Nga përcaktimi i tenzorit të fushës, është e qartë Langrazhiani përmban terma kubik dhe kuadratike të A^i_μ. Si rrjedhim bashkëveprimi ndryshon nga ai në QED. Natyra e QCD është jo lineare. Pas përcaktimit të Langrazhianit të QCD-së shohim në vijim si bëhet kuantizimi i një teorie të tillë.

1.5.3 Formalizmi i integralit të udhëve.

Integrali i udhëve është rruga e duhur për të realizuar kuantizimin. Në mekanikën klasike një udhë në planin hapësirë-kohë përshkruan lëvizjen e një grimce. Në mekanikën kuantike të gjitha udhët janë të rëndësishme në përcaktimin e lëvizjes së një grimce dhe përhapësi jepet nga relacioni:

$$\begin{aligned}K &= \int dx_1 ... dx_N \exp(iS[x(t), \dot{x}(t)]) \\ &= \int Dx(t) \exp(iS[x(t), \dot{x}(t)]).\end{aligned} \tag{I.5.46}$$

Ky relacion i përhapësit, tregon se një grimcë që lëviz nga një pozicion në një tjetër, merr virtualisht të gjitha rrugët e mundshme midis këtyre dy pikave. Analogu i përhapësit në teorinë kuantike të fushës jepet nga relacioni:

$$\begin{aligned} K &= \int d\psi_1 ... d\psi_N \exp(iS[\psi]) \\ &= \int D\psi \exp(iS[\psi]), \end{aligned} \tag{I.5.47}$$

ku S është funksioni i veprimit të fushës dhe gjendet nga

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi). \tag{I.5.48}$$

Ideja e integralit të udhëve "huazohet" nga mekanika statistike. Një integral udhësh shkruhet si një integral statistikor:

$$Z = \sum_j \exp(\beta E_j), \tag{I.5.49}$$

(ku *j* tregon konfiguracionet e spineve) i cili përbën objektin qëndror të mekanikës statistike. "Huazimi" mund të bëhet nëpërmjet rrotullimit të Wick, ku kalohet nga koha reale τ në kohë imagjinare $t = i\tau$ dhe rrotullohet konturi i integrimit ndërsa funksioni i veprimit bëhet

$$S = iS_E. \tag{I.5.50}$$

Kështu, funksioni gjenerues mund të shkruhet tani si integral statistikor

$$Z = \int D\psi \exp(-S_E[\psi]), \tag{I.5.51}$$

i llogaritur duke i lidhur çdo udhe një peshë statistikore e^{-S_E} ku S_E është funksioni i veprimit Euklidian i marrë prej funksionit të veprimit të zakonshëm të Minkovskit me një rrotullim të Wick-ut. Le të shkojmë një hap më tej dhe të shohim pritjen matematike të një produkti të renditur të operatorëve të Heisenberg-ut (i cili njihet si funksioni i Green-it ose si funksion korrelacioni) që shprehen si $\left\langle 0 \mid T\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)...\hat{\phi}(x_n) \mid 0 \right\rangle$. *Funksionet e Green-it lidhen me amplitudat e proceseve fizike* si proceset e shpërhapjes dhe zbërthimeve. Shprehim se si llogaritet p.sh funksioni i korrelacionit të dy variablave nëpërmjet integralit të udhëve.

$$\left\langle 0 \mid T\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2) \mid 0 \right\rangle = \frac{\int D\psi \hat{\phi}(t_1)\hat{\phi}(t_2) \exp(iS[\psi])}{\int D\psi \exp(iS[\psi])}. \tag{I.5.52}$$

Pritshmëria e një variabli fushe gjendet nga

$$\left\langle 0 \mid \hat{\phi}(x_1) \mid 0 \right\rangle = \frac{\int D\psi \hat{\phi}(t_1) \exp(iS[\psi])}{\int D\psi \exp(iS[\psi])}. \tag{I.5.53}$$

Aplikojmë përsëri rrotullimin e Wick-ut dhe marrim:

$$\left\langle 0 \mid T\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2) \mid 0 \right\rangle = \frac{\int D\psi \hat{\phi}(t_1)\hat{\phi}(t_2)\exp(-S_E[\psi])}{\int D\psi \exp(-S_E[\psi])}, \tag{I.5.54}$$

$$\left\langle 0 \mid \hat{\phi}(x_1) \mid 0 \right\rangle = \frac{\int D\psi \hat{\phi}(t_1)\exp(-S_E[\psi])}{\int D\psi \exp(-S_E[\psi])}. \tag{I.5.55}$$

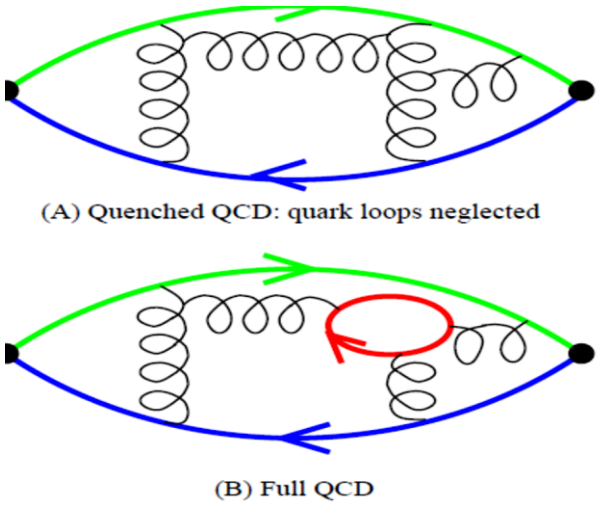
Deri tani gjithçka është teori fushe. *Problemi që ndeshet në QCD është praktikisht si të llogariten këto vlera të pritshme dhe si të nxjerrësh madhësi fizike prej tyre.* Pikërisht, këtu merr nismë një formulim i ri i teorisë QCD, i cili do ishte në gjëndje t'i jepte zgjidhje problemeve të mësimëperme llogaritëse. Ky formulim quhet Kromodinamika Kuantike Rrjetore e cila trajtohet në kapitullin vijues.

KAPITULLI 2

KROMODINAMIKA KUANTIKE NË RRJETË

QCD siç u tha dhe më sipër është teoria e bashkëveprimeve të forta të kuarkeve dhe gluoneve. Problemi llogaritës është se QCD është një teori jolineare që nuk mund të zgjidhet analitikisht. Ndonëse për teorinë kuantike të fushës të forcave të dobta si ato elektromagnetike, përafrimet që përdorin zbërthimet perturbative sipas forcës së bashkëveprimit japin rezultate shumë të sakta, bashkëveprimi në QCD është shumë i fortë dhe përafrimet perturbative nuk kanë dobi për energji të ulta. Kjo çon në futjen e një përafrimi *jo-perturbativ* të bazuar në diskretizimin e hapësirë-kohës në një rrjetë të fundme, duke çuar në një formalizim të ri teorik të quajtur QCD-rrjetore, e cila mund të simulohet në kompjuter. Kështu, për regjime jo-perturbative metoda më e mirë e njohur sot për sot për studimin dhe ”zgjidhjen” e kësaj teorie është metoda llogaritëse e QCD -së rrjetore (Lattice QCD - LQCD). U propozua nga Wilson (1974) si një zgjidhje joperturbative e energjive të ulta të QCD, duke diskretizuar hapësirë-kohën katërpërmasore në një rrjetë hiper-kubike me gjeometri Euklidiane (Montvay & Münster, 1997), (Creutz, 1985), (Smit, 2002), (Rothe, 2005). Duke patur vetëm një numër të fundëm të nyjeve të rrjetës, madhësitë fizike mund të llogariten numerikisht duke zgjidhur një integral të rendeve të larta me metodat Monte Carlo (Creutz, 1980), (Barkai et.al., 1984). Ky formulim i teorisë QCD në një hapësirë diskrete fut natyrshëm një moment kufizues (”cut off”) të rendit a^{-1}, ku a është distanca rrjetore, e cila rregullon teorinë. Si rezultat, QCD-ja rrjetore është e përcaktuar shumë mirë matematikisht duke zhdukur kështu infinitetet e teorisë.

Sipas formulimi rrjetor të teorisë QCD, në nyjet e rrjetës vendosen fushat e kuarkeve dhe në lidhjet bashkuese të tyre fushat gluonike. Një prej problemeve më të mëdha në zgjidhjen e QCD-së rrjetore në kompjuter është se simulimi i bashkëveprimit midis kuarkeve kërkon llogaritjen e përcaktorit të një matrice e cila ka kosto jashtëzakonisht të madhe kompjuterike. Nga pikëpamja fizike, ky përcaktor vjen nga dinamika e kuarkeve. Mënyra më e thjeshtë për të vazhduar me llogaritjet është ajo e neglizhimit të kësaj pjese pra dinamikës së kuarkeve dhe të punosh në përafrimin *“quenched”,(QQCD)* me vetëm shkallë lirie gluonike.



Figurë 2.1 Një ilustrim në diferencën midis QQCD dhe QCD-së së plotë . QQCD nuk ka polarizim të vakumit në vijat virtual gluonike (Gupta, 1997)

Ky është është një përafrim i pranueshëm për kuarket e rënda. Nga pikëpamja fizike, ky përafrim tregon mosmarrjen në konsideratë të efekteve polarizuese të laqeve të kuarkeve. Ndërkohë, QCD e plotë (full QCD) merr parasysh këto efekte (Figura 2.1). Pikërisht në llogaritjet tona në këtë studim do punojmë në këtë përafrim. Megjithatë, edhe mbas këtij përafrimi, nevojiten fuqi të mëdha kompjuterike.

2.1 Qëllimi i llogaritjeve të QCD-së rrjetore

Problemi me përafrimin perturbativ në trajtimin e proceseve hadronike në shkallë ≤ 1 GeV është se konstantja e çiftimeve të forta $\alpha \sim 1$. Kështu, teoria perturbative nuk mund të përdoret në këto rende. Si rrjedhim nuk mund të llogarisim masën e grimcave si mezoneve dhe barioneve prej QCD edhe pse njohim vlerat e α dhe të masave. Simulimet në QCD-në rrjetore kanë gjashtë parametra hyrës të panjohur. Këto janë konstantja e çiftimit dhe masat e kuarkeve *up*, *down*, *strange*, *charm* dhe *bottom* (kuarku *top* jeton shumë pak, 0.4×10^{-24} sekonda). Shumë prej studimeve të kryera në QCD-në rrjetore janë fokusuar në llogaritjen e masave (vetive të tyre) të një numri të madh hadronesh (Gattringer *et al.*, 2009), (Hoelbling, 2011), të cilat janë matur në eksperimentet e energjive të larta. Llogaritje të tjera gjithashtu kanë përcaktuar veti të QCD në temperaturë të fundme (jo-zero). Këto llogaritje, kanë modeluar kushtet e lëndës në etapat e hershme të Universit, fill pas Big-Bang-ut.

QCD-ja rrjetore ka si qëllim dhe bën të mundur studimin e disa prej fenomeneve të energjive të ulta si:

- mbyllësinë e kuarkeve
- spektrin e hadroneve

- thyerjen spontane të simetrisë kirale
- vakumin e QCD

Futja e rrjetës është e vetmja mënyrë e njohur për të pasur një proçedurë rinormimi invariant-kalibruese dhe jo-perturbative. Integrali i udhëve mund të përcaktohet plotësisht dhe të llogaritet numerikisht në rrjetë, ndërkohë rinormimi lejon të nxjerrësh rezultate të teorisë së vazhduar prej të dhënave rrjetore. Për trajtimin e QCD-së në rrjetë duhet të diskretizohet hapësirë-koha dhe funksioni i veprimit të saj për tu përshtatur në një rrjetë me kushte kufitare periodike. Kuarket lokalizohen në nyjet e rrjetës si fusha fermionike ψ ndërsa fushat gluonike vendosen në lidhjet midis nyjeve të rrjetës si lidhje kalibruese U. Studimi i teorisë së vazhduar çon në llogaritjen e një integrali 4-përmasor të pafundëm sipas të gjithë konfiguracioneve të mundshme kalibruese. Ky quhet ndryshe dhe një integral i udhëve i Feynman-it. Meqënëse ky integral nuk mund të llogaritet numerikisht duhen gjetur teknika në mënyrë që të vlerësohen vlerat e pritshme të madhësive fizike. Për këtë qëllim QCD-ja rrjetore përdor metodat Monte Carlo të cilat përmbajnë teknika si përzgjedhja e konfiguracioneve të rëndësishme me qëllim zgjidhjen e këtyre integraleve.

Ka disa avantazhe që favorizojnë studimin e versionit rrjetor të QCD-së krahësuar me atë të vazhduar si:

- QCD-ja rrjetore është rregulluar në mënyrë të natyrshme nga rrjeta, pra ajo nuk përmban infinitete siç gjenden në teorinë e vazhduar.
- Rezultatet jo-perturbative të marra prej QCD-së rrjetore i japin përgjigje pyetjeve fizike ku llogaritjet perturbative nuk munden

2.2 Formulimi rrjetor

Pikënisja për një formulim rrjetor të teorisë kuantike të fushës, është formalizmi i integralit të udhëve në hapësirë-kohën Euklidiane (Dyson, 1949), (Wick, 1954). Nisemi nga funksioni i veprimit të kontinumit të QCD. QCD siç u tha, është një teori Yang-Mills me grup kalibrimi SU(3). Funksioni i veprimit të së cilës shprehet

$$S_{QCD}[\psi,\overline{\psi},A] = S_F^f[\psi,\overline{\psi},A] + S_G[A] \qquad \text{(II.2.1)}$$

me pjesën fermionike

$$S_F^f[\psi,\overline{\psi},A] = \sum_f \int d^4x \overline{\psi}^{(f)}(i\gamma^\mu D_\mu + m^{(f)})\psi^{(f)} \qquad \text{(II.2.2)}$$

ku indeksi f tregon aromat e ndryshme të kuarkeve (flavor) dhe si term të fushës kalibruese (gauge):

$$S_G[A] = -\frac{1}{2g^2}\int d^4x \quad tr[F_{\mu\nu}(A)F^{\mu\nu}(A)], \qquad \text{(II.2.3)}$$

ku derivati kovariant shprehet

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu(x) \tag{II.2.4}$$

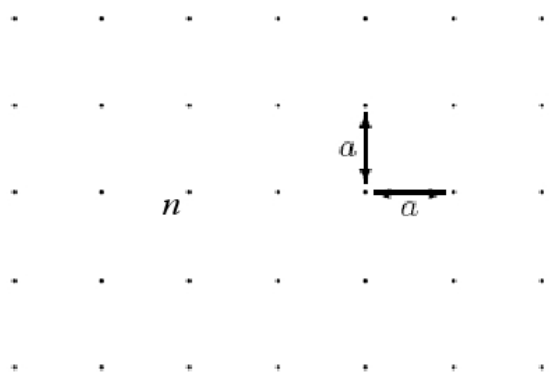
dhe tenzori i fushës është:

$$F_{\mu\nu}(A) = -i[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + i[A_\mu(x), A_\nu(x)]. \tag{II.2.5}$$

Përcaktojmë një rrjetë hiperkubike 4-përmasore

$$\Lambda = \{n = n_1, n_2, n_3, n_4 \mid n_1, n_2, n_3 \in \{0, ..., N-1\}; n_4 \in \{0, ..., N_T - 1\}\}, \tag{II.2.6}$$

të përbërë prej N nyjesh në çdo drejtim hapësinor dhe N_T sipas drejtimit euklidian kohor. Nyjet fqinje ndahen prej një distance a të quajtur *distancë ose konstante rrjetore* (Figura 2.2).



Figurë 2.2 Rrjetë e vogël me distancë rrjetore a

Rrjeta fut një moment kufizues *"cut off"* ultraviolet. Transformimi Fourier i funksioneve në rrjetë është periodik në hapësirën e impulseve me periodicitet $2\pi/a$, si rrjedhim impulsi reduktohet në zonën e parë të Brillouin-it

$$\mathrm{B} = \{p \mid -\frac{\pi}{a} < p_\mu \leq \frac{\pi}{a}\}, \tag{II.2.7}$$

dhe momenti kufizues është π/a. Në mënyrë që të reduktohen efektet e madhësive të fundme (*finite size effects*) dhe për të ruajtur invariancën translative, aplikohen kushte periodike. Në rrjetë, simetria rrotulluese SO(4) e teorisë (Euklidiane) reduktohet në një simetri hiperkubike, por që rimerret eventualisht në limitin e vazhduar kur $a \to 0$. Integrali vëllimor kthehet në shumë sipas nyjeve të rrjetës

$$\int d^4x \to a^4 \sum_{n \in \Lambda} . \tag{II.2.8}$$

Fushat fermionike $\psi(x)$ zëvëndësohen me një version të diskretizuar $\psi(n)$ sipas nyjeve të rrjetës. Derivati i pjesshëm zëvëndësohet prej shprehjes simetrike,

$$\partial_\mu \psi(x) \to \frac{1}{2}[\nabla_\mu^\dagger + \nabla_\mu]\psi(n) \qquad \text{(II.2.9)}$$

ku $\nabla_\mu^\dagger, \nabla_\mu$ janë operatorët e diferencave të përparme dhe të prapme, fqinje më të afërta në rrjetë,

$$\nabla_\mu \psi(n) = \frac{1}{a}(\psi(n+\hat{\mu}) - \psi(n)), \qquad \nabla_\mu^\dagger \psi(n) = \frac{1}{a}(\psi(n) - \psi(n-\hat{\mu})) \text{ (II.2.10)}$$

Fokusohemi tek formulimi në rrjetë i funksioni të veprimit fermionik dhe gluonik, dhe më pas testojmë invariancën kalibruese si për rastin e QCD së kontinumit të trajtuar më sipër. Në formulimin Langrazhian të QCD-së rrjetore, *kalohet nga hapësira e Minkovskit tek ajo Euklidiane* me anë të rrotullimit të Wick-ut (të boshtit të kohës me kënd $\pi / 2$) dhe më pas në trajtën rrjetore të tij. Kështu, nga veprimi Euklidian i një fermioni të lirë (duke fiksuar $A_\mu = 0$)

$$S_F^0[\psi, \bar{\psi}, A] = \int d^4x \quad \bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi, \qquad \text{(II.2.11)}$$

ku $D = \gamma^\mu \partial_\mu + m$ është operatori i Dirak-ut, kalojmë në paraqitjen rrjetore të këtij veprimi

$$S_F^0[\psi, \bar{\psi}, A] = a^4 \sum_{n \in \Lambda} \bar{\psi}(n) \left(\sum_{\mu=1}^{4} \gamma_\mu \frac{\psi(n+\hat{\mu}) - \psi(n-\hat{\mu})}{2a} + m\psi(n) \right). \text{(II.2.12)}$$

Ashtu si në rastin e hapësirës së vazhduar, shohim sjelljen e veprimit fermionik në paraqitjen rrjetore, ndaj një grupi transformimesh kalibruese $\Omega(n)$ të SU(3) për çdo nyje rrjete , nga ku

$$\psi(n) \to \psi'(n) = \Omega(n)\psi(n); \qquad \bar{\psi}(n) \to \bar{\psi}'(n) = \bar{\psi}(n)\Omega(n)^\dagger \quad \text{(II.2.13)}$$

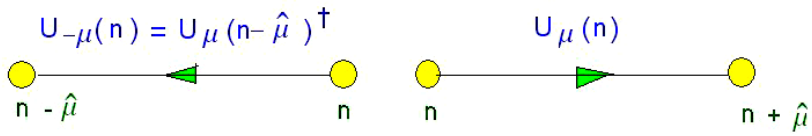
Në teorinë kalibruese rrjetore futet koncepti i fushave U_μ të cilat vendosen përgjatë rrugës që bashkon dy fusha spinore $\psi(n)$ në nyjet e rrjetës. Qëllimi i kësaj fushe është të ruajë invariancën kalibruese. Ky kufizim bën që transformimi kalibrues i fushës U_μ të shkruhet

$$U_\mu(n) \to U'_\mu(n) = \Omega(n) U_\mu(n) \Omega(n+\hat{\mu})^\dagger \qquad \text{(II.2.14)}$$

Shpesh këto fusha U_μ quhen variabla lidhës (“*link variables*”) që lidhin nyjet fqinje të rrjetës. Nga ky argumentim është e qartë se këto variabla lidhës janë të orientuar (Figura 2.3), që do të thotë

$$U_{-\mu}(n) = U_\mu(n-\hat{\mu})^\dagger \tag{II.2.15}$$

ku $\hat{\mu}$ tregon një drejtim të çfardoshëm në rrjetë dhe merr vlera $\hat{\mu} = 0,1,2,3$



Figurë 2.3 Orientimi i variablave lidhës në nyjet e rrjetës

Variablat lidhës me vetitë e tyre, përdoren për të rishkruar edhe njëherë veprimin fermionik në një fushë të jashtme kalibruese U_μ

$$S_F^0[\psi,\bar{\psi},U] = a^4 \sum_{n\in\Lambda} \bar{\psi}(n)\left(\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu \frac{U_\mu(n)\psi(n+\hat{\mu}) - U_{-\mu}(n)\psi(n-\hat{\mu})}{2a} + m\psi(n)\right), \tag{II.2.16}$$

i cili është invariant kalibrues. “*Variablat lidhës*” U_μ janë versioni rrjetor i “*transportuesve kalibrues*” $U(x,y)$ të hapsirës së vazhduar të cilët shprehen

$$U(x,y) = P\exp\left(i\int_{C_{xy}} A\cdot ds\right). \tag{II.2.17}$$

Kjo trajtë tregon se një transportues kalibrimi është udha e renditur e eksponencialit të fushës kalibruese A_μ përgjatë një vije të çfardoshme C_{xy} që bashkon dy pika *x* dhe *y*, i cili gëzon të njëjtin transformim kalibrimi. Si rrjedhim, përdorim këtë ekuivalencë për të shkruar në mënyrë eksplicite variablat lidhës si

$$U_\mu(n) = \exp(iaA_\mu(n)), \tag{II.2.18}$$

ku tani $A_\mu(n)$ janë fusha kalibruese të algjebrës SU(3). Për të kontrolluar invariancën e trajtës rrjetore të veprimit, le të zbërthejmë (II.2.18) për a të vogël

$$U_\mu(n) = I + iaA_\mu(n) + O(a^2) \qquad U_{-\mu}(n) = I - iaA_\mu^\dagger(n-\hat{\mu}) + O(a^2) \tag{II.2.19}$$

dhe të zëvëndësojmë këto shprehje tek (II.2.16) nga ku për $a \to 0$ gjejmë veprimin fermionik invariant kalibrues të hapësirës së vazhduar:

$$S_F[\psi,\bar{\psi},A] = \int d^4x \quad \bar{\psi}(\gamma^\mu(\partial_\mu + iA_\mu) + m)\psi. \tag{II.2.20}$$

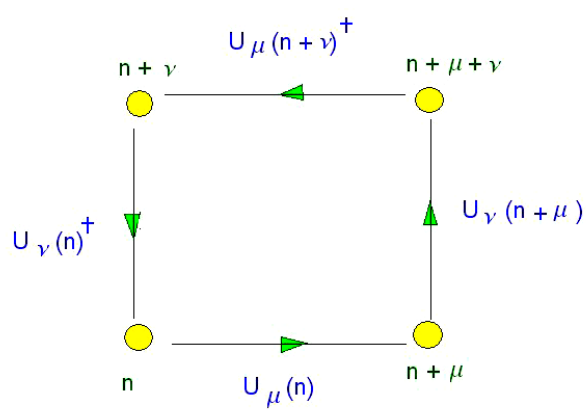
Pas trajtimit të pjesës fermionike të funksionit të veprimit, hapi i rradhës është ndërtimi i pjesës kalibruese rrjetore të veprimit. Një madhësi karakteristike invariant-kalibruese që mund të ndërtohet në rrjetë është gjurma e produktit të variablave lidhës përgjatë një laku të mbyllur P

$$L[U] = tr \left[\prod_{(n,\mu)\in \mathrm{P}} U_\mu(n) \right] \tag{II.2.21}$$

Laku më i shkurtër jo-trivial në rrjetë është *pllaka (plaquette)*, e cila përcaktohet si produkt i katër variablave lidhës:

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(n) &= U_\mu(n)U_\nu(n+\hat{\mu})U_{-\mu}(n+\hat{\mu}+\hat{\nu})U_{-\nu}(n+\hat{\nu}) \\ &= U_\mu(n)U_\nu(n+\hat{\mu})U_\mu^\dagger(n+\hat{\nu})U_\nu^\dagger(n), \end{aligned} \tag{II.2.22}$$

të ilustruar edhe në Figurën 2.4.



Figurë 2.4 Pllaka është një produkt i 4 variablave lidhës përgjatë një laku të mbyllur. Ajo paraqet lakun e mbyllur jo-trivial më të thjeshtë që mund të ndërtohet në rrjetë

Gjurma e këtij produkti është invariant kalibrues. Duke futur formën eksplicite të variablave lidhës tek shprehja për plaketën kemi:

$$U_{\mu\nu}(n) = \exp(iaA_\mu(n))\exp(iaA_\nu(n+\hat{\mu}))\exp(-iaA_\mu(n+\hat{\nu}))\exp(-iaA_\nu(n)).$$
(II.2.23)

Përdorim relacionin "*Baker-Campbell-Hausdorff",* për produktin e matricave eksponenciale

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B + \frac{1}{2}[A,B] + ...) \qquad \text{(II.2.24)}$$

dhe marrim

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(n) = \exp(&iaA_\mu(n) + iaA_\nu(n+\hat{\mu}) - \frac{a^2}{2}[A_\mu(n), A_\nu(n+\hat{\mu})] \\ &- iaA_\mu(n+\hat{\nu}) - iaA_\nu(n) - \frac{a^2}{2}[A_\mu(n+\hat{\nu}), A_\nu(n)] \\ &+ \frac{a^2}{2}[A_\nu(n+\hat{\mu}), A_\mu(n+\hat{\nu})] + \frac{a^2}{2}[A_\mu(n), A_\nu(n)] \\ &+ \frac{a^2}{2}[A_\mu(n), A_\mu(n+\hat{\nu})] + \frac{a^2}{2}[A_\nu(n+\hat{\mu}), A_\nu(n)] + O(a^3)). \end{aligned}$$
(II.2.25)

Në hapin tjetër bëjmë një zbërthim Taylor-i të fushës

$$A_\nu(n+\hat{\mu}) = A_\nu(n) + a\partial_\mu A_\nu(n) + O(a^2) \qquad \text{(II.2.26)}$$

dhe mbas zëvëndësimit të (II.2.26) tek shprehja për plaketën (II.2.25) marrim

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(n) &= \exp(ia^2(\partial_\mu A_\nu(n) - \partial_\nu A_\mu(n) + ia[A_\mu(n), A_\nu(n)]) + O(a^3)) \\ &= \exp(ia^2 F_{\mu\nu}(n) + O(a^3)). \end{aligned}$$
(II.2.27)

Trajta e fundit eksponenciale e plaketës zbërthehet

$$U_{\mu\nu}(n) = I + ia^2 F_{\mu\nu}(n) + O(a^3) - \frac{1}{2}a^4 F_{\mu\nu}^2(n) + O(a^6) \qquad \text{(II.2.28)}$$

Termat $ia^2 F_{\mu\nu}(n)$ dhe $O(a^3)$ në ekuacionin e mësipërm zhduken kur merret *pjesa reale e gjurmës së plaketës*. Mbetet vetëm termi i rendit $O(a^4)$.

$$\mathrm{Re}\, tr[I - U_{\mu\nu}(n)] = \frac{1}{2}a^4 F_{\mu\nu}^2(n) \qquad \text{(II.2.29)}$$

Kështu, veprimi kalibrues rrjetor i Wilsoni-it merr trajtën:

$$
\begin{aligned}
S_G[U] &= \frac{2}{g^2}\sum_{n\in\Lambda}\sum_{\mu\prec\nu}\mathrm{Re}tr[I-U_{\mu\nu}(n)] \\
&= \frac{a^4}{2g^2}\sum_{n\in\Lambda}\sum_{\mu\prec\nu}tr[F_{\mu\nu}(n)^2].
\end{aligned}
\tag{II.2.30}
$$

Tani shkruajmë përfundimisht versionin rrjetor të funksionit të veprimit të plotë si

$$
\begin{aligned}
S_{LQCD}[\psi,\bar{\psi},U] &= S_F[\psi,\bar{\psi},U]+S_G[U] \\
&= a^4\sum_{n\in\Lambda}\bar{\psi}(n)\left(\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\frac{U_\mu(n)\psi(n+\hat{\mu})-U_{-\mu}(n)\psi(n-\hat{\mu})}{2a}+m\psi(n)\right) \\
&+\frac{2}{g^2}\sum_{n\in\Lambda}\sum_{\mu\prec\nu}\mathrm{Re}\ \ tr[I-U_{\mu\nu}(n)].
\end{aligned}
\tag{II.2.31}
$$

Këtë veprim e përfshijmë tek përkufizimi i funksionit të korrelimit të një operatori dhe marrim

$$
\left\langle O_2(t)O_1(0)\right\rangle = \frac{\int D[\psi,\bar{\psi}]D[U]e^{-S_F[\psi,\bar{\psi},U]-S_G[U]}O_2[\psi,\bar{\psi},U)]O_1[\psi,\bar{\psi},U]}{\int D[\psi,\bar{\psi}]D[U]e^{-S_F[\psi,\bar{\psi},U]-S_G[U]}}
\tag{II.2.32}
$$

si dhe shprehjen ekuivalente për pritshmërinë e një madhësie fizike që lidhet me këtë operator

$$
\left\langle O\right\rangle = \frac{\int D[\psi,\bar{\psi}]D[U]e^{-S_F[\psi,\bar{\psi},U]-S_G[U]}O[\psi,\bar{\psi},U]}{\int D[\psi,\bar{\psi}]D[U]e^{-S_F[\psi,\bar{\psi},U]-S_G[U]}}
\tag{II.2.33}
$$

Emëruesi i kësaj shprehje luan rolin e integralit statistik për shkak të ngjashmërisë së tij me mekanikën statistike. Implementimi i QCD-së në formalizmin e integralit të udhëve realizohet si një integral sipas të gjithë konfiguracioneve të fushës. Masat e integrimit të udhëve janë produkte të masave të integrimit të të gjithë kompenenteve të fushave të kuarkeve dhe produkte të atyre të fushave kalibruese lidhëse .

$$
D[\psi,\bar{\psi}] = \prod_{n\in\Lambda}\prod_{f,\alpha,c}d\psi^{(f)}(n)_{\alpha,c}\quad,\quad D[U]=\prod_{n\in\Lambda}\prod_{\mu=1}^{4}dU_\mu(n).
\tag{II.2.34}
$$

Fushat fermionike i binden parimit të Paulit, si rrjedhim spinorët shikohen si variabla antikomutues duke iu referuar numrave të Grasmanit dhe vetë numrat e Grasmanit kanë rregullat e tyre specifik të integrimit. Nga ana tjetër, masa e integrimit e fushave kalibruese $dU_\mu(n)$ shihet si masa e integrimit e Haar-it, e cila përshkruan integrimin sipas një grupi (Gattinger & Lang, 2009).

2.3 Integrimi i Grasmann-it

Nga sa u përmend më sipër, fushat fermionike nuk janë numra të zakonshëm. Për më tepër ψ dhe $\overline{\psi}$ janë variabla anti-komutues të ashtuquajturat variabla të Grassmann-it

$$\{\psi_i, \psi_j\} = 0, \quad \{\overline{\psi}_i, \overline{\psi}_j\} = 0, \quad \{\overline{\psi}_i, \psi_j\} = 0. \tag{II.3.1}$$

Integrimi sipas variablave anti-komutues kryhet:

$$d\psi_i d\overline{\psi}_j = -d\overline{\psi}_j d\psi_i, \tag{II.3.2}$$

$$\int d\psi_i = 0 \quad , \quad \int d\psi_i \psi_i = 1. \tag{II.3.3}$$

Një transformim në masat e integrimit do prodhonte

$$\begin{aligned} \int d^N\psi \quad \psi_1\psi_2...\psi_N &= \int d^N\psi \quad \psi_1'\psi_2'...\psi_N' \\ &= \det[M] \int d^N\psi \quad \psi_1\psi_2...\psi_N \end{aligned} \tag{II.3.4}$$

ku *M* përfaqson operatorin e Dirac-ut në rrjetë. Të gjithë këto relacione mund të përdoren për të derivuar formula për integralet Gaussiane me numrat e Grassmann-it. Një nga formulat më të rëndësishme është formula *Matthews-Salam*

$$\int d^N\psi d^N\overline{\psi} \exp\left(\sum_{i,j}^{N} \overline{\psi}_i M_{ij} \psi_j\right) = \det[M] \tag{II.3.5}$$

Aplikimi i formulës *Mathews-Salam,* konverton një integral statistik në një integral sipas numrave të thjeshtë

$$\begin{aligned} Z &= \int D[\psi, \overline{\psi}] D[U] e^{-S_F[\psi, \overline{\psi}, U] - S_G[U]} \\ &= \int D[\psi, \overline{\psi}] D[U] e^{-\overline{\psi} M[U] \psi - S_G[U]} \\ &= \int D[U] \det[M] e^{-S_G[U]}. \end{aligned} \tag{II.3.6}$$

Ky tashmë është një integral numerik, si rrjedhim në parim është i manipulueshëm me metoda Monte Carlo n.q.se $\det M \geq 0$. Për shkak të përmasave të mëdha të matricës M, nuk është e mundur të bëhet zgjidhja direkte me metodat Monte Carlo. Matrica M ka dimensionet e (*komponenteve të Dirac-ut)* x (*numrin e brëndshëm të shkallëve të lirësë-ngjyrës) x* (*nyjet e rrjetës*) pra

$$\dim(M) = 4 \times 3 \times N_1 N_2 N_3 N_4 = 12 N_1 N_2 N_3 N_4 \tag{II.3.7}$$

ku N_1, N_2, N_3, N_4 janë nyjet sipas çdo drejtimi në rrjetë. Ka disa mënyra për të punuar me këtë përcaktor (Creutz, 1989), (Gattinger & Lang, 2009).

2.4 Masa e integrimit të Haar-it

Meqënëse, një transformim kalibrues i variablave lidhës e le veprimin kalibrues invariant, pra

$$S_G[U'] = S_G[U] \tag{II.4.1}$$

ky fakt nënkupton gjithashtu se integrali i udhëve duhet të jetë invariant ndaj transformimit të variablave lidhës

$$Z = \int D[U] e^{-S_G[U]} = \int D[U'] e^{-S_G[U']} = \int D[U'] e^{-S_G[U]} \tag{II.4.2}$$

nga ku del që $D[U] = D[U']$. Kështu marrim një masë integrimi invariante. Për grupet kompakte masa e integrimit është invariant kaliburese dhe kënaq kushtin:

$$dU = d(UV) = d(VU), \tag{II.4.3}$$

ku V është një element arbitrar i grupit. Kjo mund të përdoret për të përcaktuar disa veti të masës së integrimit të quajtur ndryshe dhe masa e Haar-it

$$\int dU f(U) = \int d(U) f(UV) = \int dU f(VU), \tag{II.4.4}$$

ku $f(U)$ është një funksion arbitrar i grupit. Për më tepër masa e integrimit normohet në mënyrë të tillë që

$$\int dU \cdot I = 1 \tag{II.4.5}$$

Ky përshkrim kompleton përcaktimin e teorisë kalibruese rrjetore.

2.5 Rinormimi dhe limiti i vazhduar

Ashtu siç u trajtua në seksionin (1.3.6), liria asimptotike është një tipar dallues i teorisë që përshkruan bashkëveprimet e forta, kromodinamikës kuantike. Nga një këndvështrim ky tipar jep mundësinë e llogaritjeve perturbative në limitin e energjive të larta, por nga ana tjetër, kjo veçori e QCD-së ka interes të konsiderueshëm edhe në teorinë kalibruese rrjetore. Me të vertetë, liria asimptotike na ndihmon në mënyrë mjaft të saktë si të merret limiti i vazhduar i teorisë rrjetore. Ky seksion rishikon shkurtimisht grupin e rinormimit dhe lidhjen e rëndësishme me rrjetën.

2.5.1 Rinormimi i konstantes së çiftimit

Në nivelin e diagramave të Feynman, teoria kuantike relativiste është shumë mirë e përcaktuar dhe nuk kërkon rinormim. Megjithatë për sa kohë ndeshen korigjime laqesh, do të shfaqen divergjenca që mund të hiqen me anë të një skeme rregulluese. Në

përgjithësi teoria pastaj do të varej nga një moment "cut-off", i cili mund të hiqej me një rregullim të njëkohshëm të parametrave "të zhveshur" ndërkohë që madhësitë fizike mbahen të fundme. Për shembull, konsiderojmë një cut-off rrjetor me parametër a. Masa e protonit m_p është një madhësi fizike e fundme, dhe në rrjetë do të bëhet, një funksion i panjohur i cutoff-it a, konstantes së çiftimit g dhe masës së zhveshur së kuarkeve. Në rastin kur masa e kuarkeve shkon në zero, masa e protonit pritet të qëndrojë e fundme, kështu për të thjeshtuar idenë le të marrim rastin pa praninë e masave të kuarkeve. Konsiderojmë kështu masën e protonit si funksion i konstantes së çiftimit dhe cutoff-it, $m_p(g,a)$. Duke mbajtur këtë funksion konstant ndërkohë që ndryshon cutoff-i, përcaktojmë varsinë e g ndaj a. Ekuacioni i mëposhtëm është ekuacioni bazë i grupit të rinormimit i trajtuar në (Creutz, 2011)

$$a\frac{d}{da}m_p\left(g(a),a\right)=0=a\frac{\partial}{\partial a}m_p(g,a)+a\left(\frac{dg}{da}\right)\frac{\partial}{\partial g}m_p(g,a). \qquad \text{(II.5.1)}$$

Me një analizë dimensionale, masa e protonit duhet të jetë e rendit a^{-1} për konstante çiftimi të fiksuar. Si rrjedhim dimë se

$$a\frac{\partial}{\partial a}m_p(g,a)=-m_p(g,a). \qquad \text{(II.5.2)}$$

Atherë, *funksioni i grupit të rinormimit*, i quajtur β - funksioni

$$\beta(g)=a\frac{dg}{da}=\frac{m_p(g,a)}{\frac{\partial}{\partial g}m_p(g,a)} \qquad \text{(II.5.3)}$$

karakterizon se si duhet të ndryshohet konstantja e çiftimit për limitin e vazhduar. Vihet re se ky përcaktim është i pavarur nga teoria perturbuese apo ndonjë vlerë fikse kalibruese. Meqënëse rinormimi nuk nevojitet për aq kohë sa nuk ndeshen laqe kuantike, β - funksioni shkon si g^3 kur konstantja e çiftimit shkon drejt zeros. Mund të përcaktohen koefiçentët perturbativë prej serisë asimpotike

$$\beta(g)=\beta_0 g^3+\beta_1 g^5+... \qquad \text{(II.5.4)}$$

Poltizer (1973), Gross (1973) dhe Wilczek (1973) morrën rezultatin për llogaritjen e koefiçentit β_0 për teoritë kalibruese jo-Abeliane, si vijon

$$\beta_0=\frac{1}{16\pi^2}\left(11\frac{N}{3}-2\frac{N_f}{3}\right) \qquad \text{(II.5.5)}$$

ku grupi kalibrues është $SU(\mathrm{N})$ dhe N_f tregon numrin e aromave. Për sa kohë që $N_f<11N/2$ ky koefiçent është pozitiv. Duke pranuar se mund të arrihet një pikë ku

termi i parë dominon, të zvogëlosh cutoff-in do të thotë të zvogëlosh konstanten e çiftimit. Ky është thelbi i lirisë asimptotike, i cili nënkupton se limiti i vazhduar i parametrit rrjetor, $a \to 0$, kërkon limitin $g \to 0$. Në përgjithsi funksioni $\beta(g)$ varet nga skema rregulluese e përdorur. Për shembull ajo mund të varet nga madhësia fizike që është mbajtur e pandryshuar si dhe nga mënyra se si është impostuar cutoff-i. Le të supozojmë se ekzistojnë dy skema të ndryshme që japin varësinë e konstantës së çiftimit nga parametri rrjetor, p.sh $g(a)$ dhe $g'(a)$. Në limitin e çiftimeve të dobëta secili formulim do të reduktohej në teorinë klasike Yang-Mill, dhe si rrjedhim,

$$g' = g + cg^3 + O\left(g^5\right) \tag{II.5.6}$$

Atherë grupi i ri i funksioneve të rinormimit do të kishte formën:

$$\begin{aligned} \beta'(g') &= a\frac{dg'}{da} = \frac{\partial g'}{\partial g}\beta(g) \\ &= \left(1+3cg^3\right)\left(\beta_0 g^2 + \beta_1 g^3\right) + O(\mathrm{g}^5) \\ &= \beta_0 g'^3 + \beta_1 g'^3 + O(\mathrm{g}'^5). \end{aligned} \tag{II.5.7}$$

Grupi i funksioneve të rinormimit përcakton se sa shpejt zvogëlohet konstantja e çiftimit me cutoff-in. Duke ndarë variablat e ekuacionit diferencial (II.5.7),

$$d\left(\log(a)\right) = \frac{dg}{\beta_0 g^3 + \beta_1 g^5 + O(\mathrm{g}^7)}, \tag{II.5.8}$$

mund të marrim nga integrimi

$$\log\left(a\Lambda_{QCD}\right) = -\frac{1}{2\beta_0 g^2} + \frac{\beta_1}{\beta_0^2}\log(g) + O\left(g^2\right) \tag{II.5.9}$$

ku Λ_{QCD} është një konstante integrimi. Barazimi i fundit tregon menjëherë se distanca rrjetore zvogëlohet eksponencialisht në inversin e konstantes së çiftimit

$$a = \frac{1}{\Lambda_{QCD}} e^{-1/2\beta_0 g^2} g^{-\beta_1/\beta_0^2}\left(1 + O\left(g^2\right)\right). \tag{II.5.10}$$

Nga ku

$$g^2 \sim \frac{1}{2\beta_0 \log\left(1/\Lambda_{QCD} a\right)} \tag{II.5.11}$$

tregon se liria asimptotike rezulton në faktin se konstantja e çiftimit shkon në zero logaritmikisht me distancën rrjetore në limitin e vazhduar. Konstantja e integrimit Λ_{QCD} fiksohet në varësi të shkallës së madhësisë të përdorur për shkallën fizike. Në trajtimin e

mësipërm kjo madhësi ishte masa e protonit. Masa m e një grimce fizike, për shembull ajo e protonit e përdorur më sipër, është e lidhur me një gjatësi korrelimi inverse në analogjinë statistike të teorisë. Duke matur këtë gjatësi korrelimi në njësi rrjetore, mund të marrim një kombinim pa njësi $\xi = 1/am$. Në limitin e vazhduar kjo gjatësi korrelimi divergjon. Duke shumëzuar barazimin (II.5.10) me masën m marrim relacionin që tregon se si kjo divergjencë varet nga konstantja e çiftimit

$$ma = \xi^{-1} = \frac{m}{\Lambda_{QCD}} e^{-1/2\beta_0 g^2} g^{-\beta_1/\beta_0^2} \left(1 + O\left(g^2\right)\right) \qquad \text{(II.5.12)}$$

Përfundimisht, në qoftë se dimë se si divergjon një gjatësi korrelimi e një sistemi statistik me konstanten e çiftimit që shkon në zero, mund të përcaktojmë masën e grimcës në njësi të Λ_{QCD}.

2.6 Fermione kirale në rrjetë

Kiraliteti është një tipar i rëndësishëm që manifeston teoria e QCD-së. Simetria kirale është veti e rëndësishme fizike e cila duhet të reflektohet në formën e diskretizuar të operatorit të Dirakut në rrjetë. Kështu, insistohet të ndërtohet në rrjetë një teori fermionike kirale, pasi teoritë rrjetore me kuarke kirale përbëjnë një teknikë të saktë për të studjuar fizikën e bashkëveprimeve të forta. Simetria kirale është ekzakte kur masat e fermioneve janë zero. Matematikisht, fermionet janë kirale kur operatori i Dirakut plotëson kushtin:

$$\{D, \gamma_5\} = 0. \qquad \text{(II.6.1)}$$

Me operatorin e Dirakut $D = \gamma^\mu \partial_\mu + m$, thyhet në mënyrë eksplicite simetria kirale pasi masat e zhveshura të kuarkeve m_u dhe m_d, ndonëse shumë të lehta, janë të ndryshme nga zero, pra

$$\{D, \gamma_5\} = \{\gamma^\mu \partial_\mu + m, \gamma_5\} = 2m\gamma_5 \neq 0 \qquad \text{(II.6.2)}$$

Nga ana tjetër, nëse shprehim në hapësirën e impulseve diskretizimin naiv të operatorit të Dirac-ut në rrjetë, kemi

$$aD^{naiv}(p) = \sum_\mu i\gamma_\mu \sin ap_\mu \qquad \text{(II.6.3)}$$

ku për shkak të distancës rrjetore të fundme, impulsi p_μ duhet të përcaktohet brënda zonës së Brillouin-it $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$. Në kufirin e vazhduar $a \to 0$, do kishim

$$D^{naiv}(p) \to \sum_\mu i\gamma_\mu ap_\mu. \qquad \text{(II.6.4)}$$

Mirëpo m.q.se $\sin(ap_\mu + \pi) = -\sin ap_\mu$, ky kufi mund të përcaktohet në 16-qoshet e zonës së parë të Brillouin-it, si rrjedhim fermionet *nuk përcaktohen në mënyrë të vetme*

por rimerren 16 të tillë në kufirin e vazhduar. Ky problem njihet si *dublimi i fermioneve.* Për të zgjidhur këtë problem përpjekja e parë u bë nga Wilson. Ai propozoi shtimin e një termi të përshtatshëm tek operatori naiv i Dirakut i cili do ulte degjenerimin. Mund të shtohen terma të përshtatshëm në shprehjen rrjetore të operatorit të Dirac-ut pa e ndryshuar limitin e vazhduar. Operatori i Wilson-Dirac-ut në rrjetë do kishte tani formën

$$D^W = \frac{1}{2}\{\gamma_\mu(\nabla_\mu^\dagger + \nabla_\mu) - a\nabla_\mu^\dagger\nabla_\mu\} + m \tag{II.6.5}$$

Në hapësirën e impulseve ky operator mund të shkruhet

$$aD^W(p) = \sum_\mu i\gamma_\mu \sin ap_\mu + \sum_\mu (1 - \cos ap_\mu) \tag{II.6.6}$$

i cili në kufirin e vazhduar jepet

$$D^W(p) \to \sum_\mu i\gamma_\mu p_\mu + \sum_\mu ap_\mu^2, \tag{II.6.7}$$

dhe zgjidh problemin e degjenerimit, por thyhet në mënyrë eksplicite simetria kirale, sepse

$$\{D^W, \gamma_5\} = 2\sum_\mu (1 - \cos ap_\mu) \neq 0 \tag{II.6.8}$$

Të gjitha variantet apo zgjidhjet e mundshme për të ndërtuar një teori fermionike rrjetore pa dublantë dhe me simetri kirale u hodhën poshtë prej teoremës Nielsen-Ninomiya (Nielsen & Ninomiya, 1981).

Teoremë

Është e pamundur të formulohet në rrjetë një teori fermionike që gëzon njëkohësisht vetitë e mëposhtme:

(i) simetria kirale
(ii) lokaliteti
(iii) mungesa e dublantit
(iv) simetria kubike

Kjo teoremë mund të shfrytëzohet për të formuluar fermione kirale që cënojnë një prej simetrive të mësipërme. Lokaliteti është veti e pacënueshme sepse një teori jo lokale është e parinormueshme. Alternativa zgjidhjeje që janë propozuar janë:

- *teori fermionike me dublim minimal duke cënuar simetrinë kubike* (Boriçi, 2008)*;*
- *teori fermionike pa dublant me një thyerje të lehtë të simetrisë kirale proporcionale me konstanten e rrjetës* (Boriçi, 1999), *(*Boriçi, 2004), (Xhako & Boriçi, 2011).

Në kërkim të fermioneve kirale, në 1982, Ginsparg dhe Wilson, arritën në përfundimin se në rrjetë mund të gjëndet një operator i Dirakut që plotëson relacionin

$$\{D^N, \gamma_5\} = a \cdot D^N \gamma_5 D^N, \qquad \text{(II.6.9)}$$

i cili jep siemetri kirale ekzakte në limitin e vazhduar. Një zgjidhje e këtij ekuacioni është operatori i mbulimit i Neuberger-it.

2.6.1 Fermionet e mbulimit

Një operator kandidat që plotëson kushtin (II.6.9) është operatori i mbulimit të Neuberger-it (Neuberger, 1998). Fermionet që lidhen me operatorin e mbulimit të Neubergerit quhen fermione të mbulimit. Ky operator ka trajtën:

$$D^N = c_1 I - c_2 V, \qquad \text{(II.6.10)}$$

ku $V = A(A^+A)^{-1/2}$ është matricë unitare, I është matricë identitet dhe $A = M - aD^W$. Operatori i mbulimit D^N është jo-hermitian. Këtë operator mund ta shprehim edhe në mënyrë ekuivalente me anë të funksionit shenjë,

$$D^N = c_1 I - c_2 \gamma_5 sign(H_W) \qquad \text{(II.6.11)}$$

ku $H_W = \gamma_5 (M - aD_W)$. Që funksioni shenjë të jetë jotrivial, operatori i Wilson-Dirakut duhet të jetë i papërcaktuar, pra masa e zhveshur e tij M të jetë negative, e cila merret zakonisht në intervalin (2, 0). a është distanca rrjetore, c_1 dhe c_2 janë dy konstante që përcaktohen me anë të barazimeve,

$$c_1 = \frac{1+m_q}{2}, \quad c_2 = \frac{1-m_q}{2} \qquad \text{(II.6.12)}$$

m_q është masa e kuarkeve dhe D^W është operatori i Wilson-Dirac-ut. Përparësitë e fermioneve kirale të Neuberger-it janë:

a) simetria kirale e QCD-së rrjetore është ekzakte pasi veprimi i fermioneve është invariant ndaj transformimeve kirale (Lüscher, 1998), vërejmë se relacioni i antikomutimit (II.6.9), kur kalojmë në QCD e vazhduar, pra për $a \to 0$, jep kushtin e simetrisë kirale ashtu siç duhet të jetë në hapësirë-kohën e vazhduar;
b) kemi teori fermionike pa dublantë, fermionet përcaktohen në mënyrë të vetme.

Problemet që hasen me përfshirjen në simulime të fermioneve kiralë të mbulimit lidhen me formën e komplikuar, si funksion matricor, të operatorit të Neuberger-it. *Ky operator ruan simetrinë kirale dhe formulon një teori fermionike pa dublantë, por lokaliteti i tij nuk është transparent dhe kompleksiteti llogaritës është shumë i lartë* (Neuberger, 1998), (Ginsparg & Wilson, 1982).

2.6.2 Fermionet e mureve domenore

Përpjekjet për përcaktimin e një teorie kirale jo-perturbative kanë qënë jashtëzakonisht të shumta dhe në veçanti formulimi i fermioneve kirale rrjetore ka qënë një fushë intensive kërkimi në vitet e fundit (Eichten & Preskill, 1986), (Smit, 1990). Pengesa kryesore duket se vjen pikërisht nga teorema Nielson- Ninomyia (Nielsen & Ninomiya, 1981). Sipas kësaj teoreme një prej vetive të përshkruara aty do të cënohet në një hap apo në një tjetër. Megjithatë e rëndësishme është që këto veti të rifitohen në teorinë e vazhduar. Në fakt ka shumë përpjekje të bëra në këtë drejtim si (Smit, 1990), (Golterman, 1991), (Montvay, 1992).

Një ide vërtet gjeniale në këtë drejtim u propozua nga Kaplan (Kaplan, 1992) për gjenerimin e një mode kirale në një mur domenor të krijuar si pasojë e një defekti në masë përëgjatë një dimensioni shtesë. Imagjinohet një skenar ku jetojmë në një botë 5-përmasore duke pranuar që gjatë dimensionit të pestë ka një defekt të prodhuar nga prania e një termi mase fermionike që varet vetëm prej koordinatës së pestë. Kjo do të gjeneronte një mur domenor dhe në këtë mur katër dimensional do të gjendej një modë zero kirale që udhëton përgjatë tij (Jackiw & Rebbi, 1976), (Callan & Harvey, 1985). Kaplan sugjeroi përdorimin e modelit të murit domenor për të formuluar një teori kirale në rrjetë. Në rastin e një rrjete të fundme duhet të shtojmë disa kushte periodike sipas dimensionit të pestë. Kjo çon në mënyrë të pashmangshme në një mur të dytë domenor në të cilin shfaqet një tjetër fermion (modë zero) i cili ka kiralitet të kundërt me atë në murin origjinal (njëri të majtë, tjetri të djathtë). Të dyja fermionet kanë një mbivendosje eksponenciale të vogël (Jansen,1992), (Jansen & Schmaltz, 1992).

Le të shohim më nga afër këtë ide. Imagjinojmë se bota është vërtet 5-përmasore dhe se fermioni kiral 4-përmasor vjen nga muri domenor 4-përmasor përgjatë dimensionit të pestë. Funksioni i veprimit në limitin e vazhduar për hapësirën 5-përmasore do shkruhej

$$S = \int d^4x ds \bar{\psi}\ \ x,s \left[\sum_{\mu=1}^{5} \gamma_\mu \partial_\mu - m\ \ s \right] \psi\ \ x,s\ \ . \qquad \text{(II.6.13)}$$

Koordinatat e zakonshme për $\mu = 1,...,4$ janë shënuar me x dhe përmasa e pestë me s, ku

$$m(s) = \begin{cases} m_0 & s > 0 \\ 0 & s = 0. \\ -m_0 & s < 0 \end{cases} \qquad \text{(II.6.14)}$$

Ekuacioni i lëvizjes do kishte formën

$$\left[\sum_{\mu=1}^{5} \gamma_\mu \partial_\mu - m\ \ s \right] \psi\ \ x,s\ \ = 0 \qquad \text{(II.6.15)}$$

Për të zgjidhur këtë ekuacion ndajmë variablat:

$$\psi\ \ x,s\ \ = \psi\ \ x\ \ f\ \ s \tag{II.6.16}$$

ku

$$\psi\ \ x\ \ = u\ \ p\ \ e^{ipx}. \tag{II.6.17}$$

Duke zëvëndësuar trajtën e re të fushës (II.6.17) në ekuacionin e lëvizjes:

$$\left[\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu p_\mu\right]u\ \ p\ \ f\ \ s\ \ +\left[\gamma_5\partial_s f\ \ s\ \ -m\ \ s\ \ f\ \ s\ \ \right]u\ \ p\ \ = 0 \tag{II.6.18}$$

Meqënëse $u(p)$ është fusha fermionike me masë zero:

$$\left[\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu p_\mu\right]u\ \ p\ \ = 0 \tag{II.6.19}$$

Nga ku duhet të plotësohen kushtet

$$\begin{aligned}&\gamma_5 u(p) = \pm u(p)\\ &\pm\partial_5 f(s) - m(s) f(s) = 0\end{aligned} \tag{II.6.20}$$

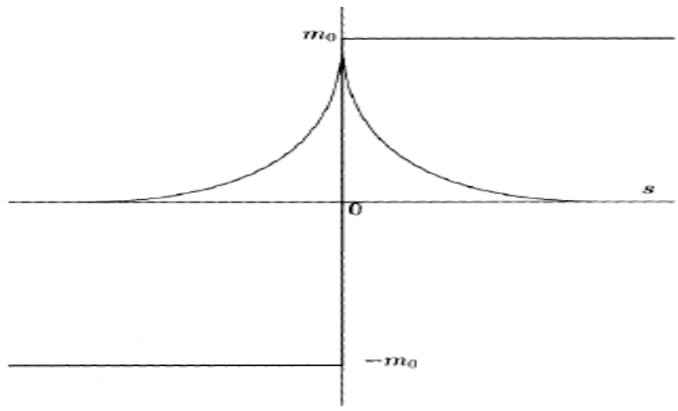
Zgjidhja e ekuacionit (II.6.20) është e trajtës

$$f(s) = C\exp\left[\pm m_0|s|\right]. \tag{II.6.21}$$

Në rastin kur $m_0 > 0$, funksioni i vetëm i normueshëm i $f(s)$ është:

$$f(s) = C\exp\left[-m_0|s|\right]. \tag{II.6.22}$$

Për këtë zgjidhje, $\gamma_5 u(p) = -u(p)$. Si rrjedhim, $u(p)$ është një *spinor pa masë i majtë.* Grafikisht funksioni (II.6.22) ka paraqitjen e Figurës 2.5.

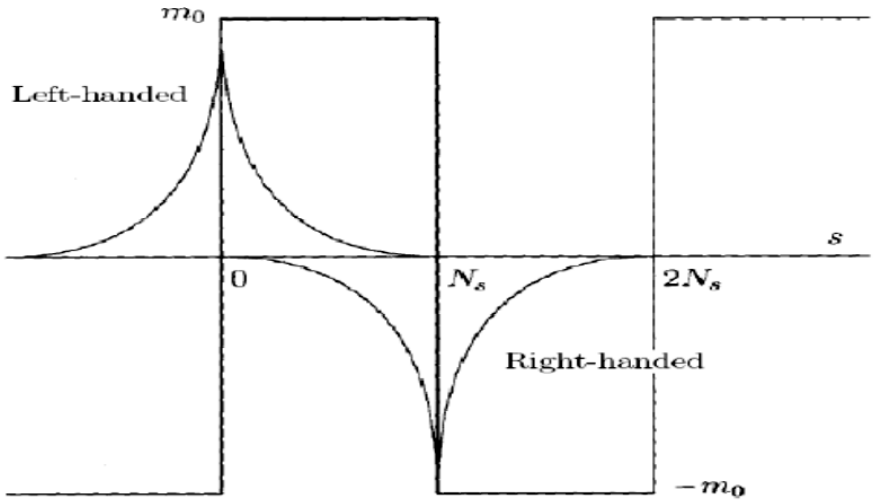


Figurë 2.5 Paraqitja grafike e funksonit të ekuacionit (II.6.22)

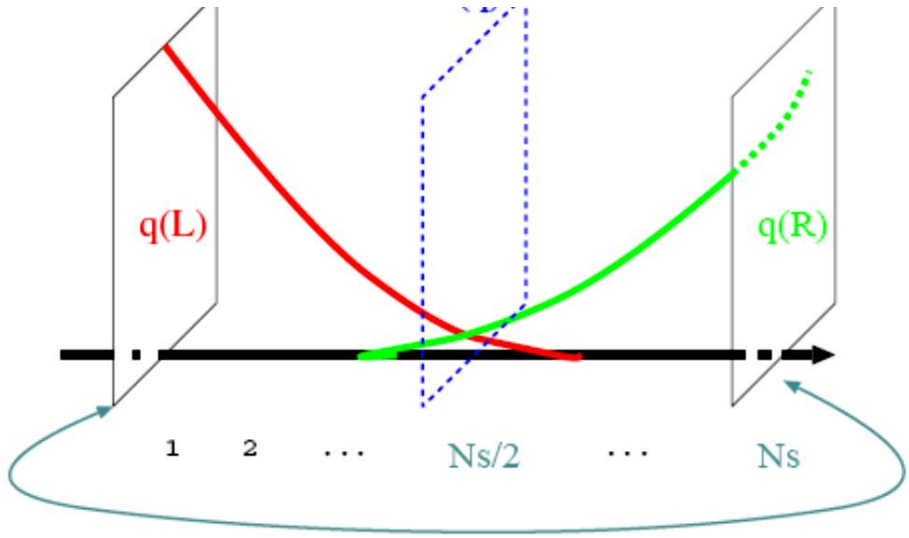
Përfundimisht mund të themi se

$$\psi \;\; x,s \;\; = u \;\; p \;\; f \;\; s \;\; e^{ipx}, \qquad \text{(II.6.23)}$$

në $s=0$ është *një fermion kiral i majtë*. Kjo është arsye pse i quajmë edhe fermione të mureve domenore. Në mnëyrë analoge në qoftë se duam një fushë fermionike të djathtë duhet të përcaktojmë $m(s) \to -m(s)$. Në Figurat 2.6 dhe 2.7 jepet paraqitja grafike e të dy rasteve.



Figurë 2.6 Paraqitja skematike e përcaktimit të fushave fermionike me kiralitet të majtë dhe të djathtë



Figurë 2.7 Mbivendosja eksponenciale e fermioneve me kiralitet të majtë dhe të djathtë

Formulimi i fermioneve të Mureve Domenore në rrjetë: Le të shohim tani formulimin rrjetor të fermioneve të mureve domenore. Do të shohim vetëm rastin kur $0 < s < N_{s+1}$. Duke zbatuar kushte periodike $\psi\ x,s=0\ =0, \psi\ x,s=N_s+1\ =0$. Në qoftë se shënojmë me $U_{n,\mu}$ fushat kalibruese përgjatë drejtimeve $\mu = 1,...,4$ dhe faktin se përgjatë dimensionit të pestë s nuk kemi fusha kalibruese, atherë funksioni i veprimit fermionik 5 –përmasor në rrjetë do shkruhej

$$S_F = \frac{1}{2}\sum_{n,s}\bar{\psi}_{n,s}\left[\gamma_\mu\ \ U_{n,\mu}\psi_{n+\mu,s} - U^\dagger_{n-\mu,\mu}\psi_{n-\mu,s}\ \ + \gamma_5\ \ \psi_{n,s+1} - \psi_{n,s-1}\ \right] - M_0\sum_{n,s}\bar{\psi}_{n,s}\psi_{n,s}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{n,s}\bar{\psi}_{n,s}\left[\sum_\mu\ U_{n,\mu}\psi_{n+\mu,s} + U^\dagger_{n-\mu,\mu}\psi_{n-\mu,s} - 2\psi_{n,s}\ \ +\ \ \psi_{n,s+1} + \psi_{n,s-1} - 2\psi_{n,s}\ \right]. \tag{II.6.24}$$

Veprimi i mësipërm mund të thjeshtohet në trajtën

$$S_F = \frac{1}{2}\sum_{n,s,\mu}\bar{\psi}_{n,s}\gamma_\mu\ \ U_{n,\mu}\psi_{n+\mu,s} - U^\dagger_{n-\mu,\mu}\psi_{n-\mu,s}$$
$$+\sum_{n,m,s,t}\bar{\psi}_{n,s}\left[MP_L + M^\dagger P_R\right]^{nm}_{st}\psi_{m,t} \tag{II.6.25}$$

ku $P_R = (1+\gamma_5)/2, P_L = (1-\gamma_5)/2$ përkufizohen si operatorët e krijimit të *kiraliteteve të djathtë* dhe *të majtë*. Ndërsa matrica M përcaktohet si

$$
\begin{aligned}
M_{s,t}^{n,m}\psi_{m,t} &= -\frac{1}{2}\left(U_{n,\mu}\psi_{n+\mu,s} + U^{\dagger}_{n-\mu,\mu}\psi_{n-\mu,s} - 2\psi_{n,s}\right) - \psi_{n,s+1} + \psi_{n,s} - M_0\psi_{n,s} \\
&= -\left(\nabla^2\psi\right)_{n,s} - \psi_{n,s+1} + \psi_{n,s} - M_0\psi_{n,s},
\end{aligned}
\tag{II.6.26}
$$

ose në trajtë matricore

$$
\mathcal{M} = \begin{pmatrix}
1-\nabla^2 - M_0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1-\nabla^2 - M_0 & -1 & 0 & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
 & & & 1-\nabla^2 - M_0 & -1 \\
0 & & & 0 & 1-\nabla^2 - M_0
\end{pmatrix}
\tag{II.6.27}
$$

Duhet të kompaktësojmë kuarket kirale të majtë dhe të djathtë si më poshtë

$$
\begin{aligned}
q_n &= P_L\psi_{n,1} + P_R\psi_{n,\mathrm{N}_s} \\
\bar{q}_n &= \bar{\psi}_{n,1}P_R + \bar{\psi}_{n,\mathrm{N}_s}P_L
\end{aligned}
\tag{II.6.28}
$$

2.6.3 Fermionet e shkurtuara te mbulimit

Ideja bazë e formulimit të fermioneve të mureve domenore (DWF) siç e pamë ishte ndarja në hapësirë sipas një dimensioni shtesë e kiraliteteve të majta dhe të djathta të përcaktuara në dy anët e kundërta të kufirit ose *murit domenor*. Përgjatë dimensionit të pestë nuk kemi fusha kalibruese. Formulimi 5-përmasor me përmasë të pestë Euklidiane N_5 i operatorit të Dirakut tani jepet si matricë me $\mathrm{N}_5\mathrm{x}\mathrm{N}_5$ blloqe operatore në 4-përmasa, si vijon:

$$
\mathcal{M}(m_q) = \begin{pmatrix}
a_5 D_W - \mathrm{I} & (a_5 D_W + \mathrm{I})P_+ & & -m_q P_- \\
P_- & a_5 D_W - \mathrm{I} & \ddots & \\
 & \ddots & \ddots & P_+ \\
-m_q P_+ & & (a_5 D_W + \mathrm{I})P_- & a_5 D_W - \mathrm{I}
\end{pmatrix}
\tag{II.6.29}
$$

ku a_5 është parametri i rrjetës sipas dimensionit të 5-të dhe $P_\pm$ janë operatorët e projeksionit të kiraliteteve të dhëna nga:

$$
P_\pm = \frac{\mathrm{I}_4 \pm \gamma_5}{2}
\tag{II.6.30}
$$

Fermionet e të tilla quhen fermione të mureve domenore ose “domain wall fermions (DWF)” (Shamir, 1998). Deri tani kemi studjuar dy formulime të mundshme për fermionet kirale, ato të mbulimit dhe fermionet e mureve domenore. *Por a janë të lidhura fermionet e mureve domenore në një farë mënyre me fermionet e mbulimit të Neuberger-it*? Për të parë këtë lidhje duhet të gjejmë fillimisht shprehjen efektive të operatorit të Dirakut, D^{N_5}, në katër përmasa. Nisemi nga fakti se masa e integrimit të operatorit D^{N_5} duhet të jetë proporcionale me masën e integrimit të operatorit 5-përmasor, pra:

$$\det D^{N_5} = \frac{\det \mathcal{M}\left(m_q\right)}{Z}, \tag{II.6.31}$$

ku Z është integrali i udhëve i teorisë 5 – përmasore i cili jepet nga masa e integrimit të operatorit 5 –përmasor me kushte kufitare anti-periodike sipas drejtimit të pestë:

$$\mathcal{M}(1) = \begin{pmatrix} a_5 D_W - \mathrm{I} & (a_5 D_W + \mathrm{I})P_+ & & -P_- \\ P_- & a_5 D_W - \mathrm{I} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & P_+ \\ -P_+ & & (a_5 D_W + \mathrm{I})P_- & a_5 D_W - \mathrm{I} \end{pmatrix} \tag{II.6.32}$$

pra

$$Z = \det \mathcal{M}(1). \tag{II.6.33}$$

Si rrjedhim,

$$\det D^{N_5} = \frac{\det \mathcal{M}\left(m_q\right)}{\det \mathcal{M}(1)}. \tag{II.6.34}$$

Kryejmë disa operacione matematikore si vijon për të llogaritur përcaktorin e operatorit 5- permasor. Le të shënojmë matricën e përkëmbimit:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P_+ & P_- & & \\ & P_+ & \ddots & \\ & & \ddots & P_- \\ P_- & & & P_+ \end{pmatrix}. \tag{II.6.35}$$

Në hapin tjetër llogarisim prodhimin matricor $\mathcal{M} \cdot \mathcal{P}$ nga ku marrim matricën:

$$\gamma_5 \begin{pmatrix} (a_5 H_W P_+ - \mathrm{I})(P_+ - m_q P_-) & a_5 H_W P_- + \mathrm{I} & & \\ & a_5 H_W P_+ - \mathrm{I} & \ddots & \\ & & \ddots & a_5 H_W P_- + \mathrm{I} \\ (a_5 H_W P_- + \mathrm{I})(P_- - m_q P_+) & & & a_5 H_W P_+ - \mathrm{I} \end{pmatrix} \tag{II.6.36}$$

Duke shumëzuar rezultatin e (II.6.36) nga e majta me të anasjelltën e matricës diagonale të mëposhtme:

$$\begin{pmatrix} a_5 H_W P_+ - \mathrm{I} & & & \\ & a_5 H_W P_+ - \mathrm{I} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_5 H_W P_+ - \mathrm{I} \end{pmatrix} \tag{II.6.37}$$

dhe duke shënuar me T matricën e transferimit që përhap gjëndjet 4 – përmasore në 5 – permasa dhe nga veprimet ka trajtën

$$T = \frac{\mathrm{I} + a_5 H_W P_-}{\mathrm{I} - a_5 H_W P_+}, \tag{II.6.38}$$

marrim përfundmisht matricën:

$$\mathcal{T}\left(m_q\right) = \begin{pmatrix} P_+ - m_q P_- & -T & & \\ & \mathrm{I} & \ddots & \\ & & \ddots & -T \\ -T(P_- - m_q P_+) & & & \mathrm{I} \end{pmatrix} \tag{II.6.39}$$

Kështu, në rastin 5 –përmasor duke kërkuar që matrica e transferimit të jetë në trajtën:

$$T = \frac{\mathrm{I} + a_5 \mathcal{H}_{\mathcal{W}}}{\mathrm{I} - a_5 \mathcal{H}_{\mathcal{W}}}, \tag{II.6.40}$$

ku $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ është paraqitja e H_W në teorinë 5 – përmasore, del thjeshtë se:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{W}} = \frac{1}{2 - a_5 D_W} H_W \tag{II.6.41}$$

Nga ku del se :

$$\det D^{N_5} = \frac{\det \mathcal{T}\left(m_q\right)}{\det \mathcal{T}\left(1\right)}. \tag{II.6.42}$$

Nga shprehja (II.6.39) përcaktori i matricës $\mathcal{T}\left(m_q\right)$ del:

$$\det \mathcal{T}\left(m_q\right) = \det[(P_+ - m_q P_-) - T^{N_5}(P_- - m_q P_+)] \qquad \text{(II.6.43)}$$

ose

$$\det \mathcal{T}\left(m_q\right) = \det[\frac{1+m_q}{2}\gamma_5(\mathrm{I}+T^{N_5}) + \frac{1-m_q}{2}(\mathrm{I}-T^{N_5})] \qquad \text{(II.6.44)}$$

Duke zëvëndësuar (II.6.44) tek (II.6.42);

$$\det D^{N_5} = \frac{\det[\frac{1+m_q}{2}\gamma_5(\mathrm{I}+T^{N_5}) + \frac{1-m_q}{2}(\mathrm{I}-T^{N_5})]}{\det[\gamma_5(\mathrm{I}+T^{N_5})]} \qquad \text{(II.6.45)}$$

nga ku shprehja për D^{N_5} ka trajtën

$$D^{N_5} = \frac{1+m_q}{2}\mathrm{I} + \frac{1-m_q}{2}\gamma_5 \frac{\mathrm{I}-T^{N_5}}{\mathrm{I}+T^{N_5}} \qquad \text{(II.6.46)}$$

Në qoftë se përdorim barazimin:

$$\frac{\left(1+x\right)^r - \left(1-x\right)^r}{\left(1+x\right)^r + \left(1-x\right)^r} = \tanh\left(\frac{r}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right), \qquad \text{(II.6.47)}$$

operatori i mësipërm mund të shkruhet në formën

$$D^{N_5} = \frac{1+m_q}{2}\mathrm{I} + \frac{1-m_q}{2}\gamma_5 \tanh\left(\frac{N_5}{2}\log\left(\frac{1-a_5\mathcal{H}_W}{1+a_5\mathcal{H}_W}\right)\right). \qquad \text{(II.6.48)}$$

Në limitin kur $N_5 \to \infty$ marrim operatorin:

$$D^{\infty} = \frac{1+m_q}{2}\mathrm{I} + \frac{1-m_q}{2}\gamma_5 sign\left(\mathcal{H}_W\right) \qquad \text{(II.6.49)}$$

duke zëvëndësuar ekuacionin (II.6.41) tek (II.6.49) përfundimisht kemi

$$D^{\infty} = \frac{1+m_q}{2}\mathrm{I} + \frac{1-m_q}{2}\gamma_5 sign\left(\frac{1}{2-a_5 D_W}H_W\right) \qquad \text{(II.6.50)}$$

Kjo do të thotë se fermionet e mureve domenore përshkruhen prej fermioneve të mbulimit të Neuberger-it vetëm në kufirin $a_5 \to 0$. Atherë cilat janë ato fermione 5-përmasore që në kufirin $N_5 \to \infty$ japin operatorin e Neuberger-it? Pikërisht këto fermione janë quajtur *fermionet e shkurtuara të mbulimit (truncated overlap fermions-TOV).* Operatori matricor ka trajtën

$$\mathcal{M}_{TOV} = \begin{pmatrix} a_5 D_W - \mathrm{I} & (a_5 D_W + \mathrm{I})P_+ & & -m_q(a_5 D_W + \mathrm{I})P_- \\ (a_5 D_W + \mathrm{I})P_- & a_5 D_W - \mathrm{I} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & (a_5 D_W + \mathrm{I})P_+ \\ -m_q(a_5 D_W + \mathrm{I})P_+ & & (a_5 D_W + \mathrm{I})P_- & a_5 D_W - \mathrm{I} \end{pmatrix} \tag{II.6.51}$$

Duke përdorur të njëjtat hapa si më lart, matrica e transferimit llogaritet të jetë

$$T = \frac{\mathrm{I} + a_5 H_W}{\mathrm{I} - a_5 H_W}, \tag{II.6.52}$$

Ndërsa në kufirin $N_5 \to \infty$ teoria efektive e fermioneve të shkurtuara të mbulimit jep fermionet e mbulimit të Neuberger-it. *Përfundimisht, fermionet e mbulimit të Neuberger-it janë të njëvlefshme me fermionet e shkurtuara të mbulimit (Truncated Overlap fermions – TOV fermions), në një formulim 5-përmasor, me përmasë të pestë Euklidiane* N_5 (Boriçi, 1999). *Nëpërmjet këtij ekuivalentimi bëhet e mundur përshtatja dhe përdorimi i rrjetave të shumëfishta (siç do të shikojmë na kapitujt vijues) sipas përmasës së pestë.*

Kështu, për të përmbyllur këtë kapitull**,** në mënyrë të përmbledhur *pikat kyçe* për të formuluar një teori rrjetore të QCD, ndjekin hapat e mëposhtme:

Hapi 1: *Përcaktimi i një sistemi me dimensione të fundme.* Veprimi Yang-Mills i fushave kalibruese dhe operatori i Dirakut për fermionet duhet të modifikohen në një rrjetë diskrete hapësirë-kohë në mënyrë të tillë që të ruajnë të gjitha vetitë bazë të QCD, si: invariancën kalibruese, simetrinë kirale, topologjinë dhe relacionet një-për një midis kontinumit dhe rrjetës. Ky është hapi më i vështirë, dhe deri më sot nuk kemi akoma një formulim rrjetor që të gëzojë simetrinë kirale në limitin kiral ($m_q \to 0$) dhe të ruajë një për një lidhjen kontinum-rrjetë, pra pa dublantë, fakt ky që lidhet me teoremën Nielson-Ninomiya, e cila konkludon se *nuk ka formulim praktik të fermioneve kirale në rrjetë.*

Hapi 2: *Gabimet e diskretizimit.* Ky problem haset kur bëhet përafrimi i derivateve me diferencat e fundme tek veprimi. Ai fut gabime të diskretizimit të përpjesshme me katrorin e distancës rrjetore. Këto gabime mund të reduktohen duke shtuar kombinime të përshtatshme operatorësh tek veprimi që të ulin gabimin rend pas rendi. Diskretizimet më të përdorura u përmendën më sipër.

Hapi 3: *Gjenerimi i fushave kalibruese.* Faktori e^{-S} tek integrali i udhëve është analog me faktorin e Boltzman-it tek mekanika statistike, pra ai interpretohet si peshë probabiliti për të gjeneruar konfiguracione. M.q.se S është një madhësi gjithëpërfshirëse rangu i saj është mjaft i madh, por shpërndarja është e lokalizuar rreth një piku me konfiguracione që minimizojnë energjinë e lirë. Konfiguracionet afër pikut dominojnë integralin funksional. Konfiguracione të tilla të rëndësishme gjenerohen me anë të metodave Monte-Carlo të zinxhirëve të Markov-it.

Hapi 4: *Llogaritja e përhapësit të kuarkeve në një mjedis të dhënë fushash kalibruese.* Për një konfiguracion të fushave kalibruese, përhapësi i Feyman-it për kuarket është një matricë me tre indekse: *nyje, spin, ngjyrë.* Një element i kësaj matrice jep amplitudën e përhapjes së një kuarku nga një nyje hapësinore-kohore me spin dhe ngjyrë të caktuar tek një tjetër. Mbas diskretizimit të hapësirë-kohës, matrica e Dirakut bëhet e fundme dhe i anasjellti i tij mund të llogaritet numerikisht. Invertimi i operatorit të Dirakut është hapi më i rëndësishëm në llogaritjet rrjetore të QCD-së dhe konsumon rreth 90% të ciklit të CPU. Për të ndërtuar funksionin e korrelimit duhet veprimi fermionik vetëm nga një nyje burim e caktuar tek të gjitha nyjet e rrjetës. Kjo korrespondon me 12 kolona (ose rreshta) të M^{-1} që lidhen me gradët e lirisë të spinit dhe ngjyrës.

Hapi 5: *Funksionet e korrelimit.* Funksionet e korrelimit shprehen si produkte të renditura të përhapësit të kuarkeve dhe fushave kalibruese duke përdorur kontraktimin e Ëick-it mbi operatorët e fushave. Ka dy lloj funksionesh korrelimi që llogariten, invariant kaliburese ose ato në një kalibrim të fiksuar.

Hapi 6: *Pritja e madhësive.* Pritja e madhësive është thjesht një mesatarizim i funksionit të korrelimit i llogaritur sipas një grupi konfigruacionesh të rëndësishëm.

KAPITULLI 3

SIMULIME NUMERIKE TË QCD-së RRJETORE

3.1 Simulime në teorinë e pastër kalibruese SU(3)

Simulimet numerike të QCD-së rrjetore në mënyrë të përgjithshme ndjekin këto hapa kryesore:

I. Gjenerimi i konfiguracioneve kalibruese
II. Llogaritja e madhësive fizike (physical observables)
III. Analizimi i madhësive të llogaritura

Simulimet numerike në teorinë e pastër kalibruese SU(3) llogarisin madhësitë fizike që lidhen vetëm me fushat kalibruese pra me "fijet" lidhëse të nyjeve të rrjetës. Ekzistojnë dy lloj madhësi invariant kalibruese të tilla që mund të ndërtohen në rrjetë.

a) Gjurma e një udhë çfardo ose "fije" lidhëse e përbërë prej produktit të renditur të variablave lidhës midis nyjeve, me fillim në nyjen e një fermioni ψ dhe me mbarim në nyjen e një antifermioni $\bar{\psi}$.
b) Laku i Wilsoni-it si gjurma e produktit të renditur të variablave lidhës sipas një udhe të mbyllur në rrjetë (rasti më i thjeshtë është pllaka). *Simulimet e teorisë së pastër kalibruese të vetmen madhësi invariant kalibruese kanë laqet e Wilson-it*. Kështu, janë ato që do merren në konsideratë për veprimin kalibrues.

Shohim si realizohet një simulim Monte-Carlo i teorisë të pastër kalibruese me grup simetrie SU(3) (Creutz, 1980), (Barkai *et. al.*, 1984), (Rothe, 2005). Funksioni i veprimit të kontinumit të fushave kalibruese siç pamë dhe në seksionet më lart ishte

$$S_G[A] = -\frac{1}{2g^2}\int d^4x \quad tr[F_{\mu\nu}(A)F^{\mu\nu}(A)]. \qquad \text{(III.1.1)}$$

Për teorinë e pastër SU(N) veprimi kalibrues i diskretizuar rrjetor (i ashtuquajturi veprimi i Wilson-it) kishte paraqitjen

$$S_G[U] = \frac{\beta}{N_c}\sum_{n\in\Lambda}\sum_{\mu\prec\nu}\mathrm{Re}\ \ tr[I - U_{\mu\nu}(n)], \qquad \text{(III.1.2)}$$

Kemi zëvëndësuar me $\beta = 2N_c \big/ g^2$, ku N_c është numri i ngjyrave, që përcakton edhe grupin e simetrisë, që për rastin e simetrisë SU(3) është $\beta = 6 \big/ g^2$. Pritshmëria e një operatori në një teori kalibruese të kuantizuar Euklidiane në rrjetë jepet nga integrali funksional

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int D[U] e^{-S_G[U]} O[U] \tag{III.1.3}$$

ku

$$Z = \int D[U] e^{-S_G[U]}. \tag{III.1.4}$$

Edhe pse variablat integrues mund të jenë të fundme, hapësira e konfiguracioneve është përsëri shumë e madhe për të bërë llogaritjen direkte. Për shembull në një rrjetë dy dimensionale 32x32 ka 1024 nyje dhe nqse do duam të llogarisim vlerën e pritshme të një madhësie fizike, do të bëhej shuma sipas të gjithë konfiguracioneve të mundshme 2048 të lidhjeve midis nyjeve. Duke konsideruar Z variablat, numri i operacioneve është $2^{2048} \sim 3\text{x}10^{600}$, që është disi larg burimeve llogaritëse kompjuterike. Kjo është arsyeja se pse këto integrale studjohen me mekanizma statistike me metoda Monte-Carlo. Në një simulim Monte-Carlo, ky integral përafrohet me një shumë të konfiguracioneve kalibruese të gjeneruara me një probabilitet

$$P[U] = \frac{1}{Z} e^{-S[U]} = \frac{e^{-S[U]}}{\int dU e^{-S[U]}} \tag{III.1.5}$$

dhe më pas llogariten

$$\bar{O} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} O[U_i] \quad , \quad \sigma_0^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N} (O[U_i] - \bar{O})^2 \tag{III.1.6}$$

në një sekuencë zinxhirësh Markovi të këtyre konfiguracioneve U_i (Rothe, 2005). Pritja e madhësisë me gabimin e përcaktuar do jepej

$$\langle O \rangle \approx \bar{O} + \frac{\sigma}{N} \tag{III.1.7}$$

Për të marrë vlera sa më të mira të madhësive që llogariten është e nevojshme që të merren sa më shumë konfiguracione. Gjenerimi i konfiguracioneve gjithashtu është një proces i rëndësishëm në simulimin e teorive kalibruese të pastra në rrjetë, të cilin do e shohim në vijim.

3.2 Gjenerimi i konfiguracioneve

Në përgjithësi është e rëndësishme të gjenerosh konfiguracione me një shpërndarje të caktuar. Një qasje efektive për të tilla gjenerime realizohet prej një procesi Markovian (Rothe, 2005). Një proces Markovi është një procedurë stokastike. Konfiguracioni i ri i krijuar varet vetëm nga konfiguracioni paraardhës. Çdo proces Markovi konvergjon në një funksion të fiksuar shpërndarjeje dhe është ergodik.

Në simulimet numerike të QCD-së punohet me të ashtuquajturit *konfiguracionet e rëndësishme*. Sipas kësaj përqasje duhet të zgjidhen për studim ato konfiguracione U të quajtura të rëndësishme, të peshuara sipas probabilitetit të dhënë prej faktorit të Boltzmann-it:

$$P[U] \propto \exp(-\beta S[U]), \tag{III.2.1}$$

ku $S[U]$ është funksioni i veprimit të konfiguracionit U. Kjo shpërndarje probabiliteti ka shumë maksimume lokale dhe dihet vendodhja e piqeve në hapësirën e konfiguracioneve.

Një proçes Markovian është një proces ku hapi i rradhës varet vetëm nga një hap më parë. Me fjalë të tjera, çdo konfiguracion gjenerohet prej konfiguracionit të mëparshëm nëpërmjet një procesi të rastësishëm me një probabilitet kalimi:

$$W(U \to U') = W(U^{t+1} = U' \mid U^t = U) \tag{III.2.2}$$

me veçori që $0 \leq W(U \to U') \leq 1$ dhe $\sum_{U'} W(U \to U') = 1$. Kalimi nga një konfiguracion i vjetër në një të ri do të çojë mbas disa hapash në një konfiguracion të shpërndarë sipas probabilitetit $P[U]$. Në ekuilibër mund të formulohet një ekuacion balance i tillë

$$\sum_U P[U]W(U \to U') = \sum_U P[U']W(U' \to U). \tag{III.2.3}$$

Ana e majtë e ekuacionit shpreh probabilitetin e plotë për të aritur në një hap Markovi me U' dhe ana e djathtë jep probabilitetin e plotë për tu larguar nga konfiguracioni U me një hap. N.q.se merret parasysh vetia $\sum_{U'} W(U \to U') = 1$ e probabilitetit të kalimit marrim

$$\sum_U P[U]W(U \to U') = \sum_U P[U']. \tag{III.2.4}$$

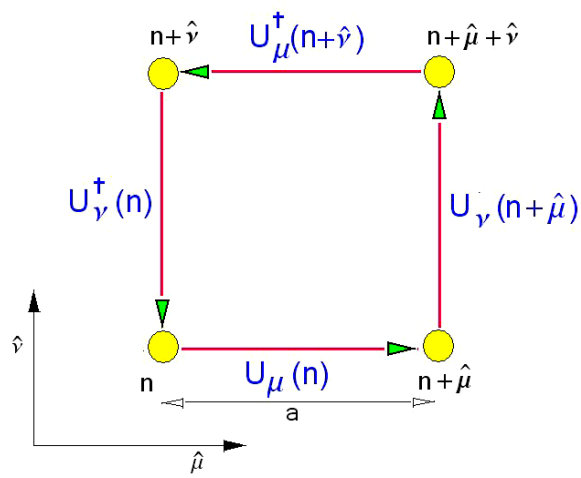
Kalimi nga një fushë kalibruese në një të re përbën një përmirësim (update) ose një hap Monte Carlo. Disa nga algoritmet e update-imit më të përdorur në simulimet numerike të QCD-së rrjetore janë algoritmi Metropolis (Metropolis *et. al.*, 1953) i propozuar nga Metropolis në 1953, metoda e banjos termike (Heat Bath) si dhe metoda e mbirelaksimit (Overrelaxation) (Rothe, 2005). Në simulimet tona përdorim algoritmin Metropolis.

3.3 Laqet e Wilson-it

3.3.1 Pllaka (“Plaquette”)

Për veprimin gluonik, është e mjaftueshme të marrësh lakun e mbyllur jo-trivial më të shkurtër të mundshëm në rrjetë. Ky lak është një lak Wilsoni 1×1, i quajtur ndryshe pllakë dhe përdoret për të llogaritur veprimin kalibrues ose atë që shpesh quhet veprimi i Wilson-it. Pllaka është produkti i variablave lidhës “*link variables*” që gjëndet siç treguam në seksionin (2.2) nga ekuacioni (II.2.22). Për të marrë një madhësi *invariant kalibruese* duhet të bëhet produkti i renditur i këtyre variablave lidhës sipas një laku të mbyllur dhe pastaj gjurma e tij. Kështu p.sh mund të marrim gjurmën e pllakës për të marrë një madhësi invariant kalibruese. N.qse kemi një rrjetë 4-dimensionale me *n*-nyje atëherë përftohen $6\cdot n$ pllaka. Vlera që marrim është mesatarja e tyre. Për më tepër për ta normuar atë duhet pjestuar me 3, pasi variablat tonë lidhës janë elementë të SU(3). Kështu pllaka do kishte formën:

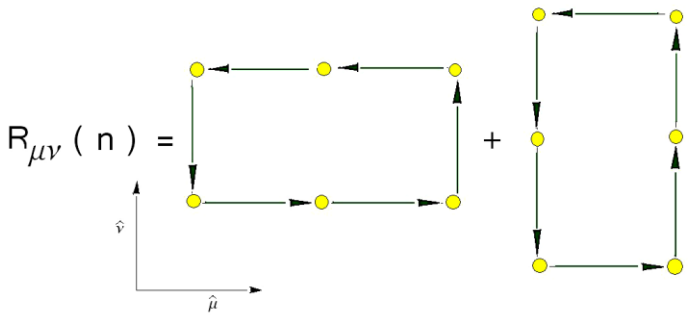
$$P_{inv.kalibruese} = \frac{1}{3\cdot 6\cdot n}\sum_{n\in\Lambda}\sum_{\mu\neq\nu}\mathrm{Re}\,tr[U_{\mu\nu}(n)] \qquad \text{(III.3.1)}$$



Figurë 3.1 Laku planar i Wilsoni-it 1×1, i ashtuquajturi pllakë, në planin $\mu\nu$ me bazë në nyjen n Variabli i shënuar me a tregon distancën rrjetore

3.3.2 Laku drejtkëndor

Laku tjetër më i thjeshtë në rrjetë mbas pllakës është laku drejtkëndor i Wilsoni-it (Figura 3.2). Një lak i tillë përdoret me qëllim përmirësimin e veprimit kalibrues të Wilsoni-it (Gattringer *et. al.*, 2002) dhe për të reduktuar gabimet e distancës rrjetore të fundme me një rend a^2 në teorinë perturbative rrjetore.



Figurë 3.2 Laqet drejtkëndore planare 1×2 dhe 2×1 në planin $\mu\nu$

Shprehja për Figurën 3.2, mund të shkruhet në terma të variablave lidhës si

$$R_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n)U_\nu(n+\hat{\mu})U_\nu(n+2\hat{\mu})U_\mu(n+\hat{\mu}+\hat{\nu})U_\mu^\dagger(n+\hat{\mu}+\hat{\nu})U_\mu^\dagger(n+\hat{\nu})U_\nu^\dagger(n)$$
$$+ U_\mu(n)U_\nu(n+\hat{\mu})U_\nu(n+\hat{\mu}+\hat{\nu})U_\mu^\dagger(n+2\hat{\nu})U_\nu^\dagger(n+\hat{\nu})U_\nu^\dagger(n). \tag{III.3.2}$$

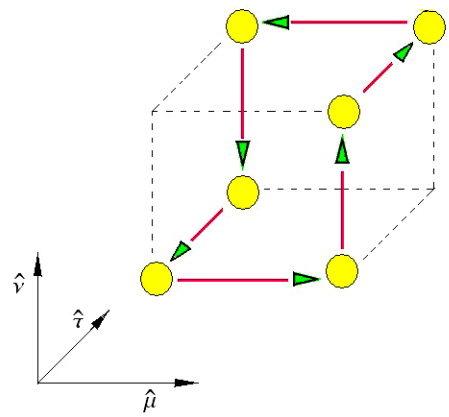
Në hapin e fundit, bëjmë gjurmën e laqeve drejtkëndore, për të marrë një objekt invariant kalibrues. Në çdo nyje të rrjetës ka 12 laqe drejtkëndore për një rrjetë katër përmasore. Për më tepër nse bëjmë normimin duhet të pjestojmë me 3 për shkak të simetrisë SU(3) të përdorur. Përfundimisht marrim

$$R_{inv.kalibruese} = \frac{1}{3\cdot 12\cdot n}\sum_{n\in\Lambda}\sum_{\mu\neq\nu}\mathrm{Re}\,tr[R_{\mu\nu}(n)] \tag{III.3.3}$$

3.3.3 Laku vëllimor

Laku vëllimor njësi është përveç pllakës dhe lakut drejkëndor, një tjetër lak elementar në rrjetë. Ky lak gjithashtu ka qëllim përmirësimin e veprimit kalibrues (bën pjesë në veprimin kalibrues Luscher-Weisz). Shprehja për një lak të tillë $1\times 1\times 1$ në hapësirën tre-përmasore $\mu\nu\tau$ do të ishte

$$V_{\mu\nu\tau}^{1\times 1\times 1}(n) = U_\mu(n)U_\nu(n+\hat{\mu})U_\tau(n+\hat{\mu}+\hat{\nu})U_\mu^\dagger(n+\hat{\nu}+\hat{\tau})U_\nu^\dagger(n+\hat{\tau})U_\tau^\dagger(n) \tag{III.3.4}$$



Figurë 3.3 Paraqitja e një laku vëllimor $1\times1\times1$ në rrjetë në hapësirën $\mu\nu\tau$

Numri i laqeve vëllimore të mundshëm në nyjet e një kubi, korrespondon me diagonalet e tij hapësinore, të cilat janë katër. Një hiperkub katër përmasor, mund të shihet si i ndërtuar prej 4-kubesh. Kjo çon në 16 laqe vëllimore të mundshme në çdo nyje të rrjetës. Atëherë, madhësia invariant kalibruese që del nga këto laqe llogaritet

$$V^{1\times1\times1}_{inv.kalibruese} = \frac{1}{3\cdot16\cdot n}\sum_{n\in\Lambda}\sum_{\mu\neq\nu\neq\tau}\mathrm{Re}\,tr[V_{\mu\nu\tau}(n)] \qquad \text{(III.3.5)}$$

Në këtë kapitull jepen llogaritjet tona të potencialit statik kuark-antikuark, ku janë përdorur fillimisht laqe drejtkëndore të Wilsoni-itdhe më pas llogaritjet për laqet vëllimore. Metoden dhe rrugën teorike se si derivohet ky potencial prej laqeve të Wilsoni-it e shpjegojmë më poshtë.

3.4 Potenciali statik kuark-antikuark

Potenciali statik kuark-antikuark, është një objekt me interes teorik i studjuar për gati 30 vjet (Rothe, 2005). Ai shpreh energjinë e fushave kalibruese lidhëse të dy burimeve statike ngjyrash në distancë r nga njëra-tjetra. Llogaritjet kompjuterike të Creutz në 1970 (Creutz & Moriarty, 1982) për të gjetur potencialin statik kuark-antikuark, konfirmuan se kuarket janë *të mbyllura*, pra se potenciali statik rritet linearisht për distanca të mëdha kuark-antikuark. Për këtë arsye do të duhej një energji "infinit" për të ndarë dy kuarke, ato janë të mbyllura përjetësisht në hadrone. Laqet e Wilsoni-it janë madhësi invariant kalibruese që ndihmojnë në gjetjen e potencialit midis dy burimeve statike ngjyrash. Le të shohim metodën si derivohet ky potencial prej laqeve të Wilson-it. Në trajtë të përgjithshme një lak vëllimor i çfarëdoshëm $(r_1\times r_2\times t)$ në hapësirën $\mu\nu\tau$ do të shkruhej

$$
\begin{aligned}
W_{\mu,\nu,\tau}^{r_1\times r_2\times t}(x) = {} & U_\mu(x)...U_\mu(x+(r_1-1)\hat{\mu}) \\
& \cdot U_\nu(x+r_1\hat{\mu})...U_\nu(x+r_1\hat{\mu}+(r_2-1)\hat{\nu}) \\
& \cdot U_\tau(x+r_1\hat{\mu}+r_2\hat{\nu})...U_\tau(x+r_1\hat{\mu}+r_2\hat{\nu}+(t-1)\hat{\tau}) \\
& \cdot U_\mu^\dagger(x+r_2\hat{\nu}+t\hat{\tau})...U_\mu^\dagger(x+r_2\hat{\nu}+t\hat{\tau}-(r_1-1)\hat{\mu}) \\
& \cdot U_\nu^\dagger(x+t\hat{\tau})...U_\nu^\dagger(x+t\hat{\tau}-(r_2-1)\hat{\nu}) \\
& \cdot U_\tau^\dagger(x)...U_\tau^\dagger(x-(t-1)\hat{\tau}).
\end{aligned}
\tag{III.4.1}
$$

Duke mesatarizuar sipas të gjitha mundësive të mundshme të përftimit të një laku të tillë në një pikë x (për një kombinim të caktuar $r_1 \times r_2 \times t$) merret

$$
W_{inv.kalibruese}^{r_1\times r_2\times t} = \frac{1}{12V}\sum_{x\in\Lambda}\sum_{\mu\neq\nu\neq\tau} \mathrm{Re}\, tr[W_{\mu,\nu,\tau}^{r_1\times r_2\times t}(x)] \tag{III.4.2}
$$

e cila është madhësi invariant kalibruese dhe $V = N_1N_2N_3N_4$ është vëllimi rrjetor. Në total, laqe të tilla të Wilsoni-itmund të gjenerohen në varësi të zgjedhjes së parametrave r_1, r_2, t, pra $r_1 \times r_2 \times t$ laqe. N.q.se fiksojmë planet $r_1 \times r_2$ me një ndryshore të vetme r kemi laqe $W(r,t)$ të Wilson-it. Po kështu dhe për laqet planare.

Potenciali kuark-antikuark mund të nxirret prej sjelljes së laqeve të Wilsoni-it për kohë të gjata. Për këtë le të llogarisim *energjinë e një çifti kuark-antikuark.* Për të llogaritur këtë madhësi duhet të llogaritim funksionin e korrelimit të operatorit kuark-antikuark në kohë të ndryshme

$$
W(r,t) = \left\langle 0 \mid O_r(0)O_r(t)^\dagger \mid 0 \right\rangle = \left\langle O_r(0)O_r(t)^\dagger \right\rangle \tag{III.4.3}
$$

ku operatori

$$
O_r(t) = \bar{\psi}(t,0)U(t,0\to t,r)\psi(t,r) \tag{III.4.4}
$$

është invariant kalibures dhe $U(t,0\to t,r)$ është fusha kalibruese që lidh kuarket nga pika $(t,0)$ në pikën (t,r), ku r përfaqson koordinatën hapësinore dhe t është koha e përhapjes së kuarkut. N.q.se futim në shprehjen (III.4.3) identitetet $\sum_n \mid n >< n \mid = I$ dhe $\sum_m \mid m >< m \mid = I$ marrim

$$
\begin{aligned}
W(r,t) =& < O_r(0)\sum_n | \, n >< n \, | O_r(t)^\dagger > \\
=& \sum_n < O_r(0) \, | n >< n \, | \, O_r(t)^\dagger > \\
=& \sum_{n,m} <| \, m >< m \, | \, O_r(0) \, | n >< n \, | \, O_r(t)^\dagger > \\
=& < \sum_{n,m} < m \, | \, O_r(0) \, | \, n >< n \, | \, O_r(t)^\dagger \, | \, m > > \\
=& < \sum_n < 0 \, | \, O_r(0) \, | \, n >< n \, | \, O_r(t)^\dagger \, | \, 0 > > \\
&+ \sum_{n,m\geq 1} < m \, | \, O_r(0) \, | \, n >< n \, | \, O_r(t)^\dagger \, | \, m >
\end{aligned}
\tag{III.4.5}
$$

Për të izoluar gjëndjen bazë energjitike që i korrespondon dhe potencialit statik kuark-antikuark, duhet të neglizhojmë shprehjen e dytë tek ekuacioni (III.4.5) e cila përfaqson gjëndjet e ngacmuara. Kjo realizohet për vlera të mëdha të *t*. Duke shfrytëzuar dhe ekuacionin $\hat{H} \mid n >= E_n \mid n >$ dhe se $O_r(t)^\dagger = e^{\hat{H}t} O_r(0)^\dagger e^{-\hat{H}t}$ marrim

$$
W(r,t) = \sum_n < 0 \, | \, O_r(0) \, | \, n >< n \, | \, O_r(0)^\dagger \, | \, 0 > e^{-E_n(r)t} \tag{III.4.6}
$$

ose në trajtën

$$
\begin{aligned}
W(r,t) &= \sum_n \left|\psi_n\right|^2 e^{-E_n(r)t} = \left|\psi_0\right|^2 e^{-E_0(r)t} + \left|\psi_1\right|^2 e^{-E_1(r)t} + ... \\
&= \left|\psi_0\right|^2 e^{-E_0(r)t} \left\{ 1 + \left|\frac{\psi_1}{\psi_0}\right|^2 e^{-\Delta E(r)t} + ... \right\}.
\end{aligned}
\tag{III.4.7}
$$

Në anën e djathtë të ekuacionit (III.4.7) dominon gjëndja bazë, si rrjedhim

$$
W(r,t) \approx \left|\psi_0\right|^2 e^{-E_0(r)t} = c_0 e^{-E_0(r)t}, \tag{III.4.8}
$$

nga ku përfundimisht mund të llogaritet potenciali statik kuark-antikuark duke izoluar gjëndjen bazë për kohë *t* të gjata si

$$
V(r) = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{t} \log(W(r,t)) \right]. \tag{III.4.9}
$$

Një metodë tjetër është ajo e llogaritjes së potencialeve efektivë prej

$$
V(r)_{eff} = -\log \frac{W(r,t+1)}{W(r,t)}. \tag{III.4.10}
$$

Vlerat e potencialit efektiv të llogaritur në rrjetë për çdo r të fiksuar, përzgjidhen për $t >>$ deri ku arrihet një plato. Janë pikërisht këto vlera të zgjedhura që përdoren për të modeluar potencialin kuark-antikuark sipas (III.5.2).

3.5 Tensioni i kordës dhe distanca rrjetore. Përcaktimi i shkallës

Në simulimet e teorive kalibruese rrjetore, është e nevojshme të fiksohet një madhësi fizike me përmasa në mënyrë që të vendoset shkalla e teorisë. Për të marrë madhësitë fizike me përmasa prej atyre rrjetore të cilat janë pa njësi, duhet ditur konstantja e rrjetës ose shkalla. P.sh për gjetjen e masës fizike të grimcave m prej asaj rrjetore $\hat{m} = am$ duhet ditur vlera e a. Kjo llogaritje kërkon një madhësi fizike për referencë, e cila është e përcaktuar nga eksperimenti dhe mund të llogaritet lehtë në rrjetë. Në teorinë e pastër kalibruese, siç është dhe rasti jonë, një madhësi e tillë që përdoret shpesh është tensioni i kordës K që lidh dy kuarket. Vlera eksperimentale e tij prej modelit fenomenologjik të kordës bozonike është

$$K = (440MeV)^2. \qquad \text{(III.5.1)}$$

Ndërsa në rrjetë, tensioni i kordës llogaritet duke përafruar potencialet efektive rrjetor të dy kuarkeve statike sipas modelit

$$V(r) = V_0 + Kr + \frac{\alpha}{r} \qquad \text{(III.5.2)}$$

ku K është tensioni i kordës dhe α një konstante (ose koefiçenti i termit të Coulomb-it). Një model i tillë përputhet me modelin e kordës bozonike për distanca r të mëdha ndërmjet kuarkeve. Për distanca të mëdha kuark-antikuark dominon termi Kr, ndërkohë për distanca të vogla dominon termi α/r. Për të kaluar në modelin pa njësi shumëzojmë ekuacionin (III.5.2) me a dhe shënojmë me kapuç të gjitha madhësitë tani pa njësi, pra të llogaritura në rrjetë:

$$\hat{V} = \hat{V}_0 + \hat{K}\frac{r}{a} + \frac{a}{r}\hat{\alpha} \qquad \text{(III.5.3)}$$

ku a është në njësinë MeV^{-1} ose në *fm*, ku $1MeV^{-1} \sim 200fm$ dhe si rrjedhim që ekuacioni (III.5.3) të jetë pa dimensione kemi $\hat{V} = aV$, $\hat{V}_0 = aV_0$, $\hat{K} = a^2K$ dhe $\hat{\alpha} = \alpha$.

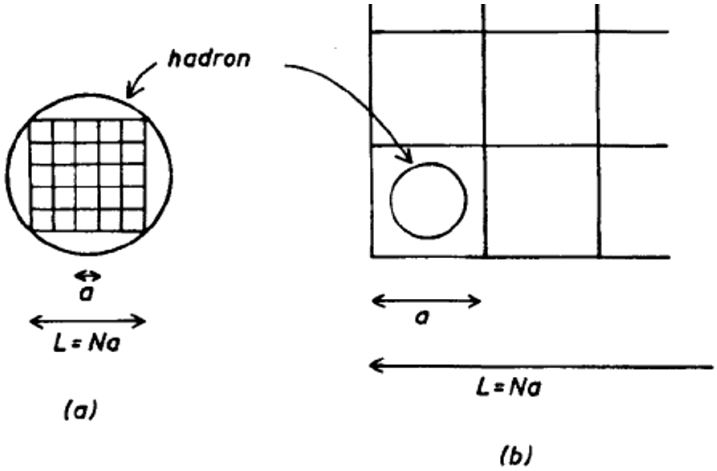
Përfundimisht, nga përafrimi i bërë modelit të fundit me vlerat e llogaritura në rrjetë të potencialit efektiv, gjenden parametrat $\hat{V}_0$, $\hat{K}$ dhe $\hat{\alpha}$. Për të përcaktuar vlerën e konstantes së çiftimit në çdo simulim i referohemi shkallës Sommer (Guagnelli *et. al.*, 1998) sipas të cilës duhet të plotësohet kushti

$$r_0^2 F(r_0) = 1.65 \qquad \text{(III.5.4)}$$

për $r_0 = 0.5fm$. N.q.se zbatojmë (III.5.4) për modelin (III.5.3) dhe zëvëndësojmë aty $K = \hat{K}/a^2$ dhe $\alpha = \hat{\alpha}$ marrim

$$a = r_0\sqrt{\frac{\hat{K}}{\hat{\alpha} + 1.65}} \qquad \text{(III.5.5)}$$

me $\hat{K}$ dhe $\hat{\alpha}$ të gjetur më lart. Dihet se, kur konstantja e çiftimit beta është e madhe, *a* është e vogël, pra jemi më afër kontinumit. Atherë pse të mos kryejmë simulime Monte-Carlo për beta shumë të mëdha (pavarsisht problemeve me koston kompjuterike)? Për fat të keq përmasat e rrjetës janë të fundme. Kështu n.q.se *a* do ishte shumë e vogël gjatësia fizike *L* e rrjetës *(*e cila lidhet me distancën rrjetore nga *L=aN*, ku *N*-numri i nyjve sipas këtij drejtimi) do ishte gjithashtu e vogël. Distanca rrjetore duhet mjaftueshmërisht e vogël saqë të përshkruajë mirë fizikën hadronike por duhet të jetë aq e madhe saqë gjatësia e rrjetës të jetë e rendit të përmasave të hadronit (p.sh diametri i një hadroni tipik si protoni është *1fm*). Një ilustrim jepet në Figurën 3.4.



Figurë 3.4 a) N.q.se distanca rrjetore është shumë e vogël, rrjeta në vetevete është më e vogël se përmasat tipike hadronike. b) N.q.se distanca rrjetore është shumë e madhe, ajo del jashtë përmasave hadronike, jemi larg kontinumit. Të dyja janë raste ekstreme të papranueshme.

Volumi fizik i rrjetës (*L^4*) me gjatësi *L* sipas çdo drejtimi lidhet me volumin rrjetor (*N^4*) me *N*-nyje për drejtim, sipas *L=aN*. Në llogaritjet tona të potencialit statik kuark-antikuark ne kemi fiksuar gjatësinë *L* të rrjetës *L=1.6fm* (e rendit të përmasave hadronike), pasi në simulimin e rrjetës 8^4 (siç do e shohim në vijim) morrëm një distancë rrjetore *a=0.2fm*, nga ku del qartë *L=0.2x8=1.6fm*. Më pas kemi kryer simulime me rrjeta më të dendura, por me gjatësi fizike të fiksuar. Për të mbajtur gjatësinë fizike *L* të rrjetës konstante në çdo simulim (pra për të ndryshuar distancën rrjetore dhe si rrjedhim për të marrë rrjeta më të dëndura ose më të rralla pa dalë jashtë përmasave hadronike) ndryshohet vlera e konstantes së çiftimit β sipas parametrizimit të Guagnelli *et. al.*, (1998)

$$\ln\left[\frac{a}{r_0}\right] = -1.6805 - 1.7139(\beta - 6) + 0.8155(\beta - 6)^2 - 0.6667(\beta - 6)^3$$

(III.5.6)

Llogaritjet e madhësive të caktuara (tensioni i kordës, masa e hadroneve etj) kryhen për distanca rrjetore të ndryshme a, në mënyrë që rezultatet të *ekstrapolohen* në limitin e vazhduar, pra $a \to 0$.

3.6 Gabimet e diskretizimit rrjetor dhe kostoja llogaritëse

Simulimet numerike të QCD-së rrjetore fusin njëkohësisht *gabime statistike* dhe një sërë *gabimesh sistematike*.

I. Gabimet statistike

Mbas gjenerimit të N konfiguracioneve U_i statistikisht të pavarura llogaritet madhësia fizike O për të cilën jemi të interesuar për secilin konfiguracion dhe përfundimisht merret një vlerësim përfundimtar për të nga:

$$\langle O \rangle = \frac{1}{N}\sum_i O(U_i) \qquad \text{(III.6.1)}$$

Gabimi statistikor i përcaktimit të madhësisë fizike do jepet nga

$$\delta\langle O \rangle = \sqrt{\frac{\left\langle \left(O - \langle O \rangle\right)^2 \right\rangle}{N-1}} = \sqrt{\frac{\langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2}{N-1}}. \qquad \text{(III.6.2)}$$

Ky vlerësim është bazuar në teoremën e limitit qëndror e cila pohon se me një numër të madh të dhënash, shpërndarja e vlerave mesatare i bindet asaj Gausiane. Gabimi në formulën (III.6.2) jep pikërisht gjërësinë e kësaj shpërndarje. Shumë madhësi fizike në QCD-në rrjetore nuk mund të nxiren drejtpërdrejt nga të dhënat e nxjerra nga simulimi por dalin si rezultat i analizës fit. Për të vlerësuar gabimin statistik të një madhësie të tillë metoda Jackknife është më e mira, e cila është shpjeguar në Shtojcën B.

II. Gabimet sistematike

Me qëllim krahësimin e rezultateve të simulimit me ato eksperimentale është e nevojshme edhe vlerësimi i gabimeve sistematike. Burimet tipike për këto lloj gabimesh janë si vijon:

***Efekti i vëllimit të fundëm**:* Një gabim tjetër në simulimet rrjetore të QCD-së vjen nga rrjeta me vëllim të fundëm. Ky është gabimi më i thjeshtë për tu vizualizuar pasi lidhet me përdorimin e rrjetave të fundme për të përfaqsuar një sistem të pafundëm.

Lüsher tregoi se për rrjeta mjaftueshmërisht të mëdha me gjatësi *L*, korigjimet e vëllimit të fundëm në vlerësimin e masës *M* të një gjëndje të dhënë bien si e^{-ML} (Luscher, 1990) Pra, qëllimi është që të punohet me rrjeta mjaftueshmërisht të mëdha të tilla që efektet e madhësive të fundme të bien eksponencialisht.

***Efekti i distancës rrjetore të fundme*:** Rezultatet fizike merren prej atyre të llogaritura në rrjetë kur merret limiti i vazhduar ($a \to 0$). Për a të fundme, rezultatet rrjetore kanë gabime diskretizimi masa e të cilave varet nga shkalla e përmirësimit të veprimit në rrjetë. Për ti neglizhuar këto gabime ndiqen këto rrugë: Së pari përmirësojmë veprimin rrjetor në mëyrë të tilë që gabimet për një *a* të fiksuar të jenë të vogla. Së dyti, përsërisim simulimet për distanca rrjetore të ndryshme dhe ekstrapolojmë në $a \to 0$.

***Ekstrapolimi kiral**:* Simulimet dinamike të QCD-së rrjetore me masat fizike të kuarkeve up dhe doën është praktikisht e vështirë. Përgjithësisht simulimet bëhen për kuarke më të rënda dhe rezultatet ekstrapolohen në limitin kiral pra në $m_q \to 0$.

Konstantja e rinormimit: Elementët matricorë të marrë nga simulimi rrjetor lidhen me madhësitë e teorisë së vazhduar me anë të skemës së rinormimit. Sipas skemës së rinormimit jo-perturbative të shpjeguar në seksionin (2.5) konstantja e rinormimit vuan nga gabime sistematike njësoj si gjithe madhëistë e tjera.

Kostoja e një simulimi rrjetor në QCD me fermione të ngrira (*quenched*) jepet afërsisht nga formula (Lepage, 2000)

$$kosto\_kompjuterike = \left(\frac{L}{a}\right)^4 \frac{1}{a} \frac{1}{m_\pi^2 a} \qquad \text{(III.6.3)}$$

ku termi i parë jep numrin e nyjeve të rrjetës, ndërkohë i dyti dhe i tretë vijnë si pasojë e ngadalësimit kritik të algoritmeve të përdorur për simulim. Nga kjo formulë, treguesi thelbësor i kostos llogaritëse kompjuterike është distanca rrjetore, kostoja është proporcionale me $1/a^6$. Kjo tregon se për të minimizuar koston duhet të mbajmë një distancë rrjetore sa më të madhe. Nga ana tjetër madhësia e distancës rrjetore limitohet nga gabimet e diskretizimit. Kështu sfida është përcaktimi i një distance rrjetore të madhe aq sa të mbash nën kontroll gabimet e diskretizimit. Këto gabime kanë dy burime: së pari paraqitja rrjetore na detyron të përafrojmë derivatet me diferencat e fundme dhe së dyti futja e një momenti kufizues ultraviolet.

3.7 Llogaritjet në paralel me FermiQCD

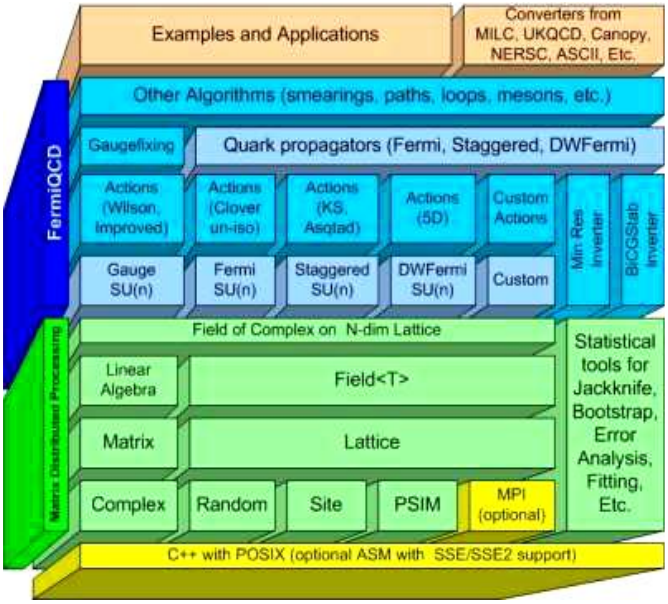
Kromodinamika Kuantike Rrjetore (LQCD) siç u tha është një formulim algoritmik i teorisë QCD, pra modeli matematikor që përshkruan kuarket dhe bashkëveprimet e tyre. Ajo bazohet në algoritme numerike komplekse të derivuar prej një analogjie matematikore midis "*integralit të udhëve*" në mekanikën statistike dhe "*hapave"* të zinxhirit të Markovit në algoritmin Monte Carlo. Llogaritjet numerike në LQCD me metodat Monte Carlo mund të jenë mjaft të kushtueshme sa i takon kostos llogaritëse dhe të kryhen në njësi kompjuterike sa më të mëdha, si superkompjuterat apo tufat e kompjuterave. Shpesh këto llogaritje lehtësohen duke përdorur përafrimin

"*quenched*" siç u përmend dhe më sipër. *Llogaritjet në paralel* duke shfrytëzuar tufa me fuqi proçesimi të konsiderueshëm janë gjithashtu një alternativë për të fituar në kohë dhe kosto llogaritëse. Shpesh është e domosdoshme që llogaritjet rrjetore të kryhen në rrjeta me volum sa më të madh (rrjeta të dëndura) në mënyrë që rezultati që merret për një madhësi të caktuar fizike të jetë sa më i mirë dhe sa më i përafërt me atë të kontinumit. Kuptohet që rrjeta të mëdha kërkojnë kosto llogaritëse më të madhe. Në simulimet e numerike të teorisë së pastër kalibruese SU(3) kemi përdorur llogaritje në paralel në një prej tufave për superllogaritje të projektit HP-SEE (High-Performance Computing Infrastructure for South East Europe's Research Communities), që ndodhet në Bullgari (BG-HPC).

Për të implementuar llogaritjet në paralel kemi shfrytëzuar një softëare special të quajtur FermiQCD (Di Pierro *et. al.*, 2001), (Di Pierro *et. al.*, 2002), (Di Pierro *et. al.*, 2004), i cili është një koleksion klasash, funksionesh dhe algoritmesh në paralel për QCD-në rrjetore të shkruara në C++. Ai përmban algoritme të optimizura të implementuara duke përdorur MPI (Message Paasing Interface) (Kuiper, 2008) por thirrjet MPI janë të fshehura në nivelet e larta të algorithmeve që përbëjnë FermiQCD. FermiQCD funksionon gjithashtu edhe në një proçesor të vetëm. Tipet (klasat) e gjuhës tek FermiQCD përfshijnë numra kompleksë (*mdp_complex*), matrica (*mdp_matrices*), rrjeta (*mdp_lattice*), fushat gluonike, fermionike (*gauge field, fermi field*), përhapës (*fermi propagator*), funksione veprimi kalibrues, fermionik (*gauge action, fermi action*) etj. Një nga avantazhet kryesore të FermiQCD ndaj librarive të tjera është fakti se ai bazohet në një strukturë të thjeshtë të programimit të orientuar në objekte ndryshe nga një dizajn "*procedurial*". Më poshtë po listojmë në mënyrë të përmbledhur disa prej avantazheve që ka përdorimi i këtij software për simulimet numerike tona në SU(3), konkretisht të potencialit kuark antikuark.

- Programet (kodet) e shkruar në FermiQCD janë të thjeshta për tu shkruar, lexuar dhe modifikuar pasi sintaksa e përdorur lidhet ngushtë me sintaksën matematikore të përdorur në artikujt dhe librat e Teorisë Kuantike të Fushës.
- Programet janë "*portable*", në sensin se mundet që të kompilohen me çfarëdolloj kompiluesi ANSI C++ tjetër . Optimizimet specifike hardëare-ike janë koduar në librari dhe janë *të fshehura* nga niveli i lartë i programimit.
- Komunikimet në Fermiqcd bazohen në MPI.
- Programet janë të thjeshta për t'u korigjuar për shkak se përdorimi i objekteve dhe algoritmeve të FermiQCD nuk kërkon përdorim eksplicit të shënjuesve. I gjithë menaxhimi i memorjes realizohet prej objekteve në vetvete.

Figura 3.5, jep një paraqitje skematike të komponentëve përbërës të Fermiqcd. Komponenetet në nivelin më të ulët, referuar si Matrix Distributed Processing, përcaktojnë gjuhën e përdorur në Fermiqcd. Komponentet në nivelin e sipërm janë algoritme. Ndërsa në krye qëndrojnë shembujt dhe aplikimet si dhe mjete të tjera. Këto mjete përfshijnë kryesisht konvertues për formatet më të zakonshme të fushave kalibruese si MILC, UKQCD, Canopy, NERSC, ASCII etc.



Figurë 3.5 Paraqitje skematike e pjesëve përbërse të FermiQCD

3.8 Rezultate

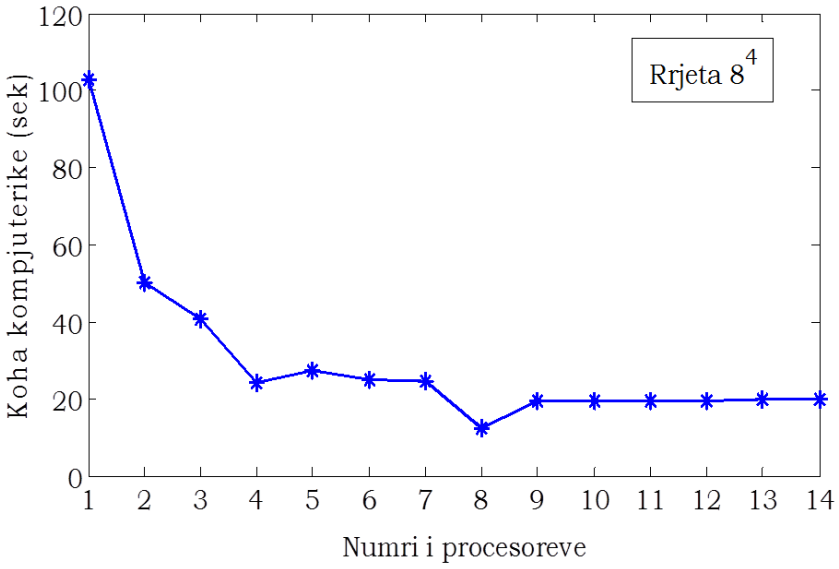
3.8.1 Teste të performancës së FermiQCD

Fillimisht ne studjuam dhe testuam softwarin FermiQCD në kompjutera lokalë individuale për rrjeta të vogla deri në 4^4 mbi shembujt e gatshëm që përfshin paketa. Burimi për shkarkimin e tij gjendet në websiten e softwarit (http://web2py.com/fermiqcd). Për ta përdorur më pas nuk nevojitet instalim por paraprakisht kërkon instalimin e softwarit Mercurial, instruksione të mëtejshme jepen në faqen zyrtare të softwarit. Më pas testimi i softwarit u shtri në makina të mëdha paralele si klasteri në Sofje të Bullgarisë. Aksesi për të përdorur këtë të fundit ishte pjesë e llogaritjeve për një projekt llogaritës të LQCD nga grupi TirLatt (grupi i studjueseve të QCD-së rrjetore në Tiranë, Shqipëri) të përzgjedhur nga HP-SEE. Një punë parapërgatitore u bë me studimin dhe familjarizimin me programimin në paralel me MPI. U njohën dhe u testuan komandat e kompilimit dhe ekzekutimit në paralel. Disa prej kodeve që gjenden tek shembujt e softuerit llogarisin: pllakën, ngarkesën topologjike, përhapësin e pionit, mezonit, etj. U studjua fillimisht koha kompjuterike e llogaritjeve në klasterin paralel për numër procesorësh të ndryshëm të përdorur si dhe për rrjeta me përmasa të ndryshme me shembujt e gatshëm të paketës, në mënyrë që të testohej përshkallëzimi i tij për rrjeta edhe më të dendura dhe për numër procesorësh të ndryshëm. Rezultatet jepen të tabeluara në Tabelën 3.1.

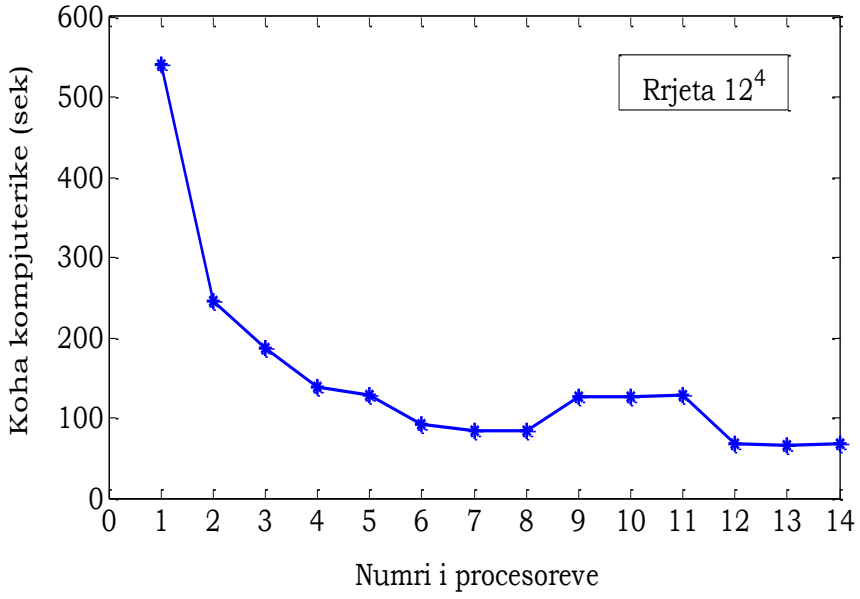
Tabelë 3.1 Vlerat e marra të kohës së llogaritjes në sekonda në varësi të numrit të procesorëve për rrjeta me volum të ndryshëm me FermiQCD

Numri i procesorëve	Rrjeta 8^4	Rrjeta 12^4	Rrjeta 16^4	Rrjeta 20^4
1	102.928	539.974	1699.8	3875.01
2	50.1882	245.913	775.098	1949.18
3	40.6041	187.391	575.832	1331.94
4	24.0793	137.427	414.68	940.543
5	27.4751	127.294	429.739	802.563
6	24.9939	92.3678	315.519	831.246
7	24.7644	83.7491	314.14	610.789
8	12.5531	84.0548	225.209	599.266
9	19.4817	125.336	313.202	893.248
10	19.475	126.841	313.366	616.307
11	19.441	128.586	311.705	626.435
12	19.5794	66.9843	317.799	625.546
13	19.7308	66.227	313.243	626.113
14	19.7594	67.4796	314.101	620.389

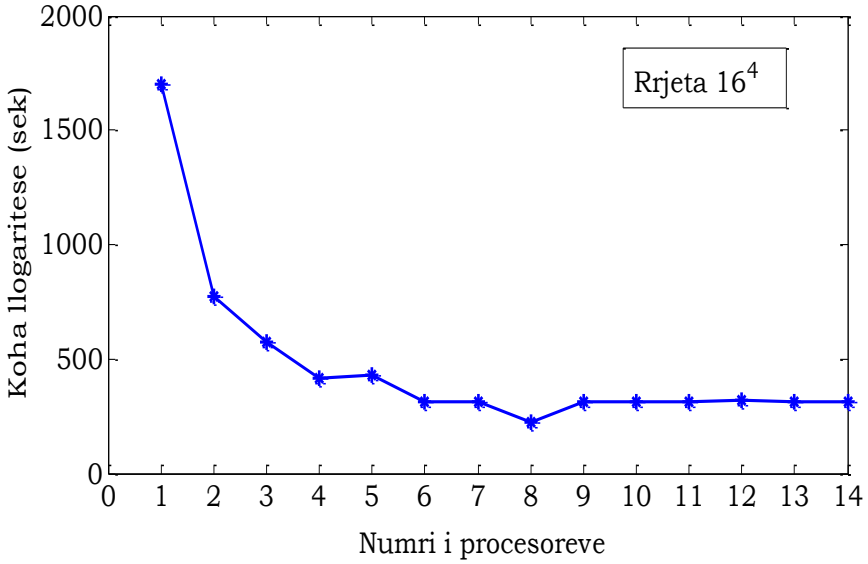
Gjithashtu po japim më poshtë rezultatet në trajtë grafikësh. Konkretisht Figurat 3.6 deri në 3.9 tregojnë kohën kompjuterike të llogaritjes për numër procesorësh të ndryshëm nga 1 deri 14 për rrjetat me volum 8^4, 12^4, 16^4, 20^4. Duket qartë rënia eksponenciale e kohës së llogaritjes me rritjen e numrit të procesorëve për të gjitha rrjetat. Vihet re gjithashtu se për numër procesorësh mbi 4, koha e llogaritjes saturohet.



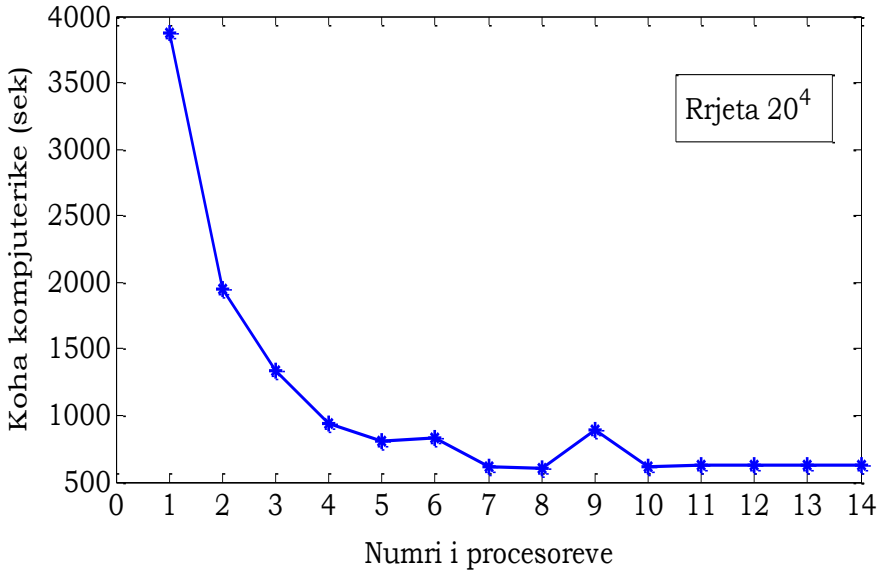
Figurë 3.6 Varësia e kohës llogaritëse kompjuterike nga numri i procesorëve të përdorur, gjatë simulimit të një prej kodeve të FermiQCD për rrjetë me volum 8^4



Figurë 3.7 Varësia e kohës llogaritëse kompjuterike nga numri i procesorëve të përdorur, gjatë simulimit të një prej shembujve të FermiQCD për rrjetë me volum 12^4.

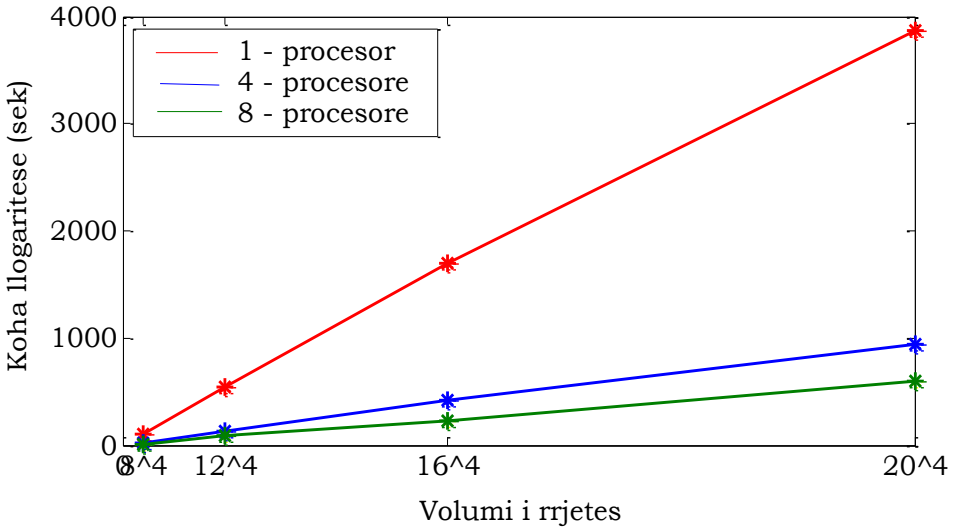


Figurë 3.8 Varësia e kohës llogaritëse kompjuterike nga numri i procesorëve të përdorur, gjatë simulimit të një prej shembujve të FermiQCD për rrjetë me volum 16^4.



Figurë 3.9 Varësia e kohës llogaritëse kompjuterike nga numri i procesorëve të përdorur, gjatë simulimit të një prej shembujve të FermiQCD për rrjetë me volum 20^4.

Kemi studjuar gjithashtu varësinë e kohës kompjuterike të llogaritjes nga madhësia e rrjetës së përdorur në simulime për numër procesorësh të fiksuar, e paraqitur grafikisht në Figurën 3.10.



Figurë 3.10 Varësia e kohës kompjuterike llogaritëse nga volumi i rrjetës, gjatë simulimit të një prej shembujve të FermiQCD për numer procesoresh të fiksuar 1,4,8.

Duket qartë se me rritjen e volumit të rrjetës rritet koha e llogaritjes. Në Figurë 3.10 paraqiten disa raste studimi për procesorë të ndryshëm të fiksuar, si p.sh 1,4,8.

Kemi kryer edhe testin e përshpejtimit dhe efikasitetit të FermiQCD. Në qoftë se T(n,1) është koha e llogaritjes së algoritmit sekuencial më të shpejtë të njohur dhe T(n,p) koha e llogaritjes e algoritmit në parallel të ekzekutuar në p-proçesorë, ku n është madhësia e parametrave hyrës (volumi rrjetor), atherë testi i përshpejtimit përcaktohet nga $S(p) = T(n,1)/T(n,p)$. Rezultatet e testit të përshpejtimit të FermiQCD për rrjeta me volum të ndryshëm jepen në Figurën 3.11.

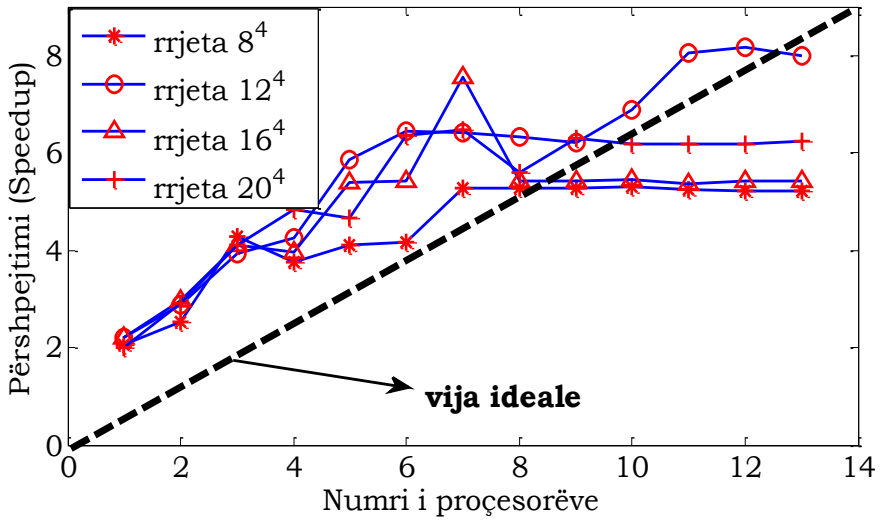
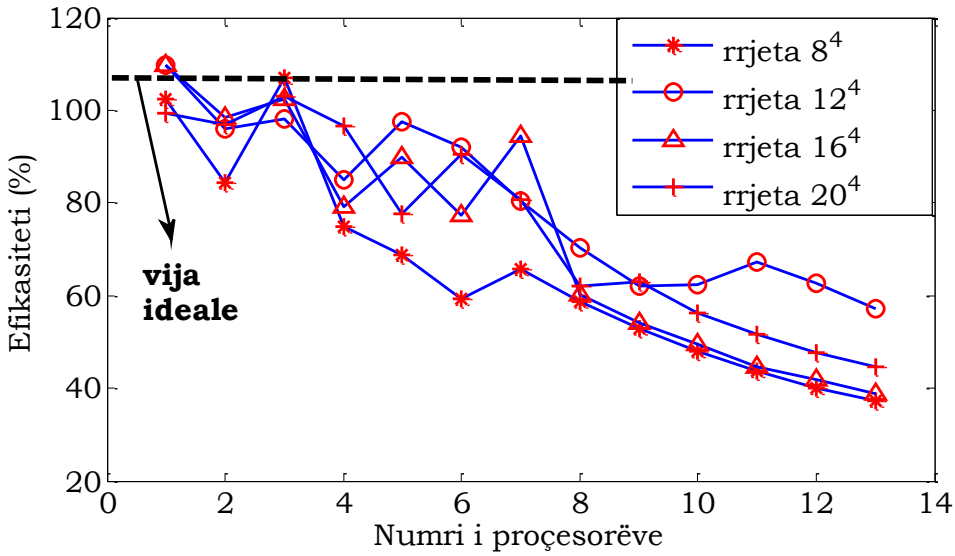


Figura 3.11 Testi i përshpejtimit (speedup test) të Fermiqcd nga numri i proçesorëve të përdorur në simulim për rrjeta me volum të ndryshëm

Përshpejtimi ideal do të përftohej nëse S(p) = p, kështu nëse do të dyfishonim numrin e proçesorëve, do të dyfishohej koha e ekzekutimit.

Një tjetër test që mat performancën e një algoritmi në paralel është *testi i efikasitetit*, E(p), i përcaktuar si: $E(p) = T(n,1)/p\,T(n,p) = S(p)/p$. Rezultatet e testit të efikasitetit të FermiQCD për rrjeta me volum të ndryshëm jepen në Figurën 3.12.



Figurë 3.12 Testi i efikasitetit (efficiency test) i shprehur në përqindje i Fermiqcd nga numri i proçesorëve të përdorur në simulim për rrjeta me volum të ndryshëm

3.8.2 Llogaritja e potencialit prej laqeve planare të Wilsoni-it në rrjetë

Më pas studimi u shtri në ndërtimin e laqeve planare të Wilsonit. Duke u bazuar në shembullin dhe elementët që përdor FermiQCD për laqet katrore, ndërtuam kodin që llogarit 36 laqe drejtkëndore të Wilsoni-it për madhësi të ndryshme të drejtimit kohor t dhe atij hapsinor r në rrjetë, konkretisht për $r = 1,...,6$ dhe $t = 1,...,6$. Simulimet në rrjetë u bënë për 100 konfiguracione statistikisht të pavarura, të gjeneruara me metoda Monte Carlo. Kodi i shkruar për këtë qëllim në FermiQCD jepet në Kodin A.1, Shtojca A. Në total gjenerohen 3600 laqe të Wilsonit për të gjitha konfiguracionet. Më pas të dhënat u importuan në Matlab/Octave ku janë bërë llogaritje për potencialin kuark-antikuark, konstanten e rrjetës, tensionin e kordës si dhe gabimet përkatëse të këtyre parametrave me Jackknife (Shtojca B), (Efron, 1979) Metoda e përdorur ***nuk ishte ajo standarte nga potencialet efektive*** e shpjeguar në seksionin (2.4). Potenciali llogaritej direkt duke u nisur nga shprehja (III.4.8) nga ku kemi

$$-\log W(r,t) = C_0 + V(r)t \qquad \text{(III.8.1)}$$

ku përmbahen edhe gjëndjet e ngacmuara, për sa kohë *t* merr edhe vlera të vogla (*t=1,..,6*). N.q.se e modelojmë $V(r)$ sipas (III.5.2) mund të shkruajmë

$$-\log W(r,t) = C_0 + V_0 t + Krt + \frac{\alpha}{r} t. \qquad \text{(III.8.2)}$$

Ana e majtë e ekuacionit përmban logaritmet e laqeve të Wilsoni-it të cilat janë llogaritur. Ndërkohë që *r*, *t* lëvizin nga *1..6*, dhe C_0 (konstante), V_0 (konstante), K (tensioni i kordes) dhe α janë parametra (koefiçentë) që duhen përcaktuar. I gjithë problemi i gjetjes së këtyre parametrave konvertohet në zgjidhjen e një sistemi ekuacionesh lineare të mbipërcaktuara:

$$Ax = b \tag{III.8.3}$$

ku A - është matrica e koefiçentëve para ndryshoreve , b - përmban logaritmet e laqeve, x - matrica me parametrat. Zgjidhja e këtij sistemi u kodua në Matlab/Octave gjithashtu u kodua dhe gjetja e gabimeve me Jacknife e parametrave, e vetë potencialit që është plotësisht i përcaktuar mbas gjetjes së parametrave, si dhe u përcaktua distanca rrjetore prej relacionit (III.5.5) dhe gabimi respektiv. Kodi i shkruar në Matlab/Octave që kryen këto llogaritje jepet në Kodin A.2, Shtojca A. Më poshtë po japim të tabeluara rezultatet e marra për rrjeta me volum 8^4, 12^4, 16^4

Tabelë 3.2 Vlerat e konstantes rrjetore a dhe tensionit të kordës $\hat{K}$ me gabimet respektive të marra për rrjeta të ndryshme (*Rasti i laqeve drejtkëndore për r dhe t nga 1,...,6*)

Rrjeta	Konstantja e çiftimit	Konstantja rrjetore *a*	Tensioni i kordës në njësi rrjetore a^2K	Gabimi i *a*	Gabimi i *K*
8^4	5.7	0.2023(08)	0.1868(84)	1.0536e-04	3.77e-02
12^4	5.85	0.1846(21)	0.2023(64)	9.0614e-05	3.87e-02
16^4	6	0.1648(91)	0.1609(73)	1.1363e-05	3.91e-03

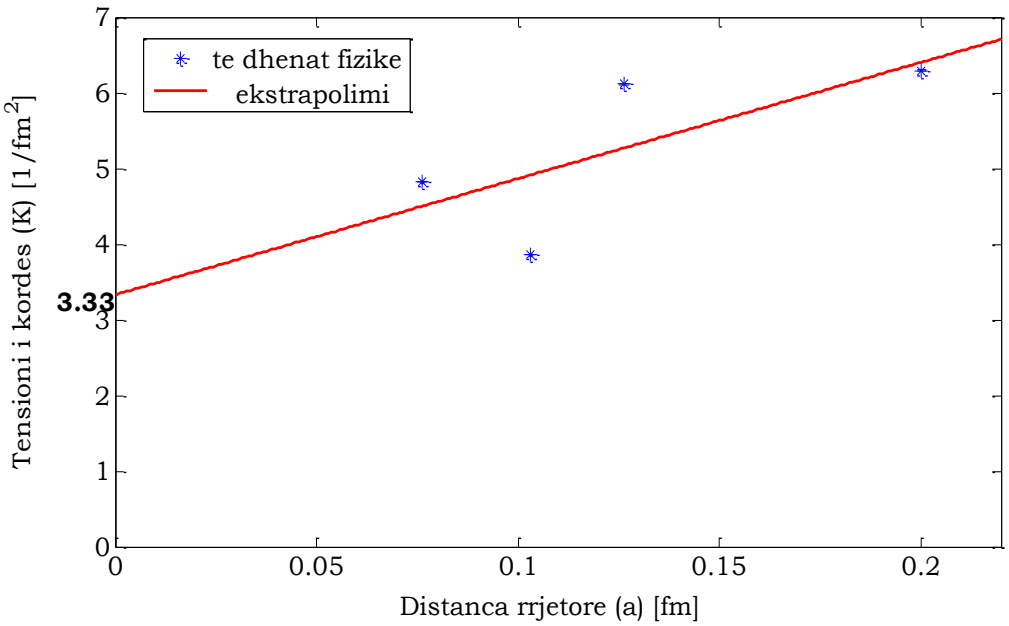
Pritet që vlera e tensionit të kordës të zvogëlohet me zvogëlimin e konstantes rrjetore (kujtojmë $\hat{K} = a^2K$). Ndërkohë nga Tabela 3.2, shohim se për tre rrjetat e mara në studim tensioni i kordës në rrjetë është më i madh për $\beta = 5.85$ (çiftim $g \sim 1/\beta$ më i dobët) se për $\beta = 5.7$ (ku çiftimi është më i fortë). Në kushtet e çiftimit të fortë (energji të ulta) në distanca të largëta kuark–antikuark pritet që tensioni i kordës bozonike të jetë më i madh. Këto rezultate ishin të pritshme për shkak të modelimit të potencialit pa izoluar vetëm gjëndjen bazë energjitike, duke marrë kontributin edhe të gjëndjeve të ngacmuara. Dihet se për kohë të gjata dhe për një numër sa më të madh të laqeve të marra në studim (kryesisht atyre për të cilat ndihet diferenca e *r* nga *t*) mund të izolohet gjëndja energjitike bazë pra potenciali statik kuark-antikuark. Për këtë arsye kemi provuar të bëjmë llogaritje të potencialit me përsëri laqe drejtkëndore të Wilsoni-it por për llogaritjen e potencialit janë marë në konsideratë *t* të fiksuar në vlera të mëdha. Simulimet për gjenerimin e laqeve tani janë bërë sipas Kodit A.3, Shtojca A, për rrjeta me madhësi 8^4, 12^4, 16^4, 20^4. Më poshtë po japim të tabeluara në Tabelën 3.3 rezultatet e marra. Kështu numri i laqeve të gjeneruar varet nga volumi i rrjetës së përdorur.

Tabelë 3.3 Vlerat e konstantes rrjetore a dhe tensionit të kordës a^2K me gabimet respektive të marra për rrjeta të ndryshme (*Rasti i laqeve drejtkëndore për t të fiksuar në vlerën maksimale*)

Rrjeta	Laqe të Wilson-it	Konstantja e çiftimit	Konstantja rrjetore *a*	Tensioni i kordës në njësi rrjetore a^2K	Gabimi *a*	Gabimi *K*
8^4	900	5.7	0.2003(83)	0.2524(52)	7.9370e-06	2.7e-03
12^4	2500	5.85	0.1262(53)	0.0975(12)	6.8974e-05	1.6e-02
16^4	3600	6	0.1032(31)	0.0411(19)	5.8115e-05	0.4e-02
20^4	8100	6.092	0.0761(06)	0.0280(44)	4.0815e-05	2.7e-03

Mund të llogarisim tani shkallën e teorisë. P.sh për rrjetën 16^4 rezultoi se distanca $\hat{K} = a^2K = 0.0411\ \ 19$. Dimë se tensioni i kordës i gjetur saktësisht nga eksperimenti është $K = (440MeV)^2$, kështu kemi

$$a = \sqrt{\frac{\hat{K}}{K}} = \frac{0.0411}{440MeV} = \left(\frac{\sqrt{0.0411}}{440}\right)MeV^{-1} = \left(\frac{0.2027}{440}\right)\cdot 200fm = 0.0921(36)fm \tag{III.8.4}$$



Figurë 3.13 Ekstrapolimi në limitin e vazhduar $a \to 0$ i tensionit të kordës për rastin e laqeve drejtkëndore për t të fiksuar në vlerën maksimale

Nga Figura 3.13 rezultoi se në limitin e vazhduar K = 3.33 (fm^{-2}) = $(200)^2$ x 3.33 $MeV^2 \approx$ $(365\ MeV)^2$ ndërkohë vlera e gjetur eksperimentalisht $K = (440MeV)^2$

3.8.3 Llogaritja e potencialit efektiv prej laqeve planare të Wilsoni-it në rrjetë

Referuar dhe rezultateve të mësipërme vazhduam me metodën standarte, atë të potencialeve efektivë (III.4.10). Ku për kohë të gjata potencialet efektive arrijnë një plato. Pikërisht këto potenciale përdoren për ti modeluar sipas (III.5.3). Si laqe të Wilsoni-it zgjodhëm laqet drejtkëndorë të gjeneruara në Kodin A.1, Shtojca A. U kryen simulime për secilën rrjetë 8^4, 12^4, 16^4 për 100 konfiguracione statistikisht të pavaruara. U llogaritën në Matlab/Octavë potenciali kuark-antikuark, parametrat që modelojnë potencialin, konstantja rrjetore si dhe gabimet respektive me Jacknife. Kodi i shkruar në Matlab jepet në Kodin A.4, Shtojca A. Më poshtë po japim të tabeluara rezultatet e marra për laqe të Wilsoni-it të gjeneruara nga Kodi 5 për rrjeta me volum 8^4, 12^4, 16^4 për 100 konfiguracione, me metodën e potencialeve efektive.

Tabelë 3.4 Vlerat e konstantes rrjetore *a* dhe tensionit të kordës a^2K me gabimet respektive të marra për rrjeta të ndryshme (*Rasti i laqeve drejtkëndore me metodën e potencialeve efektive*)

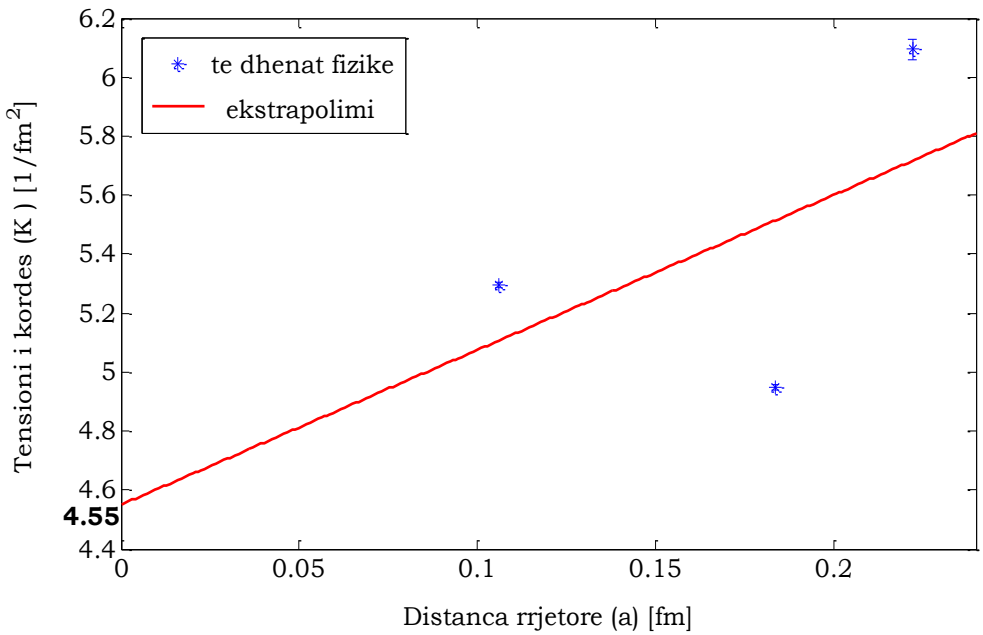
Rjeta	Konstantja e çiftimit β	Konstantja rrjetore *a*	Tensioni i kordës a^2K	Gabimi statistikor *a*	Gabimi statistikor i *K*
8^4	5.7	0.2221(83)	0.3009 (39)	9.6796(41)e-05	3.4427(74)e-02
12^4	5.85	0.1837(57)	0.16702(81)	3.4302(16)e-05	1.0552(22)e-02
16^4	6	0.1060(69)	0.0596(12)	6.1446(90)e-05	8.0894(26)e-03

Për të llogaritur shkallën e teorisë, zgjedhim një nga rrjetat p.sh për rrjetën 16^4 rezultoi se distanca $\hat{K} = a^2K = 0.0596\ \ 12$. Dimë se tensioni i kordës i gjetur saktësisht nga eksperimenti është $K = (440MeV)^2$, kështu kemi

$$a = \sqrt{\frac{\hat{K}}{K}} = \frac{0.0596}{440MeV} = \left(\frac{\sqrt{0.0596}}{440}\right)MeV^{-1} = \left(\frac{0.2441}{440}\right)\cdot 200fm = 0.1109(45)fm$$

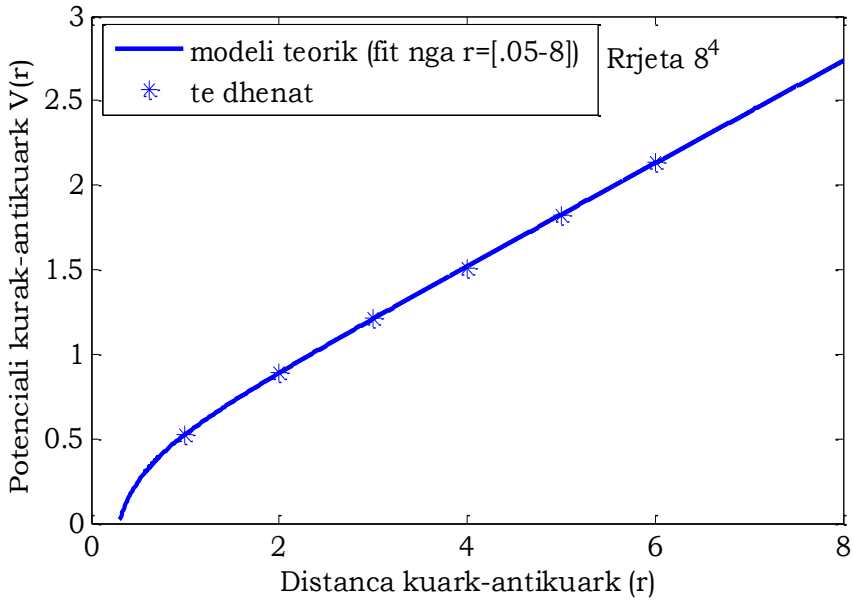
(III.8.5)

Pra u gjet që shkalla e teorisë nga llogaritjet e potencialit kuark antikuark me metodën efektive të jetë: $a = 0.1109(45)fm$. Kjo madhësi mund të zgjidhet si referencë pë të llogaritur madhësi të tjera rrjetore në njësi fizike, të njëjtat kushte llogaritëse (volumi i rrjetës, konstanten beta etj)

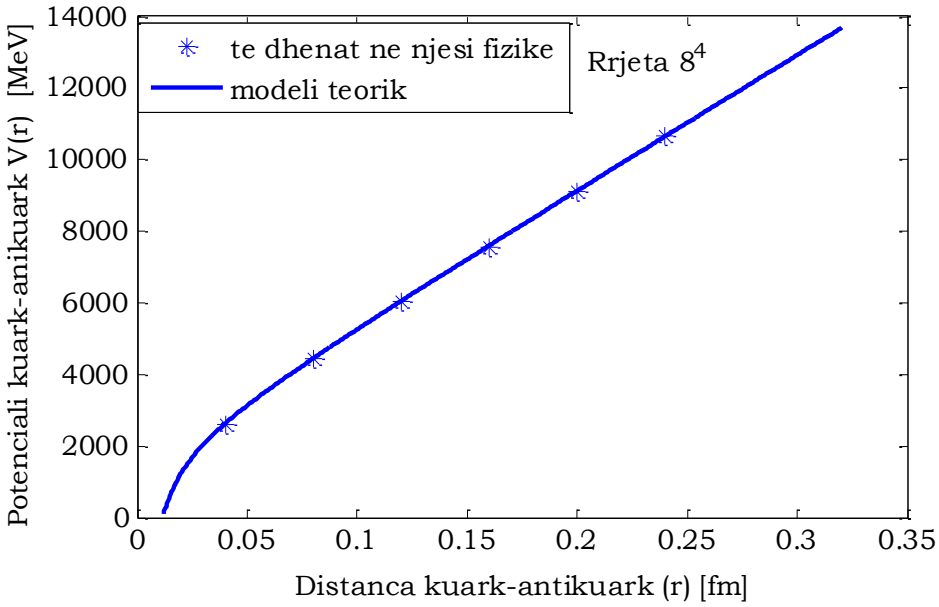


Figurë 3.14 Ekstrapolimi në limitin e vazhduar $a \to 0$ i tensionit të kordës për rastin e potencialeve efektive prej laqeve planare.

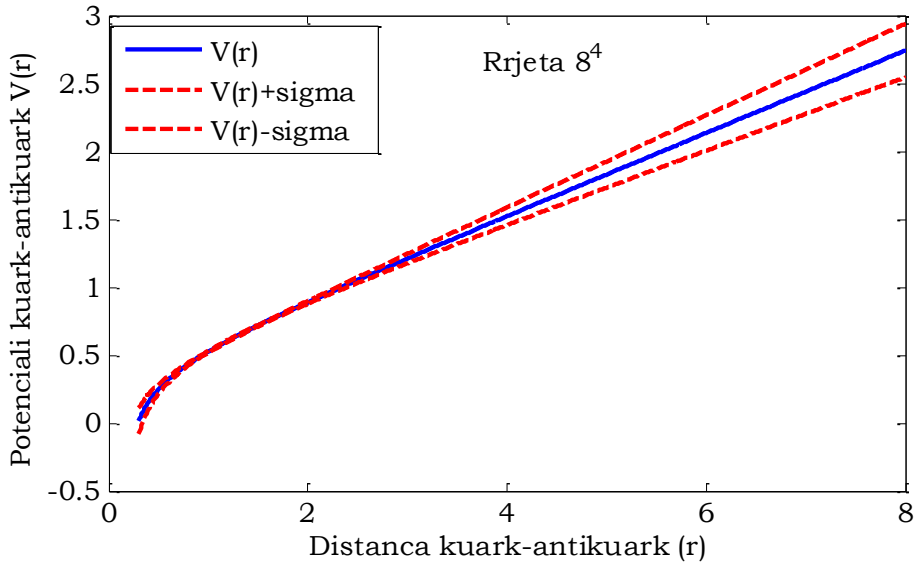
Nga Figura 3.14 rezultoi se në limitin e vazhduar K = 4.45 (fm^{-2}) = $(200)^2$ x 4.45 $MeV^2 \approx$ $(425\ MeV)^2$ pra shumë afër vlerës se gjetur eksperimentalisht $K = (440 MeV)^2$. Më poshtë jepen grafikët e potencialit efektiv prej laqeve drejtkëndore *r x t* të Wilson-it, për *r=t=1,...,6* , për rrjetat 8^4, 12^4, 16^4 (të gjeneruara prej *Kodit A.4, Shtojca A*).



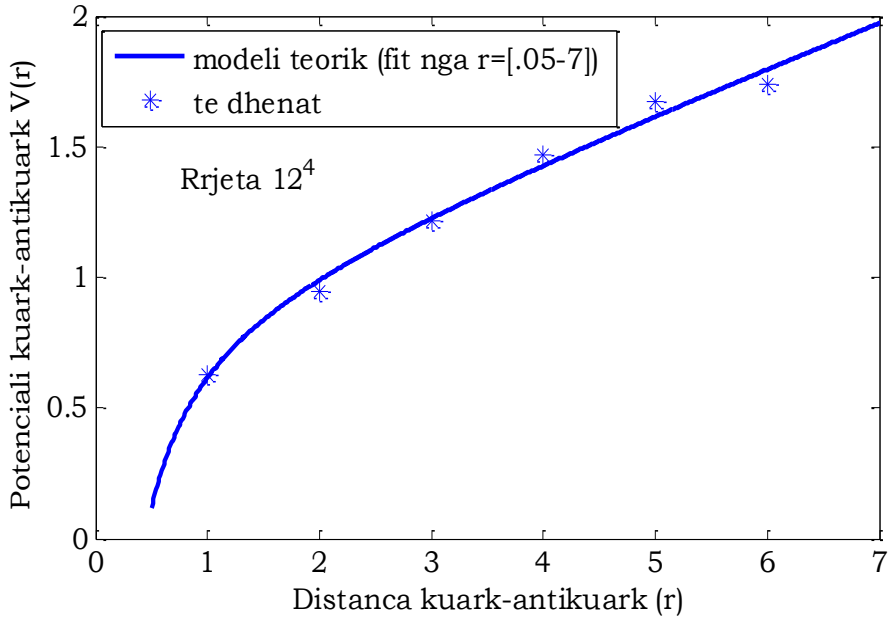
Figurë 3.14 Grafiku i të dhënave të llogaritura të potencialit efektiv kuark-antikuark në rrjetë 8^4 me beta = 5.7 i modeluar sipas atij teorik me koefiçentët e gjetur, në njësi rrjetore



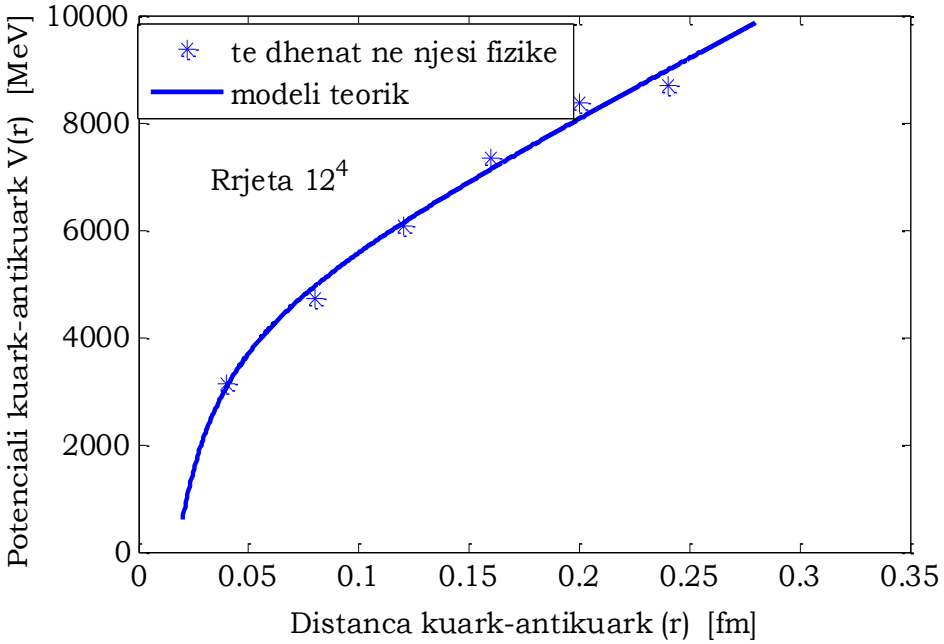
Figurë 3.15 Grafiku i të dhënave të llogaritura të potencialit efektiv kuark-antikuark nga laqet planare në rrjetë 8^4 me beta = 5.7 i modeluar sipas atij teorik me koefiçentët e gjetur, në njësi fizike



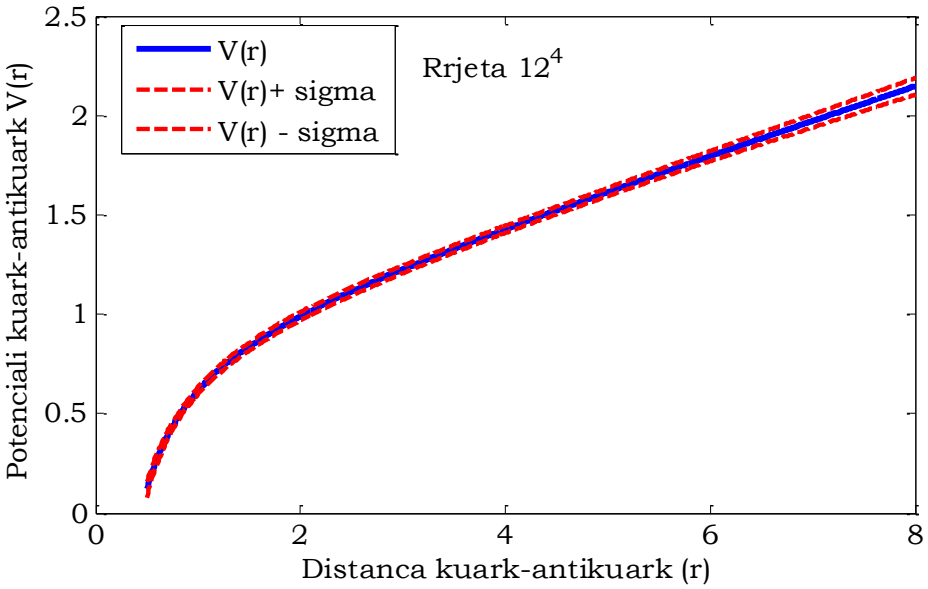
Figurë 3.16 Grafiku i potencialit efektiv kuark-antikuark të llogaritur në rrjetë 8^4 me beta =5.7 vija e drejtë, së bashku me kufijtë e gabimit të përcaktimit të tij (vijat e ndërprera) në njësi rrjetore.



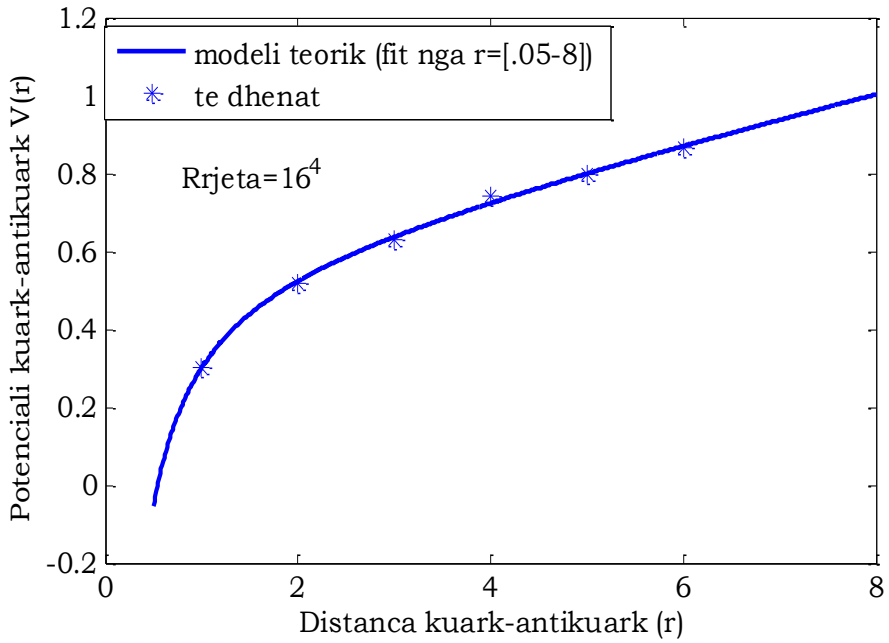
Figurë 3.17 Grafiku i të dhënave të llogaritura të potencialit efektiv kuark-antikuark nga laqet planare në rrjetë 12^4 me beta = 5.85 i modeluar sipas atij teorik me koefiçentët e gjetur, në njësi rrjetore



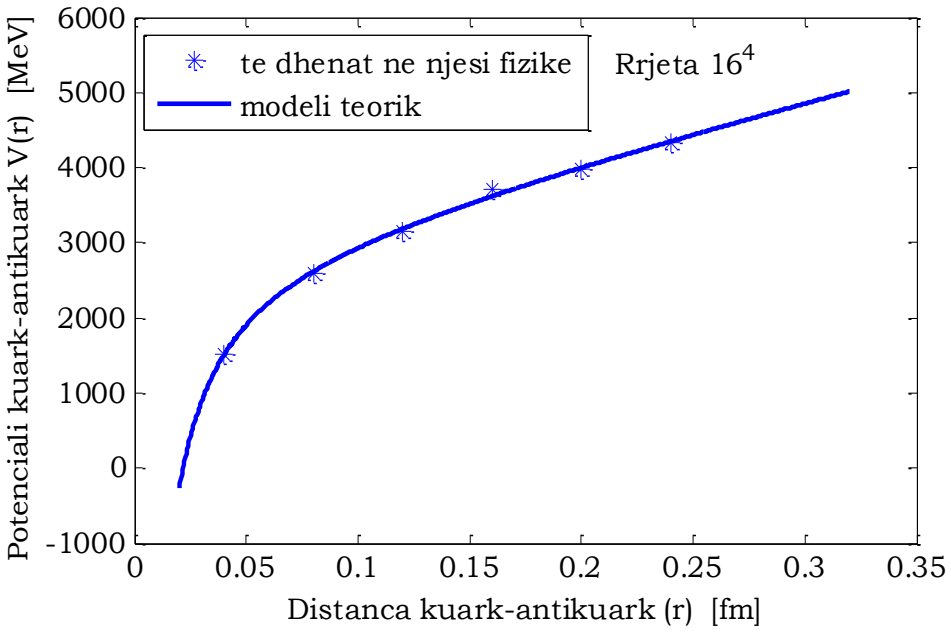
Figurë 3.18 Grafiku i të dhënave të llogaritura të potencialit efektiv kuark-antikuark nga laqet planare në rrjetë 12^4 me beta = 5.85 i modeluar sipas atij teorik me koefiçentët e gjetur, në njësi fizike.



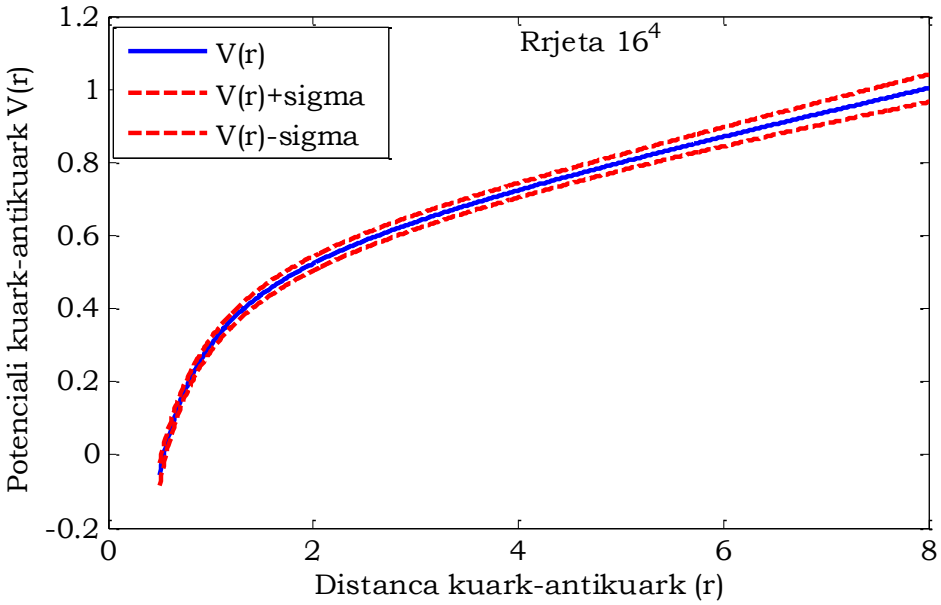
Figurë 3.19 Grafiku i potencialit efektiv kuark-antikuark të llogaritur në rrjetë 12^4 me beta =5.85 vija e drejtë, së bashku me kufijtë e gabimit të përcaktimit të tij (vijat e ndërprera) në njësi rrjetore.



Figurë 3.20 Grafiku i të dhënave të llogaritura të potencialit efektiv kuark-antikuark me laqe planare, në rrjetë 16^4 me beta = 6 i modeluar sipas atij teorik me koefiçentët e gjetur, në njësi rrjetore



Figurë 3.21 Grafiku i të dhënave të llogaritura të potencialit efektiv kuark-antikuark me laqe planare, në rrjetë 16^4 me beta = 6 i modeluar sipas atij teorik me koefiçentët e gjetur, në njësi fizike



Figurë 3.22 Grafiku i potencialit efektiv kuark-antikuark të llogaritur në rrjetë 16^4 me beta = 6 vija e drejtë, së bashku me kufijtë e gabimit të përcaktimit të tij (vijat e ndërprera) në njësi rrjetore.

Rezultatet e mësipërme në njësi rrjetore për t'i kthyer në njësi fizike kemi përdorur shkallën rrjetore të përcaktuar më lart për rastin e laqeve planare me metodën e potencialit efektiv. Konkretisht $\mathrm{V\ r}\left[\mathrm{MeV}\right] = \hat{\mathrm{V}} / a(fm) = \hat{\mathrm{V}} / a \times 200\left[\mathrm{MeV}\right]$, ($1MeV^{-1} \approx 200fm$), ndërsa $r(fm) = a \cdot \hat{r}$. Nga sjellja e potencialit statik kuark-antikuark për rrjeta të ndryshme, konfirmohen tiparet e teorisë kromodinamike kuantike. Duket qartë që me rritjen e distancës kuark-antikuark energjia që bashkon dy kuarket rritet linearisht, dukuri kjo që konfirmon *mbyllësinë e kuarkeve*. Për distanca të vogla potenciali sillet si $V(r) \sim 1/r$ (shpesh i referohemi si termi i Coulomb-it) dhe për distanca të mëdha $V(r) \sim r$, kemi tabllonë e kordës bozonike ku koefiçenti i proporcionalietit përcakton tensionin e kordës, i cili u mat në rrjetë dhe na ndihmoi për përcaktimin e shkallës të teorisë nga ku derivohen të gjitha madhësitë e tjera në njësi fizike.

3.8.4 Llogaritja e potencialit efektiv prej laqeve vëllimore të Wilsoni-it në rrjetë

Një tjetër lak i Wilsoni-it që mund të ndërtohet në rrjetë është ai vëllimor. Për të llogaritur potencialin efektiv ne kemi përdorur laqe vëllimore $W(r_1, r_2, t)$, me qëllim përmirësimin e rezultateve nga marrja në konsideratë e sa më shumë laqeve në rrjetë. Për këtë qëllim ndërtuam kodin përkatës në FermiQCD, Kodi A.5 ,Shtojca A. Kodi llogarit

216 laqe vëllimore të marrë prej të gjitha kombinimeve $r_1 = 1,...,6$, $r_2 = 1,...,6$ dhe $t = 1,...,6$, si psh laqet *1x1x1, 1x1x2, …….1x1x6, 1x2x1,1x2x2,…,1x2x6, …. 6x6x6* .

Algoritmi i këtij kodi ndjek këto hapa:

Hapi 1: Përfshi të gjitha libraritë e Fermiqcd

Hapi 2: Fillo komunikimet me mdp (matrix distributed process)

Hapi 3: Përcakto këta parametra

- Volumin e rrjetës
- Grupin e kalibrimit SU(n)
- Numrin e konfiguracioneve ose numrin e hapave Monte Carlo
- Konstanten e çifitimit (beta) e cila përcakton distancën rrjetore

Hapi 4: Krijo

- Një rrjetë 4-ër përmasore
- Një fushë kalibruese U
- Një konfiguracion fillestar të rastit

Hapi 5: Shumo sipas të gjithë hapave Monte Carlo ose sipas të gjithë konfiguracioneve

Hapi 6: Përcakto një udhë në rrjetë për të caktuar formën e lakut

Hapi 7: Bëj shumën sipas të gjithave udhëve të mundshme në planin $\mu\nu$

Hapi 8: Llogarit pjesën reale të gjurmës së produktit të renditur të lidhjeve $U_\mu(n)$ përgjatë udhës, pra laqet e Wilsonit

Hapi 9: Ruaj laqet e Wilsonit në një format .dat

Hapi 10: Mbyll komunikimet

Në total u gjeneruan 21600 laqe vëllimore për 100 konfiguracione në një rrjetë të fiksuar. Simulimet u përsëritën për 8^4, 12^4, 16^4. Metoda e llogaritjes të potencialit nga ai efektiv është njëlloj si rasti i laqeve drejtkëndore, por tani për të zgjedhur potencialet efektive ku arrihet platoja do fiksojmë çdo plan $r_1 \times r_2$. Më pas bëhet përafrimi sipas modelit (III.5.3), ku $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ dhe $V(r)_{eff}$ janë vlerat e përzgjedhura të potencialeve efektive. Si pasojë e fluktuacioneve të mëdha të fushave kalibruese me këto lloj laqesh, morrëm shumë raporte negative të njëpasnjëshme. Si rrjedhim morrëm shumë vlera imagjinare të potencialeve efektive. Për të shmangur këto vlera kemi bërë një përzgjedhje të tillë ku kemi përjashtuar të gjitha mundësitë e raporteve negative, si rrjedhim i kemi reduktuar ndjeshëm vlerat e potencialeve efektive. Përzgjedhja nga një rrjetë tek tjetra ndryshon, nuk mund të automatizohet. Gjithashtu nuk mund të përcaktojmë gabimet e koefiçentëve të modelit me metodën Jacknife pasi të dhënat fillestare nga ku niset Jacknife, modifikohen nga heqja e vlerave të përmendur më sipër pa ndonjë rregull fiks, kështu nuk mund të gjenden madhësitë e derivuara nga zgjedhjet e

reja që bën Jacknife. Për gjetjen e gabimeve kemi përdorur një metodë tjetër, *Lfit*, që jepet në Kodin A.7, Shtojca A. Parametrat hyrës të funksionit janë matrica *A* e koefiçentëve, *I* matricë diagonal njësi dhe *b* ana e djathtë e ekuacionit ose vlerat e laqeve të ngelura mbas përzgjedhjes. Në Kodin A.6, Shtojca A jepet kodi në Matlab/Octavë që përcakton koefiçentët e modelit, konstanten rrjetore si dhe formën grafike të potencialit kuark-antikuark me vlerat përfundimtare të mbetura. Rezultatet jepen në Tabelën 3.5.

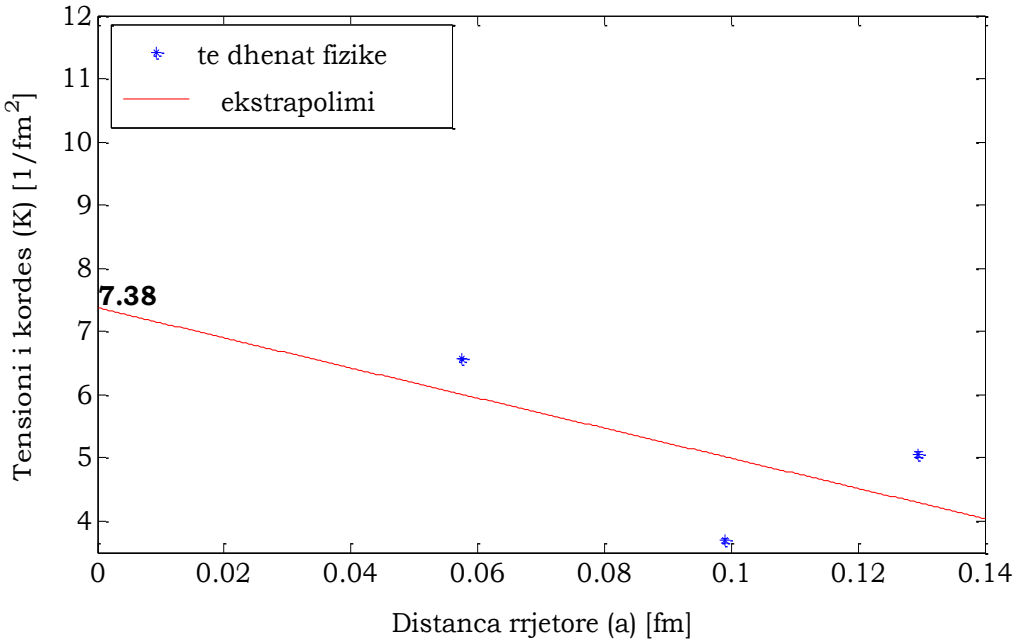
Tabelë 3.5 Vlerat e konstantes rrjetore a dhe tensionit të kordës a^2K dhe gabimet në vlerësimin e tensionit të kordës të marra për rrjeta të ndryshme (Rasti i laqeve vëllimore me metodën e potencialeve efektive)

Rjeta	Konstantja e çiftimit β	Konstantja rrjetore *a*	Tensioni i kordës a^2K	Gabimi statistikor a	Gabimi statistikor i *K*
8^4	5.7	0.1295(23)	0.08469(54)	6.092e-04	0.0335
12^4	5.85	0.0990(19)	0.03620(39)	3.323e-04	0.0226
16^4	6	0.0575(99)	0.0217(99)	5.427e-04	0.0044

Le të përcaktojmë shkallën për rastin e laqeve vëllimore p.sh duke zgjedhur rrjetën 16^4 njëlloj si në rastet me laqet planare. Kemi

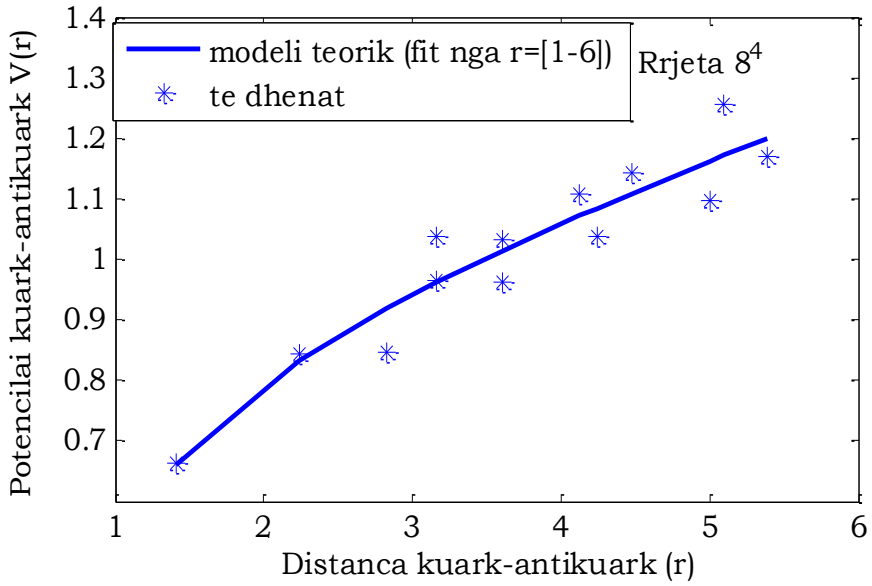
$$a = \sqrt{\frac{\hat{K}}{K}} = \frac{0.0217}{440MeV} = \left(\frac{\sqrt{0.0217}}{440}\right)MeV^{-1} = \left(\frac{0.1473}{440}\right)\cdot 200fm = 0.0669(58)fm \tag{III.8.6}$$

Pra u gjet që shkalla e teorisë nga llogaritjet e potencialit kuark antikuark me metodën efektive të jetë: $a = 0.0669(58)fermi$. Kjo madhësi mund të zgjidhet si referencë për të llogaritur madhësi të tjera rrjetore në njësi fizike, të njëjtat kushte llogaritëse (volumi i rrjetës, konstanten beta etj). Në Figurën 3.23 po japim ekstrapolimin e tensionit të kordës në limitin e vazhduar për laqet vëllimore

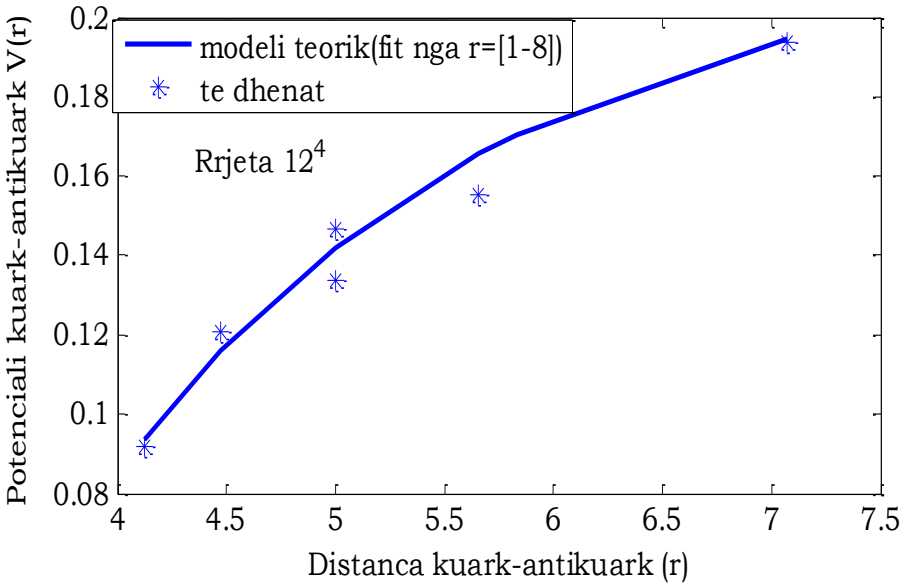


Figurë 3.23 Ekstrapolimi në limitin e vazhduar $a \to 0$ i tensionit të kordës për rastin e laqeve vëllimore të Wilsonit

Nga Figura 3.23 rezultoi se në limitin e vazhduar $\mathrm{K} = 7.38(fm^{-2}) = \ 200^{\ 2} * 7.38\ \mathrm{MeV}^2 \approx (543MeV)^2$, pra larg vlerës se gjetur eksperimentalisht $K = (440MeV)^2$



Figurë 3.24 Grafiku i të dhënave të llogaritura të potencialit efektiv kuark-antikuark me laqe vëllimore në rrjetë 8^4 me beta = 6 i modeluar sipas atij teorik me koeficentët e gjetur, në njësi rrjetore



Figurë 3.25 Grafiku i të dhënave të llogaritura të potencialit efektiv kuark-antikuark me laqe vëllimore në rrjetë 12^4 me beta = 6 i modeluar sipas atij teorik me koeficentët e gjetur, në njësi rrjetore

3.9 Përfundime

Së pari studimi i potencialit kuark-antikuark është thelbësor për të testuar veti të teorisë QCD në regjime të ulta energjitike (regjimet jo-perturbative). Një ndër këto tipare është mbyllësia e kuarkeve. Nga sjellja e potencialit statik kuark-antikuark u vu re dukshëm fakti se për distanca të largëta kuark-antikuark, potenciali rritet linearisht me distancën. Ky fakt konfirmon mosvrojtueshmërinë e kuarkeve si grimca të lira.

Së dyti studimi dhe llogaritja e potencialit kuark antikuark në teoritë e pastra kalibruese shërben për përcaktimin e shkallës së teorisë nga ku mund të konvertohen pastaj të gjitha madhësitë e tjera të llogaritura në rrjetë në madhësi fizike. Konkretisht tensioni i kordës që figuron në modelimin e potencialit merret si madhësi referencë pasi dihet saktësisht vlera e tij ekseperimentale. Krahësimi i vlerës eksperimentale të gjetur me atë të llogritur në rrjetë jep pikërisht koefiçentin që i lidh, distancën rrjetore ose shkallën e teorisë.

Së treti nga testimi i bërë për të llogaritur potencialin statik kuark antikuark prej laqeve të Wilsoni-it me forma të ndryshme dhe metoda të ndryshme, arritëm në përfundimin se metoda e potencialeve efektive është më efikase. Rezultatet më të mira u morrën me këtë metodë për laqet planare të Wilson-it. Problemi me laqet vëllimore lidhet me numrin e madh të laqeve vëllimore që duheshin gjeneruar dhe fluktuacioneve më të mëdha. Fushat kalibruese duhet të jenë mjaftueshmërisht të lëmuara që “sinjali” të jetë më i madh se “zhurma” në llogaritjet rrjetore. Laqe vëllimore fusin gabime të thyerjes së simetrisë së Lorentz-it.

Së katërti teknikat e llogaritjes në paralel janë mjaft efikase në llogaritjet e QCD-së rrjetore. Në simulimet në kompjuterat tonë individualë me rrjeta shumë të vogla 4^4 (të rralla) do duhej rreth 8 orë për të marrë laqe drejtkëndore (r = t =1...4) të Wilsoni-itpër 100 konfiguracione. Ndërkohë të njëjtës llogaritje në paralel do t’i duheshin disa sekonda. Kështu një drejtim i rëndësishëm ku duhet të fokusohemi për llogaritjet e ardhshme në QCD-në rrjetore janë llogaritjet në paralel.

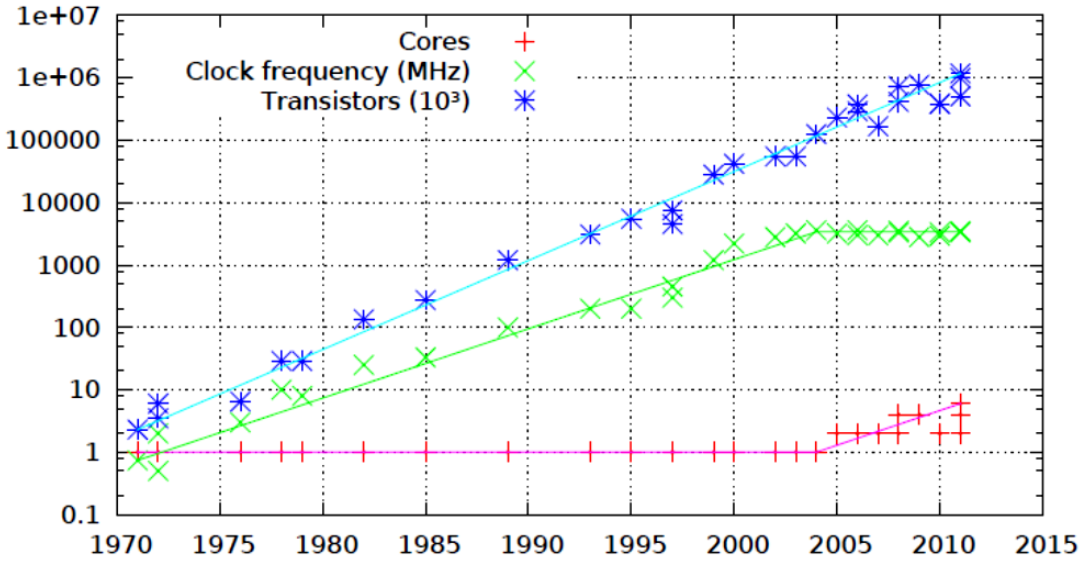
Së pesti softwari i zgjedhur për llogaritjet tona në paralel është një ndër softwaret më të mirë sot për sot në fushën e QCD-së rrjetore. Nga përshkrimi i tij theksuam thjeshtësinë por dhe nivelin e lartë të gjuhës së përdorur. Softwari përshkallëzohet shumë mirë deri për numër procesorësh të përdorur np=4. Koha kompjuterike e llogaritjes bie eksponencialisht me rritjen e numrit të proçesorëve të përdorur për një nyje, për një rrjetë të fiksuar.

Së gjashti kodet e reja të programuar në C++ me gjuhën e FermiQCD-së i shtohen listës së llogaritjeve që bën ky softwar në fushën e QCD-së rrjetore. Pra i jepet një kontribut teknikave të llogaritjes në paralel të QCD-së rrjetore.

KAPITULLI 4

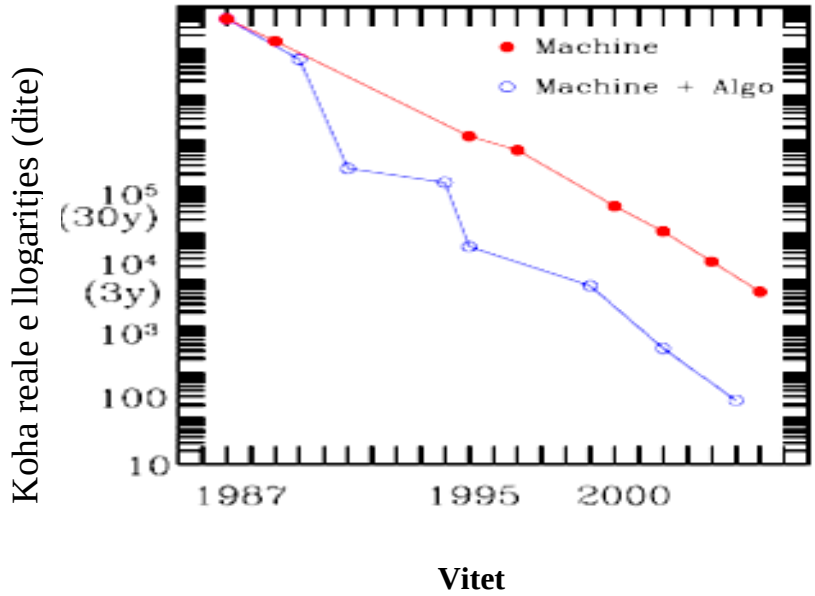
ALGORITME INVERTIMI

Menaxhimi dhe operimi me matrica të mëdha të dhënash është një problem i zakonshëm në shumë simulime fizike dhe nuk ndodh vetëm në rastin e Kromodinamikës Kuantike rrjetore. Përmirësimi i algoritmeve ekzistuese, optimizimi i numrit të iteracioneve si dhe koha e përgjithshme e kaluar për zgjidhjen e një sistemi linear ekuacionesh të bazuar në këto matrica janë mjaft të nevojshme pavarësisht nga fakti se fuqia e llogaritjes është ende në rritje.



Figurë 4.1 Ecuria e fuqisë kompjuterike llogaritëse në vite në simulimet numerike të QCD-së rrjetore. Duket se në ditët e sotme janë duke u përdorur më shumë tranzistorë në sa më shumë nyje llogaritëse në vënd të frekuencave të larta (Rappl, 2012).

Për shkak të përmirësimeve në proçesin e ndërtimit edhe më shumë tranzistorë mund të vendosen në të njëjtën hapësirë. Kjo sjell vendosjen e më shumë proçesorëve në një çip të vetëm llogaritës. Nga ana tjetër një rol të rëndësishëm në uljen e kostos llogaritëse në QCD-në rrjetore ka dhe optimizimi dhe zhvillimi i algoritmeve sa më efektivë. Në Figurën 4.2 jepet fitimi në kohë llogaritëse nga zhvillimi i fuqisë kompjuterike dhe algoritmike në vite. Rasti konkret paraqet kohën llogaritëse për simulime në rrjetë 64 x 32^3, për 5000 konfiguracione.



Figurë 4.2 Fitimi në kohë llogaritëse nga zhvillimi i fuqisë kompjuterike dhe algoritmike në vite. Rasti konkret paraqet kohën reale llogaritëse (në ditë) për simulime në rrjetë 64 x 32^3, për 5000 konfiguracione (Jansen, 2012)

Në këtë kapitull trajtojmë pikërisht problemin thelbësor në simulimet numerike të QCD-së rrjetore, problemin që lidhet me zhvillimin e algoritmeve sa më të shpejtë dhe efiçentë në zgjidhjen e sistemeve lineare me matrica të mëdha të dhënash.

4.1 Llogaritja e përhapësit të kuarkeve, një problem invertimi

Mbas përftimit të një numri të konsiderueshëm konfiguracionesh kalibruese statistikisht të pavarura, hapi tjetër në simulimet numerike të QCD-së rrjetore është llogaritja e përhapësit të kuarkeve sipas një konfiguracioni të caktuar fushash kalibruese. Një "përhapës" është amplituda e kuarkut për të lëvizur midis pikave të hapësirë-kohës. Kështu, në përgjithësi rezultatet për madhësi fizike merren duke llogaritur pritjen matematike:

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int DA_\mu \cdot O \cdot e^{-S} \qquad \text{(IV.1.1)}$$

ku O është çdo kombinim operatorësh i shprehur në produkt termash të renditur të fushave kalibruese dhe fermionike. Fushat e kuarkeve tek O janë, në praktikë, të rishprehura në funksion të përhapësit të kuarkeve duke përdorur teoremën e Wick-ut për të kontraktuar fushat. Elementi bazë për ndërtimin e madhësive fermionike është përhapësi i Feynman-it (Gupta, 1997)

$$S^F(y,j,b;x,i,a) = D^{-1}{}^{y,j,b}_{x,i,a} \qquad \text{(IV.1.2)}$$

ku D^{-1} është i anasjellti i operatorit të Dirak-ut i llogaritur në një fushë të dhënë. Kështu për një konfiguracion të fushave kalibruese, përhapësi i Feyman-it për kuarket është një matricë me tre indekse: *nyje, spin, ngjyrë*. Një element i kësaj matrice do jepte amplitudën e përhapjes së një kuarku nga nyja x me spin i dhe ngjyrë a tek nyja y me spin j dhe ngjyrë b. Për të ndërtuar funksionin e korrelimit duhet veprimi fermionik vetëm nga një nyje burim e caktuar tek të gjitha nyjet e rrjetës. Kjo korrespondon me 12 kolona (ose rreshta) të D^{-1} që lidhen me gradët e lirisë të spinit dhe ngjyrës.

Mbas diskretizimit të hapësirë-kohës, matrica e Dirakut bëhet e fundme dhe i anasjellti i tij mund të llogaritet numerikisht. *Invertimi i operatorit të Dirakut është hapi më i rëndësishëm në llogaritjet rrjetore të QCD-së dhe konsumon rreth 90% të ciklit të CPU*. Në rastin e simulimit të fermioneve kirale problemi kompleksohet edhe me tepër siç u përmend edhe në seksionin (fermione kirale ne rrjetë) për shkak të *formës matricore* mjaft të ndërlikuar të operatorit kiral të Dirakut në këtë rast. Problemet e simulimeve me fermione kirale rrjetore të QCD-së fokusohen në:

- *llogaritjen e operatorit kiral të Dirac-ut në rrjetë (në rastin tonë në formën e fermioneve të shkurtuara të mbulimit)*
- *invertimin e këtij operatori*

Kështu, sfida kryesore në simulimet numerike të QCD-së me fermione kirale është zgjidhja e një sistemi ekuacionesh lineare:

$$\sum_{a,j,x} D_{ij}^{ab}(x,y)\, x_j^b(y) = b_i^a(x) \qquad \text{(IV.1.3)}$$

ku D është operatori i Dirakut (në këtë rast operatori kiral i mbulimit) i cili ka indekset e ngjyrës $(a,b=1,...,3)$, spinit $(i,j=1,...,4)$, nyja (x,y) ndërsa $x_j(y)$ përhapësi i kuarkeve nga një nyje në një tjetër. Për shembull, në një rrjetë me vëllim 16^4, kompleksiteti i matricës D do të ishte $N = 3\times 4\times 16^4 = 785.432 \approx 10^6$. Pra në thelb në simulimet tona kërkohet zgjidhja e një sistemi linear jo-singular

$$Dx = b \qquad \text{(IV.1.4)}$$

ku $x,b \in \mathbb{C}^N$ dhe $D \in \mathbb{C}^{N\times N}$ është operatori i mbulimit të Neuberger-it i trajtuar në seksionin (2.6.1). Shumëzimi me D do të thotë të llogaritet i anasjellti i rrënjës katrore të një matrice të madhe dhe të rrallë.

Kështu, nga diskretizimi i operatorit kiral të Dirakut në rrjetë merret një matricë *e dëndur* dhe *komplekse* e rendit $N = 12N_1N_2N_3N_4$. Pra sa më të dëndura rrjetat aq më i madh rendi i kësaj matrice, si rrjedhim nevojiten më shumë burime llogaritëse. Duke qënë se simulimet përsëriten për një numër të konsiderueshëm konfiguracionesh kalibruese statistikisht të pavarura, rritet edhe më tepër nevoja për fuqi llogaritëse.

Ka tre mënyra thelbësore për të përmirësuar gjëndjen e llogaritjeve në QCD:

1. *rritja e fuqisë kompjuterike (hardware), kjo është alternativa më e shtrenjtë*
2. *përmirësimi i algoritmeve të invertimit dhe i atyre të simulimit (rasti i studimit të këtij disertacioni)*
3. *përmirësimi i formulimit të problemit në rrjetë, në mënyrë që të kryhen llogaritje me rezultate cilësore edhe në rrjeta të rralla.*

Së fundi, kompjuterat me arkitekturë paralele kanë qënë një nga drejtimet kryesore për të përmirësuar llogaritjet e QCD-së në rrjetë (Tripiçione, 1993), (Sexton, 1996). Por gjithashtu ka një progres të jashtëzakonshëm në zhvillimin e algoritmeve simulues efiçent (Duane *et. al.*, 1987), (Luscher, 1994) si dhe të algoritmeve të shpejtë invertues (Boriçi & Forcrand, 1994), (Frommer *et.al.*, 1994), (Frommer *et. al.*, 1995), (Fischer *et. al.*, 1996), (Boriçi & Allkoçi, 2006), (Xhako & Boriçi, 2011), (Xhako & Boriçi, 2014).

4.2 Metoda standarte të nënhapësirave të Krylov-it

Për zgjidhjen e sistemeve lineare të mëdha, me karakteristika të matricave që u përmendën më sipër ekzistojnë metoda standarte të testuara. Metodat optimale janë ato të nënhapësirave të Krylov-it. Konkretisht jemi të interesuar të zgjidhim sistemin jo-singular linear

$$Ax = b \tag{IV.2.1}$$

për matrica shumë të mëdha dhe të dendura me spektër kompleks me anë të një metode iterative. Në rastin konkret per matrica të dëndura dhe jo-singulare me kompleksitet $12N$ (N nyjet e rrjetës) si ato të operatorit të fermioneve kirale, metodat e dekompozimit LU (Boriçi & Forcrand, 1994), janë shumë të shtrenjta, të rendit $O(N^3)$. Nga ana tjetër iteracionet klasike si Jacobi, Gauss-Seidel, konvergjojnë ngadalë, të rendit $O(N^2)$ (Boriçi & Forcrand, 1994), atherë zgjidhja kërkohet si problem përafrimi, kjo do të thotë, gjej x si

$$x = \arg\min_{y \in \mathbb{C}^N} \|b - Ay\|_2 . \tag{IV.2.2}$$

Në fakt ky është një problem katrorësh më të vegjël. Zgjidhja standarte me anë të dekompozimit QR të matricës A (Boriçi & Forcrand, 1994) do të ishte e rendit $O(N^3)$. Si rrjedhim kjo metodë është efikase vetëm për sisteme të vogla. Kështu ne interesohemi për metoda iterative, ku A përdoret is operator. Është treguar se në këtë rast problemi (IV.2.3) mund të zgjidhet me metodën iterative të Arnoldit (Arnoldi, 1951). Një avantazh tjetër i kësaj të fundit ndaj dekompozimit QR është fakti se ky algoritëm mund të ndalohet më herët, me qëllim të një llogaritje të përafërt të (IV.2.1). Kjo ide çon në algoritmin GMRES (General Minimal Residual) (Saad & Schultz, 1986) që prodhon në iteracionin e i-të zgjidhjen x_i që kënaq

$$x_i = \arg \min_{y - x_0 \in \mathrm{K}_i^N} \|b - Ay\|_2 \qquad \text{(IV.2.3)}$$

ku K_i është një nënhapësirë i-përmasore, e quajtur nënhapsirë e i-të e Krylov-it e gjeneruar nga operatori matricor $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ dhe një vektor $v \in \mathbb{C}^N$, e cila është një hapësirë e tendosur nga vektorët

$$v, Av, ..., A^{i-1}v \qquad \text{(IV.2.4)}$$

Mund të shënohet si

$$\mathrm{K}_i\left(A, v\right) = span\left\{v, Av, ..., A^{i-1}v\right\} \subseteq \mathbb{C}^N \qquad \text{(IV.2.5)}$$

Ku vektori $v = r_0 = b - Ax_0$ është mbetja fillestare. Metodat iterative që gjenerojnë nënhapësira të tilla janë quajtur *metoda iterative të nënhapësirave të Krylov-it*.

4.2.1 Algoritmi i Arnold-it

Gjenerimi i bazës së Krylov-it realizohet me anë të algoritmit të Arnold-it. Implementimi i proçesit të Arnold-it kërkon rekurenca të gjata dhe është ndalues për sisteme të mëdha. Metoda iterative e Arnold-it jepet nga algoritmi i mëposhtëm:

Algoritëm 1: Metoda e Arnold-it

$$\begin{aligned}
& v \in \mathbb{C}^N, q_1 = v / \|v\|_2 \\
& for \quad i = 1, 2, 3... \\
& \quad v = Aq_i \\
& for \quad j = 1, ..., i \\
& \quad h_{ji} = q_j^{\dagger} v \\
& \quad v = v - q_j h_{ji} \\
& \quad h_{i+1,i} = \|v\|_2 \\
& \quad q_{i+1} = v / h_{i+1,i}
\end{aligned} \qquad \text{(IV.2.6)}$$

Vihet re iteracioni Arnoldi mbaron kur plotësohet kushti $h_{i+1,i} = 0$. Le të jetë Q_i matrica e ndërtuar nga vektorët $q_1, ..., q_i$ dhe $\tilde{H}_i$ një matricë e sipërme e Hesenberg-ut me përmasa $\left(i+1\right) \times i$ e përbërë nga elementët h_{ij}. Atherë mbas i hapash të Arnold-it do të kemi (AB-thesis)

$$AQ_i = Q_{i+1}\tilde{H}_i, \qquad Q_{i+1}^{\dagger} Q_{i+1} = I \tag{IV.2.7}$$

Nga ku mund të marrim

$$H_i = Q_i^{\dagger} A Q_i \tag{IV.2.8}$$

ku H_i merret nga $\tilde{H}_i$ duke hequr rreshtin e saj të fundit. Ekuacioni i fundit tregon se H_i është projeksioni i matricës A në hapësirën K_i në lidhje me bazën ortonormale $q_1,...,q_i$.

4.2.2 Algoritmi i Lanczos-it

Metoda iterative e Lanczos-it simetrik është analoge me atë të Arnold-it për matrica hermitiane A. Ajo mund të derivohet thjesht nga metoda iterative e Arnold-it. Projeksioni ortogonal i A në nënhapëisrën K_i do të jetë një matricë tridiagonale simetrike

$$T_i = Q_i^{\dagger} A Q_i \tag{IV.2.9}$$

Në fakt, prej (IV.2.8) rrjedh se në qoftë se A është hermitiane, H_i është hermitiane gjithashtu dhe njëkohësisht një matricë e sipërme Hessenberg-u. Kështu në këtë metodë H_i është një matricë tridiagonale, të cilën e quajmë tani T_i. Meqënëse elementët e subdiagonales të H_i, $h_{j+1,j}$, $j = 1,...,i$ janë reale, matrica tridiagonale T_i është reale dhe simetrike. Në qoftë se shënojmë elementët e diagonales $\alpha_1,....,\alpha_i$ dhe elementët e mbidiagonales me $\beta_1,...,\beta_{i-1}$. Atherë algoritmi i Lanczos-it simetrik mund të shkruhet si

---

Algoritëm 2: Metoda e Lanczos-it

$$\begin{aligned}
&\beta_0 = 0, q_0 = 0, v \in \mathbb{C}^N, q_1 = v / \|v\|_2 \\
&for \qquad i = 1, 2, 3, ... \\
&\quad v = Aq_i \\
&\quad \alpha_i = q_i^{\dagger} v \\
&\quad v = v - q_i \alpha_i - q_{i-1}\beta_{i-1} \\
&\quad \beta_i = \|v\|_2 \\
&\quad q_{i+1} = v / \beta_i
\end{aligned} \tag{IV.2.10}$$

4.3 Algoritme invertimi optimale të operatorit kiral (GMRES, CGNE, SHUMR)

Metoda iterative e Arnold-it është përdorur në algoritmin GMRES (Generalized Minimal Residual) (Saad & Schultz 1986) për zgjidhjen e një sistemi linear jo-singular të formës (IV.2.1). Zgjidhja e përafruar x_i mbas i hapash është nga $x_0 + \mathrm{K}_i$ zgjidhja më e mirë në një këndvështrim katrorësh më të vegjël:

$$\|b - Ax_i\|_2 = \min_{x - x_0 \in \mathrm{K}_i} \|b - Ax\|_2 , \qquad \text{(IV.3.1)}$$

ku K_i është hapësira e i-të e Krylov-it e gjeneruar prej A nga mbetja fillestare

$$r_0 = b - Ax_0 \qquad \text{(IV.3.2)}$$

Nga ku kemi

$$x_i = x_0 + Q_i y_i \qquad \text{(IV.3.3)}$$

për $y_i \in \mathbb{C}^i$. Mund të shkruhet norma e vektorit të i-të të mbetjeve

$$r_i = b - Ax_i \qquad \text{(IV.3.4)}$$

si

$$\|r_i\|_2 = \|r_0 - AQ_i y_i\|_2 \qquad \text{(IV.3.5)}$$

Këtu, GMRES përdor iteracionin e Arnoldi-it, i cili ndërton vektorin e rradhës q_{i+1} të bazës, ortogonal me gjithë të parët. Duke përdorur (IV.2.7) merret

$$\|r_i\|_2 = \|r_0 - Q_{i+1}\tilde{H}_i y_i\|_2 = \left\|Q_{i+1}\left(\rho_0 e_1 - \tilde{H}_i y_i\right)\right\|_2 = \|\rho_0 \,|\, e_1 - \tilde{H}_i y_i\|_2 \qquad \text{(IV.3.6)}$$

ku $\rho_0 = \|r_0\|_2$ dhe $e_1 \in \mathbb{C}^{i+1}$ është vektori njësi $(1, 0, ..., 0)^T$. Ekuivalenca e fundit tregon se mbas i hapash iteracionesh Arnoldi, problemi fillestar i minimizimit (IV.3.5) reduktohet në një problem më të vogël katrorësh më të vegjël. Ky problem mund të zgjidhet nga faktorizimi QR i matricës së sipërme të Hessenberg-ut. Kjo çon në algoritmin e mëposhtëm

---

Algoritëm 3: Algoritmi GMRES

$$
\begin{aligned}
& x_0 \in \mathbb{C}^N, r_0 = b - Ax_0, q_1 = r_0 / \rho_0 \\
& for \quad i = 1, 2, 3, \ldots \\
& \quad v = Aq_i \\
& \quad for\ j = 1, to, i \\
& \qquad h_{ji} = q_j^{\dagger} v \\
& \qquad v = v - q_j h_{ji} \\
& \qquad h_{i+1,i} = \|v\|_2 \\
& \qquad q_{i+1} = v / h_{i+1,i} \\
& \qquad y_i = \arg \quad \min_{y \in \mathbb{C}^i} \left\| \rho_0 e_1 - \tilde{H}_i y \right\|_2 \\
& \qquad x_i = x_0 + Q_i y_i
\end{aligned}
\tag{IV.3.7}
$$

Kur matrica A është hermitiane dhe pozitive përfundimisht mund të minimizohet funksioni

$$
f(x) = x^{\dagger} A x - x^{\dagger} b - b^{\dagger} x \tag{IV.3.8}
$$

me $x \in \mathbb{C}^N$. Kjo është ekuivalente me problemin e katrorëve më të vegjël me koefiçentë peshe

$$
\min_{x \in \mathbb{C}^N} \|b - Ax\|_{A^{-1}} = \min_{x \in \mathbb{C}^N} (b - Ax)^{\dagger} A^{-1} (b - Ax) \tag{IV.3.9}
$$

Zgjidhja e vetme e këtij problemi është $x = A^{-1} b$. Në qoftë se përdoren iteracionet e Lanczos-it për të projektuar sistemin linear në çdo hap i në nënhapësirën e Krylov-it $\mathrm{K}_i(A, r_0)$, arrihet tek algoritmi i Gradientëve të Konjuguar (CG- Conjugate Gradient)

Algoritëm 4: Algoritmi CG

$$
\begin{aligned}
&\beta_0 \in \mathbb{C}^N, q_0 = 0, x_0 \in \mathbb{C}^N, r_0 = b - Ax_0, q_1 = r_0 / \rho_0 \\
&for \quad i = 1, 2, 3, \ldots \\
&\quad v = Aq_i \\
&\quad \alpha_i = q_j^{\dagger} v \\
&\quad v = v - q_i \alpha_i - q_{i-1} \beta_{i-1} \\
&\quad \beta_i = \|v\|_2 \\
&\quad q_{i+1} = v / \beta_i \\
&\quad y_i = T_i^{-1} \rho_0 e_1 \\
&\quad x_i = x_0 + Q_i y_i
\end{aligned}
\tag{IV.3.10}
$$

---

ku T_i është matrica tridiagonale simetrike e marrë nga $\tilde{T}_i$ duke hequr rreshtin e saj të fundit. Nga (IV.3.9) shihet se algoritmi CG minimizon gabimin $A^{-1}b - x$ në normën e A.

Algoritmi CGNE

Meqënese operatori i Dirakut në rrjetë, D, nuk është as pozitiv e as Hermitian shpesh llogaritet një operator i dhënë nga $A = D^* D$ dhe zgjidhet *sistemi i ekuacioneve normale*

$$D^* D x = D^* b \tag{IV.3.11}$$

Në këtë mënyrë merret ai që quhet algoritmi CGNE (Conjugate Garadients on Normal Equations). Ashtu si me algoritmin standart të CG, n.q.se jepet një x_0 e përafruar, algoritmi llogarit mbetjen fillestare r_0,

$$r_0 = b - Dx_0 \tag{IV.3.12}$$

dhe inicializon p_0 në r_0. Gjithashtu, inicializohet një vektor i ri s_0 duke përdorur $s_0 = D^* r_0$. Rekursionet e algoritmit CGNE janë

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_i + \alpha_i p_i \\
r_{i+1} &= r_i - \alpha_i D p_i \\
p_{i+1} &= s_{i+1} + \beta_{i+1} p_i
\end{aligned}
\tag{IV.3.13}
$$

ku

$$s_{i+1} = D^* r_{i+1}, \qquad \alpha_i = \frac{s_i^* s_i}{(Dp_i)^* (Dp_i)}, \qquad \beta_{i+1} = \frac{s_{i+1}^* s_{i+1}}{s_i^* s_i} \tag{IV.3.14}$$

Algoritmi SHUMR

Algoritmi SHUMR është zhvilluar dhe testuar si një algoritëm që ndjek një strategji të minimizimit të mbetjes. Ashtu si për algoritmet e mësipërme pika e fillimit është nënhapësira e Krylov-it K_i. Ndryshe nga algoritmet e tjera këtu në vënd që të projektohet vektori i mbetjeve, kërkohet minimumi i normës së tij në këtë nënhapësirë. Nëqoftë se kjo zgjidhje shënohet me $\tilde{x}_i$ atherë mund të shkruhet formalisht si zgjidhje e një problemi të katrorëve më të vegjël nga:

$$\tilde{x}_i = \arg\min_{x \in \mathrm{K}_i} \|b - Dx\|_2 \qquad \text{(IV.3.15)}$$

Duke kërkuar $x = Q_i y$ dhe duke përdorur relacionin për mbetjet $r_i = Q_i e_1 - Q_{i+1}\left(c_1 \tilde{\mathrm{I}}_i + c_2 \hat{L}_i U_i^{-1}\right) y_i$, (Boriçi & Allkoçi, 2006) merret:

$$\tilde{y}_i = \arg\min_{y \in \mathbb{C}^i} \left\| Q_{i+1}[e_1 - \left(c_1 \tilde{\mathrm{I}}_i + c_2 \hat{L}_i U_i^{-1}\right) y] \right\|_2 \qquad \text{(IV.3.16)}$$

Meqënëse vektorët e Arnold-it janë ortonormalë, matrica Q_{i+1} mund të neglizhohet dhe kështu merret një problem më i vogël i katrorëve më të vegjël. Ndërkohë nga matrica $\tilde{H}_i = \hat{L}_i U_i^{-1}$ që ka kolona ortonormale mund të ndiqet një strategji për të pëftuar algoritëm me rekurenca të shkurtra, konkretisht që përfshin një matricë tridiagonale. Në këtë mënyrë zgjidhja e problemit më të vogël në këtë rast jepet nga:

$$\tilde{z}_i = \arg\min_{z \in \mathbb{C}^i} \left\| e_1 - \left(c_1 U_i + c_2 \hat{L}_i\right) z] \right\|_2, \qquad \tilde{y}_i = U_i \tilde{z}_i \qquad \text{(IV.3.17)}$$

ku

$$c_1 U_i + c_2 \hat{L}_i = \begin{pmatrix} T_i \\ \nu e_i^T \end{pmatrix} \equiv \tilde{T}_i, \qquad \nu = c_2 l_{i+1,i} \qquad \text{(IV.3.18)}$$

Ndahet vektori i zgjidhjeve si vijon:

$$\tilde{z}_i = z_i + \xi_i \qquad \text{(IV.3.19)}$$

Ku

$$\xi_i = \arg\min_{\xi \in \mathbb{C}^i} \left\| \nu \alpha_i e_{i+1} + \tilde{T}_i \xi \right\|_2 . \qquad \text{(IV.3.20)}$$

Ky problem katrorësh më të vegjël zgjidhet me anë të faktorizimit QR të matricës $\tilde{T}_i$:

$$\tilde{T}_i = O_i^* \tilde{R}_i, \qquad \tilde{R}_i = \begin{pmatrix} R_i \\ 0 \end{pmatrix} \tag{IV.3.21}$$

ku O_i është një matricë unitare $i+1 \times i+1$ dhe R_i një matricë tridiagonale e sipërme. Si rrjedhim merret

$$\xi_i = \arg\min_{\xi \in \mathbb{C}^i} \left\| v\alpha_i O_i e_{i+1} + \tilde{R}_i \xi \right\|_2 . \tag{IV.3.22}$$

Ashtu siç përdoret shpesh në këto raste, matrica unitare mund të ndërtohet duke përdorur rrotullimet e Givens. Në hapin e i-të ajo mund të shkruhet si

$$O_i = G_i \begin{pmatrix} O_{i-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G_i = \begin{pmatrix} I_{i-1} & & \\ & c_i & s_i \\ & -\tilde{s}_i & c_i \end{pmatrix}, \qquad c_k^2 + |s_k|^2 = 1 \tag{IV.3.23}$$

Nga ku:

$$O_i e_{i+1} = s_i e_i + c_i e_{i+1} \tag{IV.3.24}$$

i cili jep

$$\min_{\xi \in \mathbb{C}^i} \left\| v\alpha_i O_i e_{i+1} + \tilde{R}_i \xi \right\|_2 = \min_{\xi \in \mathbb{C}^i} \left\| v\alpha_i s_i e_i + R_i \xi \right\|_2 + \left| v\alpha_i c_i \right| \tag{IV.3.25}$$

Ana e djathtë është minimale në qoftë se termi i saj i parë është minimal. N.qse pranohet se R_i ka rank të plotëatherë ky term zhduket dhe si rrjedhim zgjidhja jepet nga:

$$\xi_i = -R_i^{-1} e_i v\alpha_i s_i \tag{IV.3.26}$$

Atherë zgjidhja për problemin origjinal shkruhet si:

$$\tilde{x}_i = Q_i U_i z_i + Q_i U_i \xi_i = x_i + Q_i U_i \xi_i \equiv x_i + \hat{x}_i \tag{IV.3.27}$$

ku

$$\hat{x}_i = -Q_i U_i R_i^{-1} e_i v\alpha_i s_i \tag{IV.3.28}$$

Për thjeshtimin e shprehjes përcaktohet matrica P_i:

$$P_i = \left[p_1, ..., p_i \right] = Q_i U_i R_i^{-1} \qquad \text{(IV.3.29)}$$

dhe shënohet $\omega_i = v\alpha_i s_i$. Si rrjedhim merret:

$$\hat{x}_i = -\omega_i p_i \qquad \text{(IV.3.30)}$$

Për ta kompletuar algoritmin duhen shkruar rekurencat në p_i. Duke shfrytëzuar barazimin $P_i R_i = Q_i U_i$ merret:

$$p_i \mu_i + p_{i-1}\varepsilon_i + p_{i-2}\theta_i = q_i + q_{i-1}u_{i-1,i} \qquad \text{(IV.3.31)}$$

ku $\mu_i, \varepsilon_i, \theta_i$ shënohen vlerat e ndryshme nga zero të kolonës së fundit të R_i. Nga ky ekuacion merret:

$$p_i = \left(q_i + q_{i-1}u_{i-1,i} - p_{i-1}\varepsilon_i - p_{i-2}\theta_i \right) / \mu_i \qquad \text{(IV.3.32)}$$

Ekuacioni i fundit kompleton përshkrimin e metodës, të quajtur SHUMR. Rezulton se algoritmi SHUMR është algoritmi më optimal për sisteme lineare të zhvendosura, siç është rasti i operatorit kiral të mbulimit.

4.4 Algoritmi i Multirrjetave

Ideja e përdorimit të rrjetave të shumëfishta ose multirrjetave mund të kuptohet duke marrë në konsideratë veprimin e një invertuesi të Krylov-it mbi mbetjen $r = Ax - b$, ku siç është përmendur dhe më sipër b është një vektor burim, A është operatori i zgjedhur që përfaqson fermionet në rrjetë dhe x është një zgjidhje e propozuar fillestare. Gjatë çdo hapi të zgjidhësit të Krylov-it, vektori i zgjidhjeve x update-ohet prej madhësish që zerojnë ose konjugojnë mbetjen përgjatë drejtimeve të caktuara në hapësirën e Krylov-it. Hapësira e Krylov-it popullohet nga vektorë të shumëzuar me fuqitë e matricës A, kështu vlerat vehtjake të mëdha të vektorit do të shtohen. Si rrjedhim, mbetja do të deçiftohet shumë shpejt në mode të gjata/shkurta, por modet e ulta do të ndikohen pak nga update-imet, thuhet ndryshe se zgjidhësit e Krylov-it vuajnë nga ***ngadalësimi kritik.*** Megjithatë ne mund ta zgjidhim problemin duke krijuar një rrjetë të re më të rrallë në të cilën modet e gjata nuk janë më dhe aq të gjata. Duke operuar në një rrjetë të tillë më të rrallë, i njëjti zgjidhës i Krylov-it do të ishtë më efiçient në eliminimin e modeve të ulta nga mbetja. Në qoftë se gjendet që zgjidhësi i rrjetës së rrallë është ende i ngadaltë, e gjithë procedura mund të përsëritet në një rrjetë akoma më të rrallë, derisa ngadalësimi kritik të eliminohet. Ideja e krijimit të një rrjete të rrallë qëndron në përcaktimin dhe përdorimin e dy operatorëv të rinj të quajtur: operatori i reduktimit (restrictor) R i cili redukton vektorët nga rrjeta e dendur në rrjetën e rrallë dhe operatori i interpolimit (prolongtor) P i cili kryen funksionin e anasjelltë. Thelbi i algoritmit të multirrjetave është reduktimi i problemit në një rrjetë më të rrallë ku ai mund të zgjidhet më

efektivisht. I gjithë proçesi mund të vizualizohet si një "zbritje" në një rrejtë më të rrallë, duke u pasuar nga një "ngjitje" drejt rrejtës së dendur, një proçes i njohur si cikli V. Një cikël V i aplikuar për të zgjidhur problemin $Ax = b$ konsiston në 5-hapa kryesore:

Hapi 1: Apliko n_1 iteracione të një zgjidhësi S_1 në rrjetën e dendur :

$$x_1 = S_1^{n_1}\left(A, b\right)$$

Hapi 2: Redukto mbetjen në rrjetën e rrallë:

$$b_2 = R\left(b - Ax_1\right)$$

Hapi 3: Apliko n_2 iteracione të një zgjidhësi S_2 në rrjetën e rrallë:

$$x_2 = S_2^{n_2}\left(RAP, b_2\right)$$

Hapi 4: Interpolo korigjimin, shtoja zgjidhjes së parë dhe përcakto mbetjen e korigjuar:

$$b_3 = b - A\left(Px_2 + x_1\right)$$

Hapi 5: Apliko n_3 iteracione të një zgjidhësi S_3 në rrjetën e dendur:

$$x = x_1 + Px_2 + S_3^{n_3}\left(A, b_3\right)$$

I shprehur në këtë formë, algoritmi i multirrjetave ka tendencën e reduktimit ne rrjeta edhe më të rralla edhe brënda zgjidhësave në rrjetën e rrallë, si për shembull zgjidhësi S_2 në vetvete mund të jetë një cikël V, duke formuar kështu një proçes tre-nivelesh të quajtur një W - cikël. Një rezultat i rëndësishëm i kësaj vetie të reduktimit është se algoritmet e rrjetave të shumëfishta mund të largojnë ngadalësimin kritik në çdo rast. Në rastet kur një zgjidhës multirrjetë prej një cikli nuk mund të largojë ngadalësimin kritik, për shkak të divergjencës të numrit të iteracioneve të nevojitura në rrjetën e rrallë, mund të shtohet një tjëtër cikël akoma më i rrallë. Gjetja e nënhapësirës më të mirë për nivelin e rrjetës së rrallë është një pjesë e rëndësishme e algoritmit të multirrjetave. Qartësisht nënhapësira më e perdorur do ishte ajo që përmban vektorët vehtjakë që i korrespondojnë vlerave vehtjake më të vogla të operatorit. Këta vektorë ndahen lehtësisht në blloqe që i korrespondojnë nyjeve të rrjetës së rrallë dhe nënhapësira e nivelit të rrallë përbëhet nga e gjithë hapësira e tendosur nga këta blloqe vektorësh. Kjo është një hapësirë shumë herë më e madhe se ajo e tendosur nga vektorët në vetvete.

Në studimin tonë duam të përfshijmë dhe zhvillojmë algoritmin e multirrjetave për të simuluar fermionet kirale ose fermionet në trajtën e fermioneve të mureve domenore në QCD-në rrjetore. Aplikime të algoritmit të multirrjetave në simulimet numerike të QCD-së rrjetore gjenden gjithashtu në (Ben-Av, 1991), (Brower et. al., 1991), (Brandt, 1992), (Ben-Av *et. al.*, 1993), (Hasenfratz , 1998).

Në këtë kapitull të këtij disertacioni zhvillohet ideja e algoritmit të mulitrrjetave i reduktuar në atë me dy rrjeta për invertimin e fermioneve kirale.

4.4 Zhvillimi i algoritmit me dy rrjeta për invertimin e operatorit të mbulimit në SU(3)

Një mënyrë efikase e zgjidhjes së sistemeve lineare që burojnë prej barazimeve diferenciale në rrjetë, është ajo e përdorimit të Rrjetave të Shumëfishta (Press *et. al.*, 2007). Me qëllim përshpejtimin e zgjidhjes në rastin e simulimeve të fermioneve kirale në rrjetë kemi zhvilluar *algoritmin me dy rrjeta.* Konkretisht, përdorimi i algoritmit me dy rrjeta ka si synim të reduktojë mbetjen në një rrjetë më të rrallë se rrjeta mbi të cilën kërkohet zgjidhja e problemit; të zgjidhë problemin në rrjetën më të rrallë dhe të interpolojë zgjidhjen në rrjetën e dendur, pra në rrjetën origjinale. Këto hapa iterohen derisa norma e mbetjes të bëhet më e vogël se një tolerancë e paracaktuar. Ne kemi implementuar algoritmin e mësipërm në rastin e operatorit kiral të Dirakut në rrjetë, operatorin e mbulimit të Neuberger-it. Në mënyrë që të përdoret algoritmi i rrjetave të shumëfishta në rastin tonë, shfrytëzohet njëvlefshmëria e operatorit të mbulimit me atë të fermioneve të shkurtuara të mbulimit në 5-përmasa hapësinore-kohore Euklidiane. Kështu sistemi i rrjetës së rrallë

$$D^{(N_5)} y = r, \qquad \text{(IV.3.33)}$$

mund të merret prej zgjidhjes së sistemit 5-përmasor:

$$M_{TOV}(m_q) P \chi = M_{TOV}(1) P \eta, \qquad \text{(IV.3.34)}$$

me P shënojmë matricën e përkëmbimit. Nga vektorët χ dhe η, $\chi = (y, \chi^{(2)}, ..., \chi^{(N_5)})^T$ dhe $\eta = (r, o, ..., o)^T$, përcaktohen pikërisht vektorët y dhe r të sistemit të rrjetës së rrallë.

Më poshtë po japim algoritmin me dy rrjeta që kemi ndërtuar për zgjidhjen e këtij problemi:

ALGORITMI TWO-GRID. Algoritmi me dy rrjeta për invertimin e operatorit të Neuberger-it në SU(3)

Le të jenë $x_1 \in C^N$ *dhe* $r_1 = b - Dx_1$.
Caktojmë dy toleranca: tol *për sistemin në rrjetën e dendur dhe* $tol0$ *për sistemin në rrjetën e rrallë.*

for i=1,2, ... do

Formojmë vektorin e rrjetës së rrallë $\eta_i = (r_i, o, ..., o)^T$ *, ku numri i vektorëve zero 4-përmasore është* $\mathrm{N}_5 - 1$.
Zgjidhim sistemin linear $M_{TOV}(m_q) P \chi_{i+1} = M_{TOV}(1) P \eta_i$ *derisa mbetja të jetë më e vogël se* $tol0 \| M_{TOV}(1) P \eta_i \|_2$.

ALGORITMI TWO-GRID. Algoritmi me dy rrjeta për invertimin e operatorit të Neuberger-it në SU(3)

Nxjerrim korigjimin e zgjidhjes së përafërt 4-përmasore y_{i+1} *prej asaj 5-përmasore*

$\chi_{i+1} = (y_{i+1}, \chi_{i+1}^{(2)}, ..., \chi_{i+1}^{(N_5)})^T$.

Përditësojmë zgjidhjen në rrjetën 4-përmasore $x_{i+1} = x_i + y_{i+1}$

Llogarisim mbetjen e rrjetës së rrallë $r_{i+1} = b - Dx_{i+1}$.

Ndalo nëse $\|r_{i+1}\|_2 < tol\|b\|_2$.

end for

Algoritmin e mësipërm e kemi koduar në Matlab/Octave.

4.5 Rezultate

Përveç algoritmit të mësipërm të koduar në Matlab/Octave (Kodi C.1, Shtojca C) është shfrytëzuar i gatshëm algoritmi CGNE (Conjugate Gradients on Normal Equation). Qëllimi i përdorimit të tij është ai i krahësimit me algoritmin me dy rrjeta. Të dy algoritmet janë llogaritur në fushë kalibruese të fiksuar, në rrjetë me volum 4^4, me konstante çiftimi të fushës kalibruese $\beta = 6/g^2$ nga $\beta = 5.8$ deri në $\beta = 5.5$, me hap 0.1. Për një vlerë të fiksuar të këtij parametri është testuar algoritmi me dy rrjeta për masa të ndryshme kuarkesh, duke filluar nga kuarke të rënda me masë (në njësi të konstantes së rrjetës, pra bëhet fjalë për *a*, e cila do të nënkuptohet) 0.13 deri në kuarke më të lehta me masë 0.03 me hap 0.01. U vu re se për secilën vlerë të fiksuar të konstantes së çiftimit, masat e kuarkeve për të cilin algoritmi me dy rrjeta funksionon ndryshonin nga njëri konfiguracion tek tjetri. Rezultatet numerike të simulimeve janë përmbledhur në tabelat në vijim. Për çdo konfiguracion, jepet një tabllo e qartë për masa të ndryshme të kuarkeve, numri i shumëzimeve me matricën e Wilsoni-it dhe norma e mbetjes në këtë hap. Në llogaritjet tona është vendosur saktësia e rendit 10^{-8}. Vlerat e normës së mbetjes me shënjën më e vogël (<) nënkuptojnë se për masën korresponduese algoritmi me dy rrjeta rrit saktësinë e kërkuar prej nesh. Ndërsa masat e kuarkeve me normë mbetjesh pa shenjën <, kanë një stanjacion të vlerave të mbetjeve në vlerën e kuotuar në tabelë. Ne do të konsiderojmë se algoritmi me dy rrjeta nuk konvergjon për këto masa. Konkretisht, për konfiguracionin e parë të marrë për β = 5.8, duke iu referuar të dhënave në Tabelën 4.1, shihet se algoritmi ynë konvergjon për masa të kuarkeve m = 0.09, m = 0.07, m = 0.06, m = 0.03, për masa të tjera kemi stanjacion.

Tabelë 4.1 Të dhënat e marra nga historia e konvergjencës së algoritmit TWO - GRID për konfiguracionin e parë me konstante çiftimi $\beta = 5.8$.

Masa e kuarkut	Numri i shumëzimeve me matricën e Wilson-it	Norma e mbetjes

0.1	9552	10^{-5}
0.09	16152	$<10^{-8}$
0.08	12450	10^{-6}
0.07	20700	$<10^{-8}$
0.06	24366	$<10^{-8}$
0.05	17898	10^{-5}
0.04	26148	10^{-6}
0.03	47580	$<10^{-8}$

Në konfiguracionin e dytë të marrë për β = 5.7, duke iu referuar të dhënave në Tabelën 4.2, algoritmi me dy rrjeta konvergjon për masa të kuarkeve m = 0.12, m = 0.09, për masa të tjera kemi stanjacion.

Tabelë 4.2 Të dhënat e marra nga historia e konvergjencës së algoritmit TWO - GRID për konfiguracionin e dytë me konstante çiftimi $\beta = 5.7$.

Masa e kuarkut	Numri i shumëzimeve me matricën e Wilson-it	Norma e mbetjes
0.13	8052	10^{-5}
0.12	13362	$<10^{-8}$
0.11	9606	10^{-5}
0.1	10956	10^{-5}
0.09	19566	$<10^{-8}$
0.08	15306	10^{-5}
0.07	17292	10^{-5}
0.06	24240	10^{-5}
0.05	24240	10^{-5}

Në konfiguracionin e tretë të marrë për β = 5.6, duke iu referuar të dhënave në Tabelën 3.3, algoritmi me dy rrjeta konvergjon për masa të kuarkeve m = 0.12, m = 0.11, m = 0.07, m = 0.06, për masa të tjera kemi stanjacion.

Tabelë 4.3 Të dhënat e marra nga historia e konvergjencës së algoritmit TWO - GRID për konfiguracionin e tretë me konstante çiftimi $\beta = 5.6$.

Masa e kuarkut	Numri i shumëzimeve me matricën e Wilson-it	Norma e mbetjes
0.13	7512	10^{-5}
0.12	12108	$<10^{-8}$
0.11	13098	$<10^{-8}$
0.1	8958	10^{-5}
0.09	10080	10^{-5}
0.08	11286	10^{-5}
0.07	18282	$<10^{-8}$

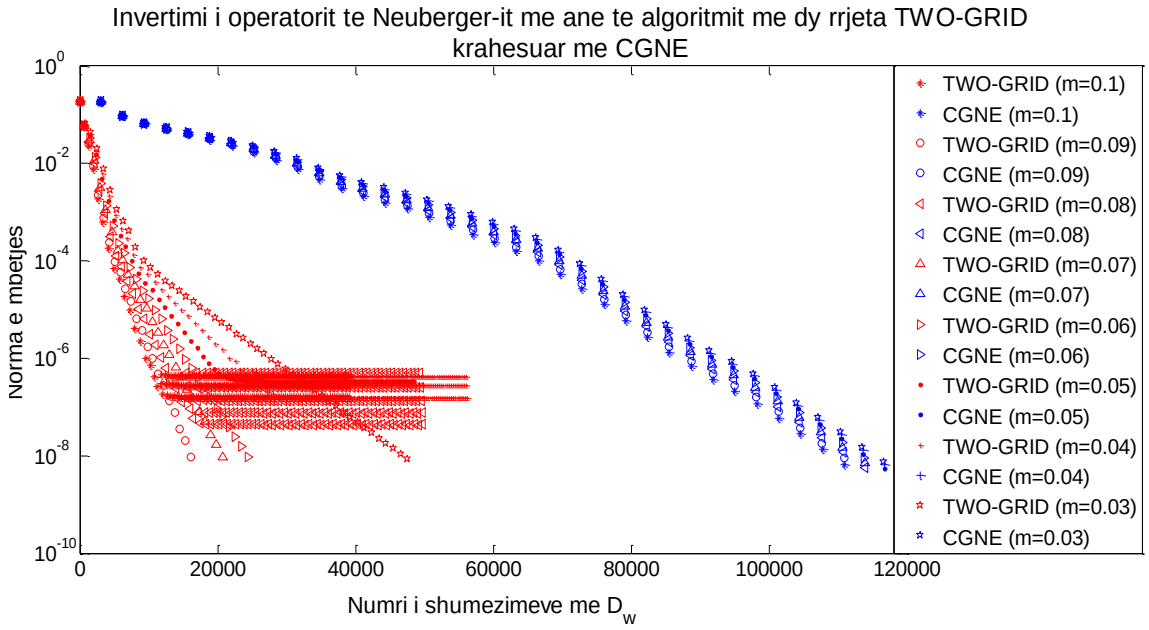
0.06	20076	$<10^{-8}$
0.05	15612	10^{-5}

Në konfiguracionin e katërt të marrë për β = 5.5, duke iu referuar të dhënave në Tabelën 4.4, algoritmi me dy rrjeta konvergjon për masa të kuarkeve m = 0.13, m = 0.11, m = 0.1, m = 0.09, m = 0.08, m = 0.05, për masa të tjera kemi stanjacion.

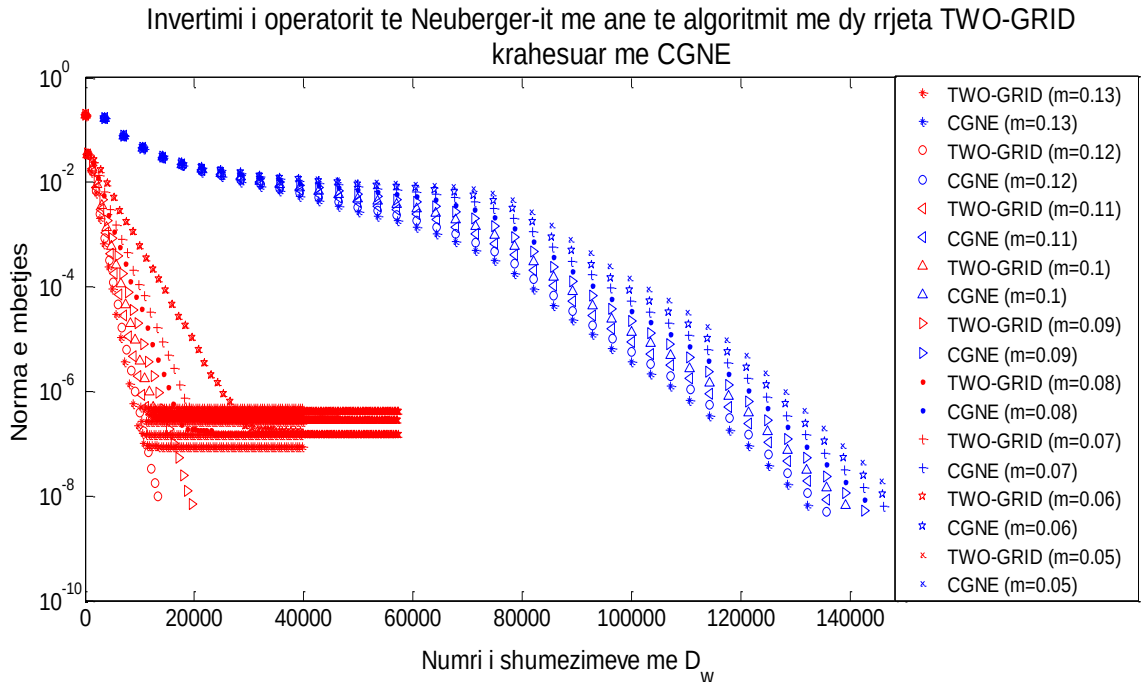
Tabelë 4.4 Të dhënat e marra nga historia e konvergjencës së algoritmit TWO - GRID për konfiguracionin e tretë me konstante çiftimi $\beta = 5.5$.

Masa e kuarkut	Numri i shumëzimeve me matricën e Wilson-it	Norma e mbetjes
0.13	11430	$<10^{-8}$
0.12	7674	10^{-5}
0.11	12948	$<10^{-8}$
0.1	14118	$<10^{-8}$
0.09	15312	$<10^{-8}$
0.08	17400	$<10^{-8}$
0.07	12378	10^{-5}
0.06	14670	10^{-5}
0.05	25452	$<10^{-8}$

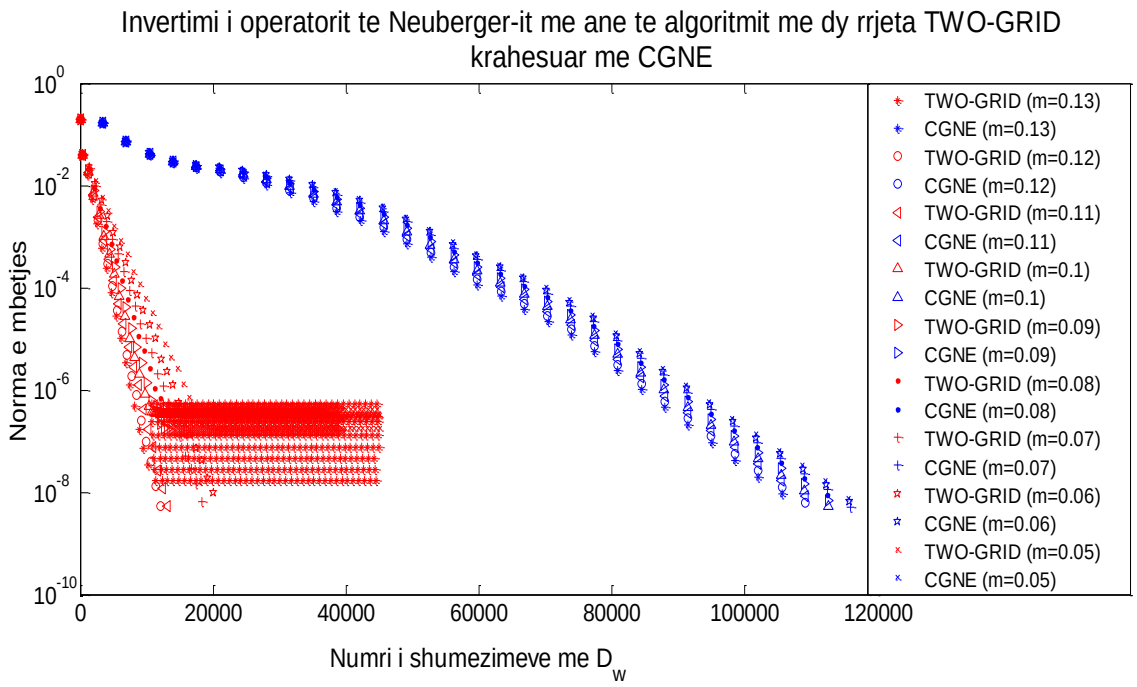
Paralelisht është kryer e njëjta procedurë edhe me algoritmin e marrë për krahësim CGNE. Rezultatet e marra paraqiten në grafikët e mëposhtëm, ku jepet historia e konvergjencës së algoritmit me dy rrjeta (TWO-GRID) dhe atij CGNE si funksion i numrit të shumëzimeve që kryhen me matricën e Wilson-it. Figura 4.3 është marrë për konfiguracionin e parë të gjeneruar me konstante çiftimi $\beta = 5.8$ dhe masa kuarkesh të ndryshme siç tregohen në figurë. Po kështu Figura 4.4 jep historinë e konvergjencës së dy algoritmeve për konstante çiftimi $\beta = 5.7$, Figura 4.5 për konstante çiftimi $\beta = 5.6$ dhe Figura 4.6 për konstante çiftimi $\beta = 5.5$. Duket qartë se algoritmi me dy rrjeta për secilin konfiguracion është rreth 6-herë më i shpejtë se CGNE për ato masa kuarkesh për të cilat ai konvergjon.



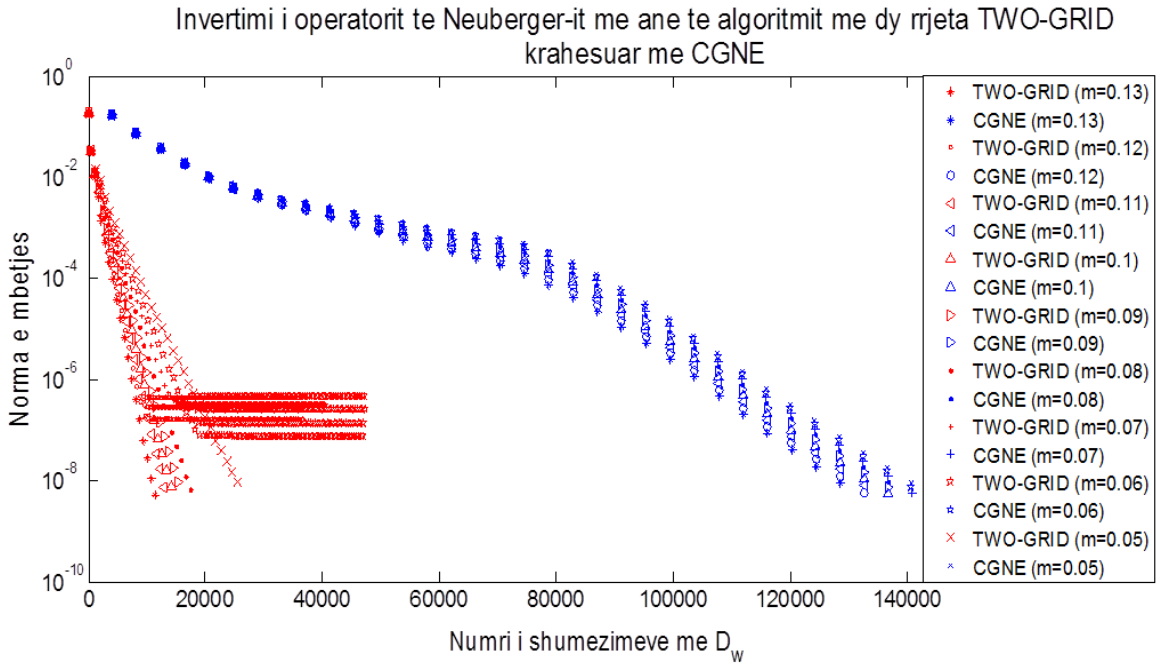
Figurë 4.3 Grafiku që paraqet historinë e konvergjencës së algoritmit me dy rrjeta TWO-GRID dhe algoritmit CGNE për masa të ndryshme kuarkesh, të simuluara në një rrjetë me volum 4^4 dhe me konstante çiftimi $\beta = 5.8$.



Figurë 4.4 Grafiku që paraqet historinë e konvergjencës së algoritmit me dy rrjeta TWO-GRID dhe algoritmit CGNE për masa të ndryshme kuarkesh, të simuluara në një rrjetë me volum 4^4 dhe me konstante çiftimi $\beta = 5.7$.



Figurë 4.5 Grafiku që paraqet historinë e konvergjencës së algoritmit me dy rrjeta TWO-GRID dhe algoritmit CGNE për masa të ndryshme kuarkesh, të simuluara në një rrjetë me volum 4^4 dhe me konstante çiftimi $\beta = 5.6$.



Figurë 4.6 Grafiku që paraqet historinë e konvergjencës së algoritmit me dy rrjeta TWO-GRID dhe algoritmit CGNE për masa të ndryshme kuarkesh, të simuluara në një rrjetë me volum 4^4 dhe me konstante çiftimi $\beta = 5.5$.

4.6 Përfundime

Algoritmi me dy rrjeta, i zbatuar përgjatë përmasës së 5-të Euklidiane, rezulton 6-herë më i shpejtë se algoritmet standarte të nënhapësirave të Krilovit për konstantet e çiftimit beta = 5.8, 5.7, 5.6, 5.5 dhe për disa masa kuarkesh të caktuara. Algoritmi nuk konvergjon për të gjitha masat e kuarkeve, në të cilat pëson një stanjacon. Gjithsesi ideja e zbatimit të rrjetave të shumëfishta është mjaft premtuese në përshpejtimin e fermioneve kirale në simulimet numerike të QCD-së rrjetore.

KAPITULLI 5

PËRSHPEJTIMI I LLOGARITJEVE TË FERMIONEVE KIRALE NË QCDLAB

5.1 Hyrje në QCDLAB 1.0

QCDLAB është një paketë funksionesh për kërkim dhe simulime numerike të QCD-së rrjetore. Ajo është një paketë e përbërë nga një grup funksionesh në MATLAB/OCTAVE e sjellë në dy versione QCDLAB 1.0 (Boriçi, 2006) dhe QCDLAB 1.1 (Boriçi, 2007). QCDLAB është projektuar të jetë një ndërfaqe e ndërtuar mbi gjuhë të nivelit të lartë për simulimet numerike të QCD-së rrjetore bazuar në mjedisin e gjuhës MATLAB/OCTAVE. MATLAB është një produkt i kompanisë MathWorks ndërsa OCTAVE është klon i tij, një softëare i lirë sipas kushteve të GNU (General Public License). MATLAB/OCTAVE është një mjedis llogaritës që ka të integruar së bashku llogaritjet kompjuterike dhe ndërfaqen grafike. Disa tipare dalluese të MATLAB/OCTAVE janë:

- Ndërtim i detajuar i funksioneve të algjebrës lineare dhe matematikore.
- Shumë funksione të gatshëm si: Blas, Lapack, Minpack, etj si dhe librari
- Gjuhë e interpretuar
- Ngarkim dinamik i moduleve prej gjuhëve të tjera si C, C++, FORTRAN

QCDLAB ofron një sistem të gjuhës me dy nivele: një gjuhë të nivelit të lartë, e cila përdoret për simulimet numerike dhe një gjuhë e nivelit më të ulët e përkthimit në C++ . Në fakt edhe gjuha e nivelit më të ulët mund të optimizohet për përshtatje specifike hardëare. Versioni i parë QCDLAB 1.0 është ndërtuar për të punuar vetëm në nivelin e lartë. Ai përmban funksione të shkruara në MATLAB/OCTAVE të cilat mund të ndahen në dy grupe:

- algoritme simulimi
- algoritme invertimi.

Simulimet me anë të QCDLAB 1.0 zhvillohen në teorinë kalibruese U(1) ose rasti i Elektrodinamikës Kuantike në rrjetë (Quantum Electrodynamics - QED) me dy dimensione. Teoria kalibruese U(1) me modelin e Schëinger-it në rrjetë (Melnikov & Weinstein, 2000), (Rothe, 2005) ndan mjaft tipare dhe algoritme të njëjta me QCD-në.

QED gjithmonë është përdorur si “mjedis laboratorik” për zhvillimin dhe testimin e algoritmeve të reja të propozuar. Në QCDLAB 1.0 në grupin e funksioneve të simulimit bëjnë pjesë funksioni që gjeneron fushat kalibruese statistikisht të pavarura nga njëra-

tjetra, funksioni që llogarit pllakën, funksioni që llogarit operatorin e fermioneve të Wilson-Dirac-ut, funksioni që llogarit operatorin e fermioneve kirale në trajtën e fermioneve të shkurtuara të mbulimit etj. Ndërsa grupi i algoritmeve të invertimit përbëhet nga funksionet e algoritmeve qe invertojnë operatorët e llogaritur në grupin e parë. Në grupin e algoritmeve që shërbejnë për llogaritjen e përhapësit të kuarkeve ose invertues të operatorit të Dirac-ut në rrjetë bëjnë pjesë: SHUMR, CG, CGNE, BiCGstab, BiCGγ5 etj. Algoritme të cilët janë testuar në (Boriçi, 2006).

5.2 Simulime numerike në QCDLAB 1.0

Meqënëse simulimet në QCDLAB 1.0 kryhen në QED në këtë rast fushat kalibruese $U_{\mu,i}$ mund të shprehen duke përdorur këndet $\theta_{\mu,i} \in \mathbb{R}$ (Alexandrou, 2011), prej,

$$U_{\mu,i} = e^{i\theta_{\mu,i}}, \tag{V.2.1}$$

ku veprimi kalibrues jepet nga,

$$S_g = \beta \sum_{i,\mu<\nu} \left[1 - \cos\left(\theta_{\mu,i} + \theta_{\nu,i+\hat{\mu}} - \theta_{\mu,i+\hat{\nu}} - \theta_{\nu,i} \right) \right], \tag{V.2.2}$$

ku në këtë rast $\beta = 1/e^2$ dhe e është ngarkesa e elektronit. Ndërsa operatori i Wilson-Dirac-ut jepet nga

$$D_{ij} = \left(m + \frac{4}{a} \right) I_2 \delta_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{2} \left[\left(I_2 - \sigma_\mu \right) U_{\mu,i} \delta_{i,j+\hat{\mu}} + \left(I_2 + \sigma_\mu \right) U_{\mu,i-\hat{\mu}} \delta_{i,j-\hat{\mu}} \right] \tag{V.2.3}$$

ku σ_μ jnë matricat e Paul-it,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{V.2.4}$$

Në QCDLAB përcaktohen operatorët e projektimit të spineve në funksion të këtyre matricave,

$$P_\mu^+ = \frac{1}{2}\left(I_2 + \sigma_\mu \right), \quad P_\mu^- = \frac{1}{2}\left(I_2 - \sigma_\mu \right). \tag{V.2.5}$$

5.2.1 Gjenerimi i pllakës (“Plaquette”)

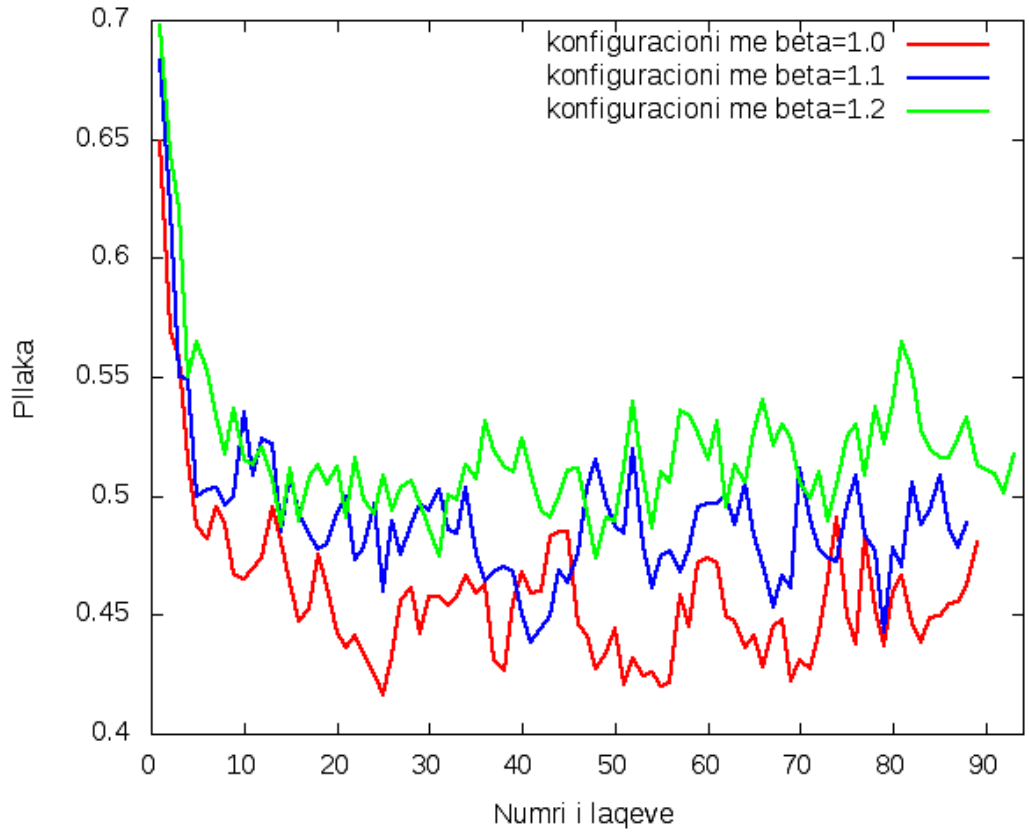
Ashtu siç u trajtua në seksionin (3.3.1) pllaka është një madhësi e rëndësishme në simulimet numerike të QCD-së rrjetore pasi përcakton veprimin kalibrues ose gluonik në rrjetë. Ajo paraqet një madhësi invarinat kalibruese në rrjetë dhe është laku më i vogël që gjendet nga produkti i renditur i fushave kalibruese $U_{\mu,\nu}$ që përbëjnë lakun.

$$P_{\mu\nu} = U_{\mu}\ \ n\ \ U_{\nu}\ \ n+\mu\ \ U_{\mu}^{\dagger}\ \ n+\nu\ \ U_{\nu}^{\dagger}\ \ n \qquad \text{(V.2.6)}$$

Ndërkohë në QED, për teorinë kalibruese U(1), do të ishte

$$P_{\mu\nu} = e^{i\theta_{\mu}\ n}\ e^{i\theta_{\nu}\ n+\mu}\ e^{-i\theta_{\mu}\ n+\nu}\ e^{-i\theta_{\nu}\ n} \qquad \text{(V.2.7)}$$

Në QCDLAB ajo llogaritet nga funksioni *Plaquette.m*, Kodi D.1, Shtojca D. Në Figurën 5.1 jepet paraqitja grafike e pllakës e marrë për fusha kalibruese të ndryshme me konstante çiftimi $\beta = 1.0$, $\beta = 1.1$ dhe $\beta = 1.2$ në rrjetë me përmasa 32x32 në QCDLAB.



Figurë 5.1 Gjurma e produktit të renditur të fushave kalibruese rrjetore (pllaka) e llogaritur për konfiguracione të ndryshme me konstante çiftimi $\beta = 1.0$, $\beta = 1.1$ dhe $\beta = 1.2$ në rrjetë me përmasa 32x32 në QCDLAB. Rasti i teorisë kalibruese rrjetore me simetri U(1) .

5.2.2 Gjenerimi i konfiguracioneve

Gjenerimi i fushave kalibruese realizohet me algoritmin Hybrid Monte Carlo (HMC) (Duane *et. al.*, 1987). Ideja bazë e këtij algoritmi ndjek këto hapa kryesorë:

Hapi 1: Përdor banjo termike globale për të update-uar fushat pseudofermionike.

Hapi 2: Integron numerikisht ekuacionet klasike të lëvizjes.

Hapi 3: Korigjon gabimet e integrimit numerik te hapit 2 duke përdorur algoritmin Metropolis *et al.* (1953). Algoritmi Metropolis et al shërben si hap i fundit në algoritmin HMC për të pranuar ose flakur me një probabilitet të dhënë fushën kalibruese $U_{\mu,i}$ të propozuar. Probabiliteti i pranueshmërisë është i trajtës

$$\mathrm{Prob}\left(\left\{P(0),U(0)\right\}\rightarrow\left\{P(\tau),U(\tau)\right\}\right)=\min\left\{1,e^{H(\tau)-H(0)}\right\} \qquad \text{(V.2.8)}$$

Në qoftë se fusha kalibruese e propozuar flaket atherë algoritmi i kthehet kohës $t=0$ dhe përditëson momentin P. I koduar në MATLAB/OCTAVE në QCDLAB algoritmi HMC për krijimin e fushave kalibruese ose konfiguracioneve të fushave kalibruese është i ndërtuar si më poshtë:

- Fillon me një konfiguracion të rastit C1
- Update-on momentin me banjo termike `P=sqrt(-1)*randn(2*N,1);`
- Llogarit Hamiltonianin `H1=norm(P)^2/2-beta*Plaquette(C1);`
- Propozon një konfiguracion të dytë C2 duke përdorur evolucionin e dinamikës molekulare
- Fillon ciklin e dinamikës molekulare
  - Avancon fushat me gjysëm hapi: `C2=exp(P*deltat/2).*C2;`
  - Avancon momentin me hap të plotë: `P=P+Force_U1(C2)*deltat;`
  - Avancon fushat me gjysëm hapi: `C2=exp(P*deltat/2).*C2;`
- Llogarit Hamiltonianin H2: `H2=norm(P)^2/2-beta*Plaquette(C2);`
- Bën testin Metropolis (nga algoritmi Metropolis) për ta pranuar ose flakur konfiguracionin e propozuar

```
R=min([1,exp(-(H2-H1))]);
random=rand;
istat=[random,R,H2-H1]; stat=[stat;istat];
if random<R,
   C1=C2;
   aç=aç+1;
   plaq=Plaquette(C1)/N; Plaq = [Plaq;plaq];
end
aç=aç/NMC;
```

- Ky cikël përsëritet për N-konfiguracione statistikisht të pavarura me hapa Monte-Carlo

5.2.3 Llogaritja e operatorit të Wilson-Dirakut

Në QCLAB operatori i Wilson-Dirakut në dy dimensione llogaritet nga funksioni `Dirac2.m` që jepet në Kodin D.2, Shtojca D . Funksioni `Dirac2.m` ndërton matricën e Wilsoni-it D_W nga:

D_W = `Dirac2(N1,N2,u1,u2,mass)`.
Si parametra hyrës të funksionit janë:

- `mass` – parametri që përfaqson masën e gluinos bashkëveprues e cila lidhet me parametrin e kërcimit κ (Creutz, 1985). Parametri i kercimit është i rëndësishëm pasi masa zero e kuarkeve vendoset me anë të një vlere kritike të parametrit të kërcimit κ_{cr}. Kjo vlerë kritike, për një vlerë të dhënë të distancës rrjetore a gjendet nga relacioni kiral $M_\pi^2 \propto m_q$ që lidh masën e pionit me atë të kuarkeve. Nga relacioni i fundit llogaritet masa e pionit si funksion i $1/2\kappa$ dhe e ekstrapolojmë atë në zero. Vlera e parametrit κ për të cilën masa e pionit bëhet zero quhet vlerë kritike. Kjo vlerë shprehet nga $\kappa^{-1} = 2\ mass \cdot a + \dim$, ku *dim* është dimensioni i rrjetës (Boriçi, 2009), (Creutz, 1985) që në rastin konkret është 2.

- N1, N2 – numri i nyjeve të rrjetës përgjatë secilit drejtim respektivisht

- u1, u2 – fushat kalibruese sipas secilit drejtim në rrjetë, të cilat përcaktohen nga `u1=C(1:N1*N2);u2=C(N1*N2+1:2*N1*N2);` ku C është matrica që gjenerohet nga funksioni `C=GaugeField(flag)` i cili inicializon një fushë kalibruese fillestare. Parametri `flag` merr dy vlera që lidhen me çiftimin, konkretisht `flag=0("cold" start)` cifftimi i dobët dhe `flag=1("hot" start)` çiftim i fortë (Kodi D.3, Shtojca C)

Në fund llogaritja e operatorit rezulton në një matricë me përmasa 2xN1xN2.

Spektri i vlerave vehtjake të operatorit të Wilson-Dirakut në rrjetë

Studimi i shpërndarjes së vlerave vehtjake të operatorit të Wilson-Dirakut në rrjetë në prani të fushave kalibruese të gjeneruara në simulime ka një sërë motivimesh. Së pari, Banks dhe Casher (Banks & Casher, 1980) e lidhën densitetin e vlerave vehtjake të vogla të operatorit të Dirakut me thyerjen spontane të simetrisë kirale. Së dyti, diskretizimi rrjetor i operatorit të Dirakut bazuar në relacionin Ginsparg-Wilson (të trajtuar në seksionin (2.6) i ka vlerat vehtjake korresponduese në një rreth në planin kompleks. Kështu mund të kontrollohet cilësisht zgjedhja e përafruar e një operatori të tillë duke studjuar vlerat e tij vehtjake. Së treti, në qoftë se duam të ndërtojmë një operator me kiralitet ekzakt siç është ai i mbulimit do të kishim vështirësi në qoftë se operatori bazë i Wilson-Dirakut ka vlera të vogla vehtjake. Kjo do të ndikonte dhe në përzgjedhjen e parametrave të simulimit, siç është veprimi kalibrues.

Para se të shikojmë çfarë ndodh me spektrin e vlerave vehtjake të operator-it të Wilson-Dirakut në rrjetë, le të shohim rastin e teorisë së kontinumit. Operatori euklidian i Dirakut me masë kuarku zero është jo-hermitian. Kjo do të thotë se vlerat e tij vehtjake janë imagjinare ose zero, pra ato shtrihen në boshtet imagjinarë. Ky operator anti-komuton me matricën γ_5

$$D, \gamma_5 \quad = 0 \qquad \text{(V.2.9)}$$

Në qoftë se ψ është një gjëndje vehtjake e operatorit D me energji E atherë

$$D\psi = iE\psi, \tag{V.2.10}$$

dhe duke përdorur relacionin (V.2.9)

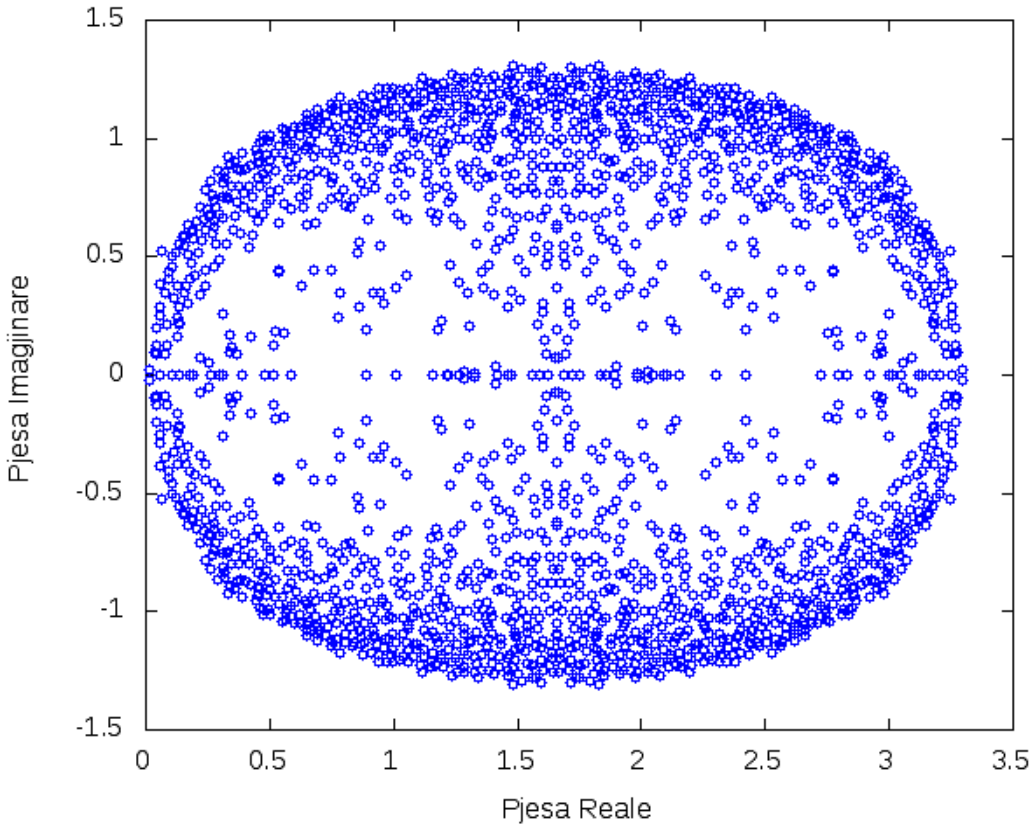
$$D \ \gamma_5\psi \ = -iE \ \gamma_5\psi \ . \tag{V.2.11}$$

Kështu, vlerat vehtjake të operatorit D vijnë në çifte të konjuguara komplekse $\pm iE$. Gjithashtu, gjëndjet ψ dhe $\gamma_5\psi$ janë ortogonale për çdo vlerë të fundme energjie E. Kiraliteti χ i një gjëndje ψ, i përcaktuar si produkti skalar

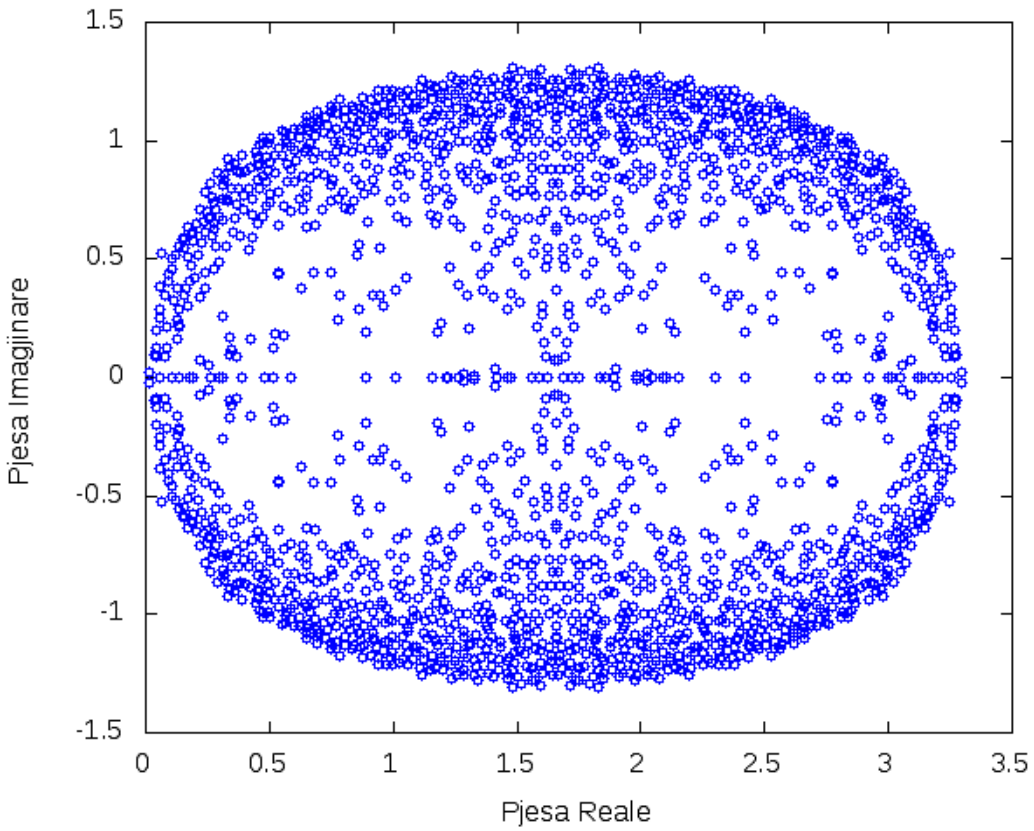
$$\chi = \ \psi, \gamma_5\psi \tag{V.2.12}$$

mund të jetë i ndryshëm nga zero vetëm në qoftë se $E = 0$, me fjalë të tjera vetëm gjëndjet vehtjake zero ose modet zero të operatorit të Dirac-ut në teorinë e vazhduar mund të kenë kiralitet të ndryshëm nga zero.

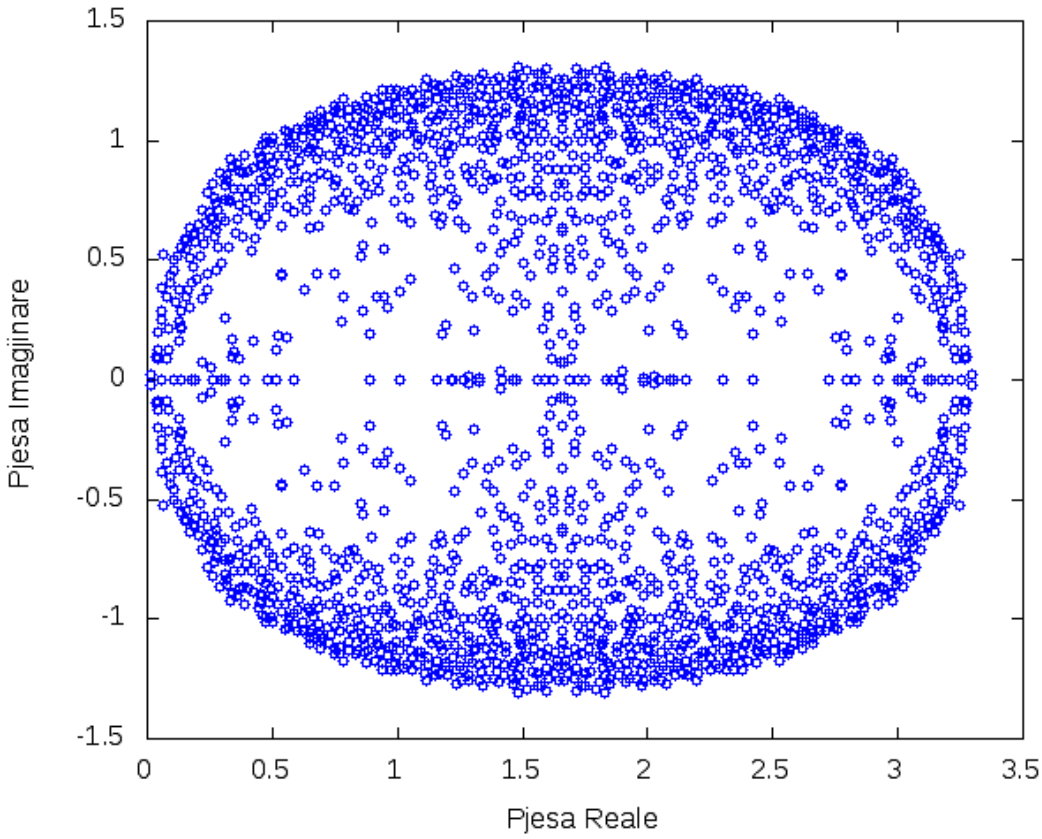
Kemi llogaritur spektrin e operatorit të Wilson-Dirac-ut për secilën konstante çiftimi 1.0, 1.1 dhe 1.2 për një masë kuarku të fiksuar (spektri i Wilson Dirac-ut nuk varet nga masa), konkretisht mq=0.1. Në Figurat 5.2, 5.3 dhe 5.4 jepet kjo paraqitje.



Figurë 5.2 Spektri i vlerave vehtjake të operatorit të Wilson-Dirac-ut në rrjetë me përmasa 32x32 në QCDLAB dhe konstante çiftimi $\beta = 1.0$.



Figurë 5.3 Spektri i vlerave vehtjake të operatorit të Wilson-Dirac-ut në rrjetë me përmasa 32x32 në QCDLAB dhe konstante çiftimi $\beta = 1.1$.



Figurë 5.4 Spektri i vlerave vehtjake të operatorit të Wilson-Dirac-ut në rrjetë me përmasa 32x32 në QCDLAB dhe konstante çiftimi $\beta = 1.2$.

Referuar Figurave 5.2, 5.3 dhe 5.4, prania e vlerave vehtjake zero në spektrin e operatorit të Wilson –Dirac-ut për të tre rastet e konstanteve të çiftimit të zgjedhura për studim tregon se jemi në regjimin e çiftemeve të duhura për të studuar më tej operatorin kiral të mbulimit.

5.2.4 Studimi i ngarkesës topologjike të fushave kalibruese

Ekziston një teoremë mjaft e njohur që lidh modet zero të operatorit D me topologjinë e sfondit të fushës kalibruese, e quajtur teorema ASIT (Atiyah-Singer Index Theorem) (Atiyah & Singer, 1971). Teorema ASIT pohon se ngarkesa topologjike ν e konfiguracionit të fushës kalibruese A është e barabartë me diferencën e numrit te modeve zero me kiralitet pozitiv me ato negativ prej,

$$\nu\left[A\right] = n_{+} - n_{-}. \qquad \text{(V.2.13)}$$

Ky relacion ndihmon për të lidhur veti të madhësive fermionike me topologjinë e fushës kalibruese rrjetore. Në rrjetë është e mundur që çdo konfiguracioni të fushës kalibruese ti llogaritet ngarkesa topologjike (rezultate më të fundit gjenden në literaturën **(**Alles et. al., 1998).

Një përdorim tjetër i rëndësishëm i teoremës ASIT është fakti se vektorët vehtjake të operatorit të Dirac-ut në rrjetë me vlera vehtjake *reale* mund të interpretohen si homologët në rrjetë të modeve zero në tëorinë e vazhduar (Smit & Vink, 1987).

Studimi i ngarkesës topologjike në QED sipas edhe (Luscher, 1982) është relativisht i thjeshtë dhe i qartë. Ngarkesa topologjike përcaktohet si shuma e pllakave këndore $\theta_P(x)$ në intervalin $[-\pi,\pi]$. Formalisht,

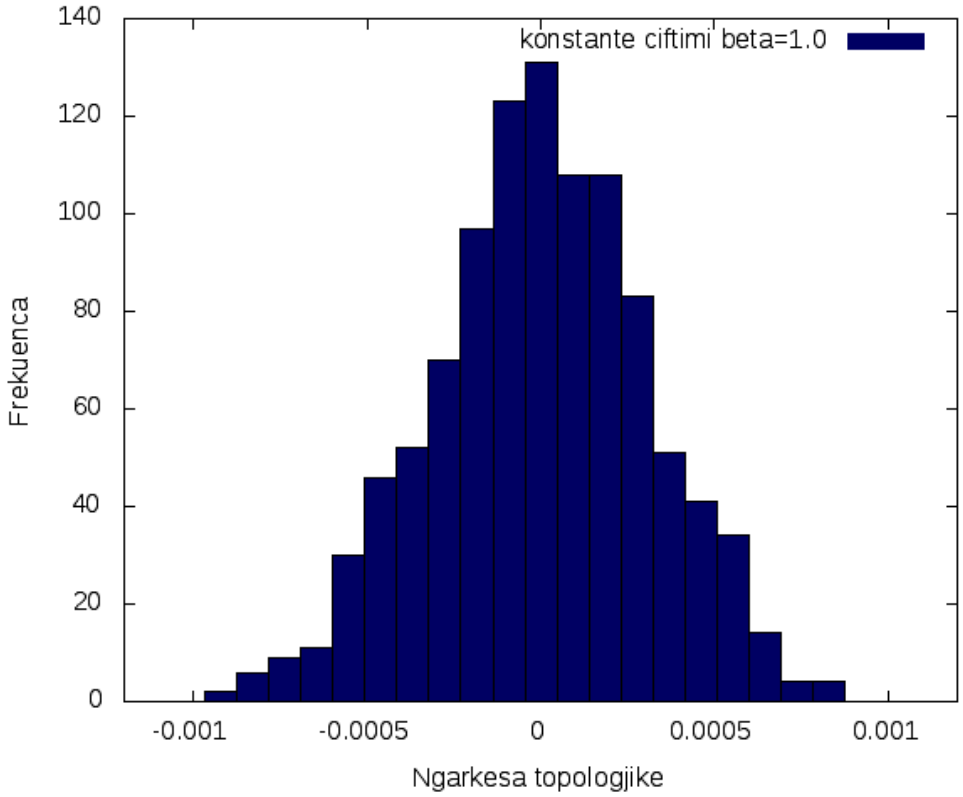
$$\nu[U] = \frac{1}{2\pi}\sum_{x\in\Lambda}\theta_P \quad x \tag{V.2.14}$$

dhe

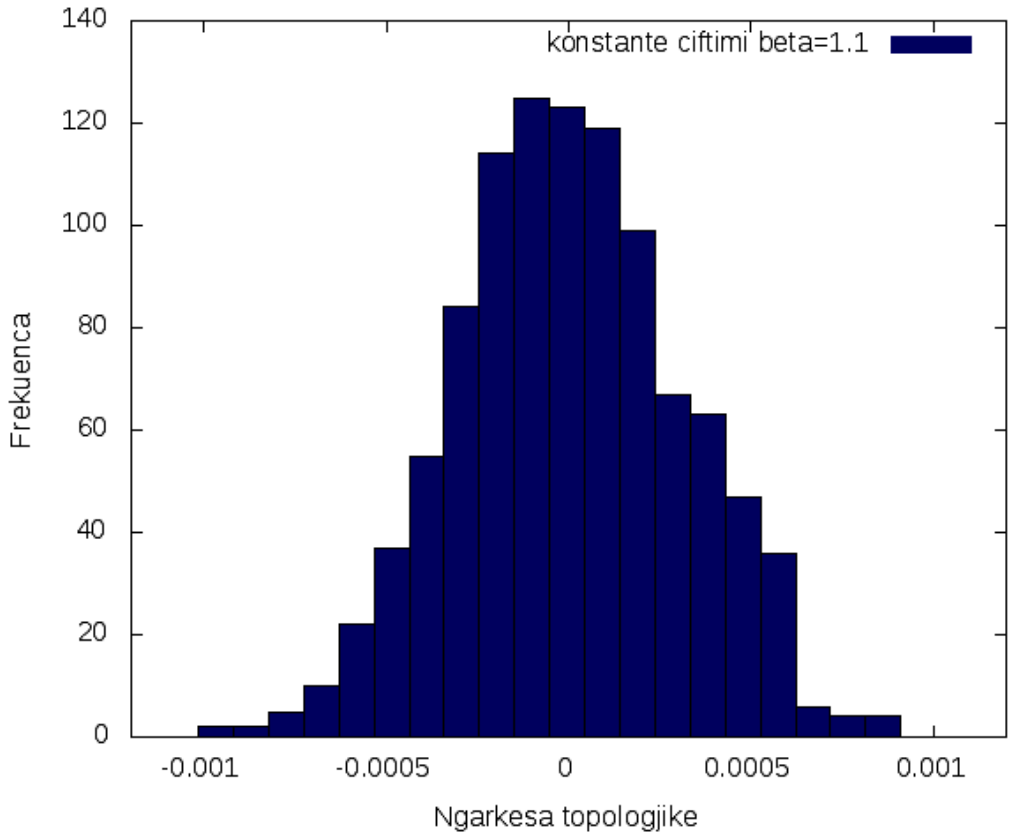
$$\theta_P \quad x \quad = \mathrm{Im} \quad \ln U_P \quad x \quad . \tag{V.2.15}$$

Ky përcaktim nuk jep vlerë të ngarkesës topologjike për konfiguracione me $U_P \quad x \quad = -1$ dhe si rrjedhim konfiguracione të tilla janë quajtur të veçanta. Sidoqoftë konfiguracione të tilla kanë madhësi zero dhe nuk luajnë ndonjë rol të rëndësishëm. Për simulimet numerike rrjetore kushti që duhet të plotësojnë këto konfiguracioni është ergodiciteti.

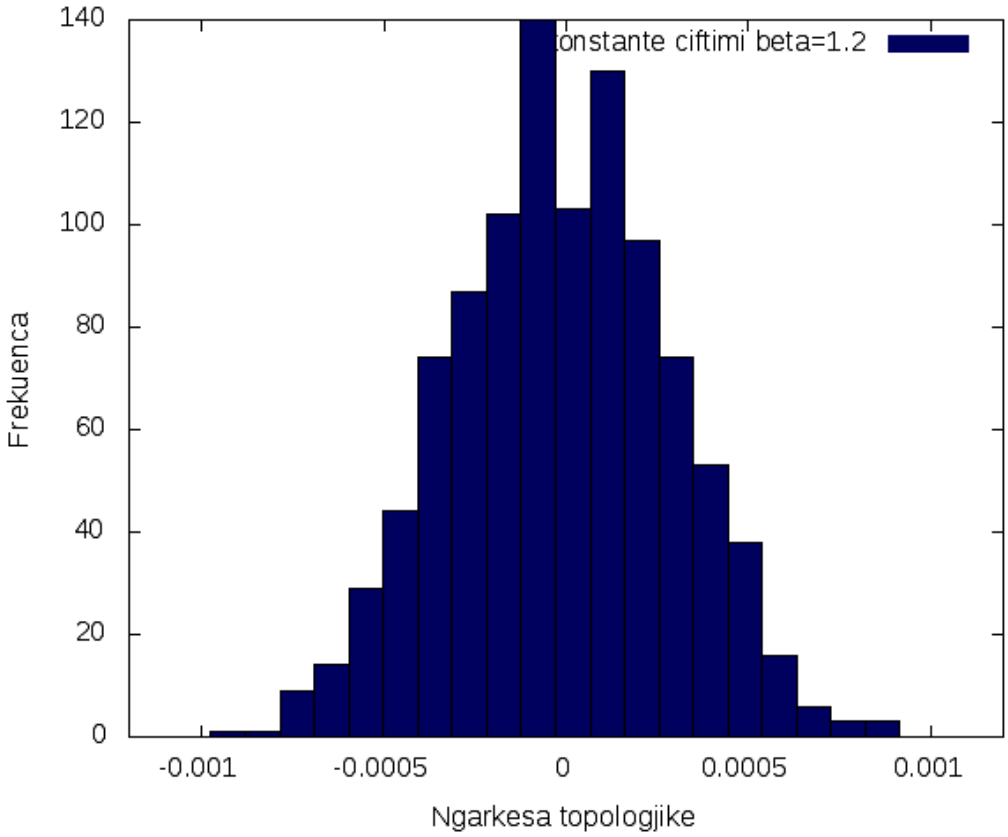
Për të llogaritur ngarkesën topologjike në QCDLAB është shkruar funksioni që llogarit ngarkesën topologjike për rastin e QED, *Topology.m* (Kodi D.4, Shtojca D). Ashtu siç duket edhe nga Figurat 5.5, 5.6 dhe 5.7 shpërndarja e ngarkesës topologjike të fushës kalibruese U(1) për konstantet e çiftimit të zgjedhura 1.0, 1.1 dhe 1.2 i bindet asaj Gaussiane, si në (Alles et. al., 1998). Kjo do të thotë se regjimi i zgjedhur për konstatet e çiftimit është ai që do të përdoret në zhvillimin e algoritmeve të invertimit në vijim.



Figurë 5.5 Shpërndarja e ngarkesës topologjike e fushës kalibruese U(1) me konstante çiftimi $\beta = 1.0$



Figurë 5.6 Shpërndarja e ngarkesës topologjike e fushës kalibruese U(1) me konstante çiftimi $\beta = 1.1$



Figurë 5.7 Shpërndarja e ngarkesës topologjike e fushës kalibruese U(1) me konstante çiftimi $\beta = 1.2$

5.2.5 Llogaritja e operatorit kiral të mbulimit në trajtën e operatorit të shkurtuar të mbulimit

QCDLAB ndërton gjithashtu edhe operatorin e mbulimit në trajtën e operatorit të shkurtuar të mbulimit në 2+1 përmasa. Funksioni në QCDLAB quhet `Dirac3_ov.m` dhe ndërton matricën e operatorit kiral të shkurtuar të mbulimit M_{TOV} nga:

M_{TOV} `= Dirac3_ov(N1,N2,N3,u1,u2,u3,mass,mass_dëf)`

Si parametra hyrës të funksionit janë:

- `mass` – parametri që përfaqson masën e gluinos bashkëveprues, siç u shpjegua më sipër.
- `mass_dwf` – masën e fermioneve të mureve domenore
- N1, N2,N3 – numri i nyjeve të rrjetës përgjatë secilit drejtim respektivisht

- u1, u2, u3 – fushat kaliburese sipas secilit drejtim në rrjetë. Ku u1, u2 përcaktohen si më sipër ndërsa, sipas dimensionit shtesë nuk përmbahen fusha kalibruese, por vektori u3 ndërtohet si vektor konstant nga `U3=ones(N,1);`

Operatori shkurtuar i mbulimit i llogaritur i rezulton në një matricë me përmasa 2xN1xN2xN3.

5.3 Implementimi i multirrjetave në QCDLAB me GMRESR i parakushtëzuar

Algoritme standarte invertimi, siç u trajtua në kapitullin 4 vijnë nga nënhapësirat e Krylov-it (CG, CGNE, GMRES etj). Zgjidhësit e Krylov-it harxhojnë 50-90% të fuqisë kompjuterike në simulimet e QCD-së rrjetore. Në algoritme të tilla numri i iteracioneve përshkallëzohet si $(1/m)^{1/2}$ ku m-masa e kuarkeve ose koha e llogaritjes përshkallëzohet me inversin e masës së kuarkeve e njohur ndryshe si ***ngadalësimi kritik***. Aq më tepër që për fermionet kirale, për shkak të spektrit të pacaktuar të operatorit të fermioneve të mureve domenore (DWF) asnjë nga zgjidhësit standart nuk garanton konvergjencë. Si rrjedhim lind nevoja e ndërtimit të një algoritmi invertimi për fermionet kirale që shmang ngadalësimin kritik. Një metodë për të reduktuar ngadalësimin kritik është përdorimi i parkushtëzuesve në algoritëm. Për parakushtëzuesit jo-polinomialë hapësira e Krylov-it nuk është më ajo fillestarja. Për shembull le të jetë P një përafrim i matricës së anasjelltë të matricës origjinale A, në mënyrë që matrica PA të jetë më mirë e përcaktuar se A. Atherë mund të zgjidhim në vënd të sistemit fillestar, sistemin,

$$PAx = Pb. \qquad \text{(V.3.1)}$$

Një parakushtëzues i mirë fiton edhe kohë llogaritëse. Parakushtëzues të ndryshëm janë shpjeguar në (Boriçi, 2009). Me të njëjtën ide të zgjedhjes së një parakushtëzuesi propozojmë një algoritëm të ri të quajtur GMRESR i parakushtëzuar.

Fillimisht le të shohim një algoritëm optimal të invertimit të operatorit kiral të mbulimit në QCDLAB, SHUMR (Shifted Unitary Minimal Residual). Algoritmi SHUMR është testuar edhe më parë por në teorinë kalibruese SU(3) dhe jep rezultate optimale (Boriçi & Allkoçi, 2006) . Në QCDLAB 1.0 (pra në teorinë kalibruese U(1)) operatori i mbulimit D^N (i trajtuar në seksionin 2.6.1) mund të llogaritet nga inversi i rrënjës katrore të A^*A:

$$\left(A^*A\right)^{-1/2} = V\Sigma^{-1}V^* \qquad \text{(V.3.2)}$$

ku Σ janë vlerat singulare të $A = U\Sigma V^*$. Meqënëse interesohemi për përhapësin e kuarkeve matrica e plotë e operatorit të mbulimit mund të mos llogaritet, por të llogaritet drejtpërdrejt shumëzimi i saj me një vektor. Ky shumëzim llogaritet duke përdorur algoritme të nënhapësirave të Krylov-it siç është algoritmi me dy hapa i Lanczos-it (Boriçi, 2000). Ndërkohë përafrimi i Zolotarev-it (Kennedy, 2005) përdor inversin e rrënjës katrore të matricës së Lanczos-it T. Algoritmi kërkon një nivel të poshtëm

$lambda$ të vlerave më të vogla vehtjake të bërthamës A^*A. Në hapin e parë të Lanczos-it zgjidhet sistemi

$$\left(A^*A\right)x = b \tag{V.3.3}$$

dhe merret si output matrica e Lanczos-it T. Ndërsa në hapin e dytë të Lanczos-it zgjidhet sistemi

$$\left(A^*A\right)^{-1/2} x = b \tag{V.3.4}$$

dhe në fund algoritmi finalizon zgjidhjen e sistemit

$$A\left(A^*A\right)^{-1/2} x = b \tag{V.3.5}$$

pa llogaritur fillimisht operatorin e mbulimit. Pra algoritmi SHUMR inverton operatorin kiral të Neuberger-it drejtpërdrejt pa e ndërtuar më parë atë, duke përdorur dy hapa algoritmi Lanczos. Kodi i tij në Matlab/Octave jepet në Kodin D.5, Shtojca D. Ky algoritëm është përdorur në këtë disertacion si algoritëm krahësues me atë që propozojmë si algoritëm më të shpejtë.

Kështu nisur nga ideja e algoritmit me dy rrjeta dhe rezultatet e tij (Boriçi, 2005) , (Xhako & Boriçi 2011) si dhe nga algoritmi i propozuar në (Cundy *et. al.*, 2005) është zhvilluar një algoritëm i ri i quajtur GMRESR i parakushtëzuar si pjesë e QCDLAB 1.0.

Në algoritmin e Cundy *et. al.*, (2005) parakushtëzimi është ndërtuar mbi një përafrim jo shumë të saktë të funksionit shenjë. Ndërkohë në algoritmin e ri të zhvilluar në këtë studim ne përdorim si pjesë parakushtëzimi përafrimin e operatorit të mbulimit me operatorin e shkurtuar të mbulimit në 2 + 1 përmasa, me përmasë shtesë N_3 të fundme. Duke përdorur këtë përafrim për operatorin e mbulimit dhe jo atë real siç përdoret në algoritmin e SHUMR, ndoshta humb një pjesë e saktësisë së përcaktimit të tij por fitohet shumë më tepër nga kompleksiteti i ulët llogaritës i formës së shkurtuar të mbulimit.

Për të kontrolluar normën e mbetjes së algoritmit të propozuar përdoret norma e mbetjes së vërtetë nga zgjidhja e saktë e sistemit. Në algoritmin e propozuar në përgjithësi për zgjidhjen e sistemit linear $Dx = b$ hetohet kushti i mëposhtëm në hapin e $k-$të ,

$$\underbrace{\left\|b - Dx^k\right\|}_{\substack{\text{mbetja}\\ \text{e}\\ \text{vertete}}} \le \underbrace{\left\|r^k - \left(b - Dx^k\right)\right\|}_{\substack{\text{diferenca}\\ \text{e}\\ \text{mbetjeve}}} + \underbrace{\left\|r^k\right\|}_{\substack{\text{mbetja}\\ \text{e}\\ \text{llogaritur}}} \tag{V.3.6}$$

dhe zhvillohet një strategji për të minimizuar diferencën e mbetjeve. Në qoftë se numri i hapave për të arritur reduktimin e dëshiruar të diferencës së mbetjes është i madh, atherë mund të ketë një grumbullim të konsiderueshëm gabimesh në prodhimin matricë-vektor në hendekun e mbetjes. Praktikisht kjo do të thotë së toleranca në prodhimet matricë-vektor duhet zvogëluar.

Në thelb algoritmi GMRESR i parakushtëzuar ndjek dy nivele:

- ***Niveli i parë: Pjesa e parakushtëzimit***

Llogaritet zgjidhja e përafërt e sistemit linear duke përdorur ekuivalencën e operatorit të mbulimit me atë të shkurtuar të mbulimit në 2 + 1 përmasa me përmasë shtesë N_3 të fundme duke përdorur saktësi të vogël $tol0$. Për të realizuar këtë hap përdoret algoritmi CGNE (Conjugate Gradients on Normal Equations) i shpjeguar në seksionin (4.3).

- ***Niveli i dytë: Llogoaritet mbetja e saktë***

Llogaritet mbetja e vërtetë duke përdorur operatorin e vërtetë të mbulimit me përmasë N_3 të pafundme. Kodi i shkruar në Matlab/Octave që realizon këtë llogaritje është quajtur *Mult_Overlap.m* dhe tregohet në Kodin D.6, Shtojca D. Kjo mbetje përdoret për të kontrolluar mbetjen e nivelit të parë në çdo hap. Ky cikël vazhdon derisa të arrihet një tolerancë e paracaktuar tol në algoritëm.

Algoritmi GMRESR i parakushtëzuar jepet më poshtë.

ALGORITMI GMRESR i parakushtëzuar (A, D^{TOV}, b, c_1, c_2, tol)

#llogarit x me $\|D^{TOV}x - b\| \leq tol \cdot \|b\|$

c1, c2 janë koefiçentët e operatorit të mbulimit

vlerat fillestare

$x = 0$;

$r = b$;

#matrica boshe

$C = []$;

U = [];

#cikël i jashtëm, pjesa e parakushtëzimit

while $\|r\| > tol \cdot \|b\|$ ***do***

solve $D^{TOV}u = r$, me saktësi relative *tol0*, $u = cgne(D^{TOV}, r, tol0)$;

#cikël i brëndshëm, llogarit mbetjen e saktë nga *c* me $\|D^N u - c\| \leq tol \cdot \|b\| \cdot \frac{\|u\|}{\|r\|}$;

$c = c_1 \cdot u + c_2 \cdot (V \cdot u)$, ku $V \cdot u$ llogaritet prej $V \cdot u = Mult\_Overlap(A, u)$;

for $i = 1:(C, 2)$ ***do***

$\alpha = C[:, i]^{\dagger} \cdot c$;

$c = c - \alpha \cdot C[:, i]$;

$u = u - \alpha \cdot U[:, i]$;

end for

llogarit

$c = c/\|c\|$; $u = u/\|c\|$;

ALGORITMI GMRESR i parakushtëzuar (A, D^{TOV}, b, c_1, c_2, tol)
$C=[C,c];\ U=[U,u];$
$\gamma = c^{\dagger}\cdot r;\ \ x = x+\gamma\cdot u;\ r = r-\gamma\cdot c;$
end while

Funksioni i koduar në Matlab/Octavë i algoritmit të mësipërm jepet në Kodin D.7, Shtojca D.

5.4 Rezultate

5.4.1 Historia e konvergjencës së algoritmit GMRESR i parakushtëzuar

Janë kryer simulime numerike për 100 fusha kalibruese statistikisht të pavarura në teorinë kalibruese U(1). Konstantja e çiftimit e background-it kalibrues është testuar për tre vlera $\beta = 1.0$, $\beta = 1.1$ dhe $\beta = 1.2$ si vlera të mjaftueshme për të finalizuar rezultatet e marra, në rrjetë me volum N1 x N2 = 32 x 32. Për secilën konstante çiftmi janë kryer simulime për masa kuarkesh të rënda deri në kuarke të lehta në intervalin e vlerave në njësi rrjetore m_q = [0.5, 0.45, 0.4, 0.35, 0.3, 0.25, 0.2, 0.15, 0.1, 0.05, 0.01]. Dimensioni i tretë i fermioneve të shkurtuara të mbulimit është vendosur $N_3 = 8$ dhe vlerat e tolerancave për algoritmin GMRESR të parakushtëzuar janë vendosur $tol0 = 0.1; tol = 10^{-6}$. Parametrin zhvendosës M e kemi fiksuar -0.345 dhe nivelin e poshtëm *lambda* = 10^{-7} i cili kërkon që përafrimi polinomial i Zolotarev-it të jetë i rendit *n* = 60, që do të thotë se numri i invertimeve të matricës *T* të jetë *n/2* = 30.

Simulime numerike janë kryer edhe me algoritmin SHUMR në U(1) për 100 fusha kalibruese statistikisht të pavaruara, me të njëjtin background si GMRESR me qëllim krahësimi për masa kuarkesh m_q = [0.5, 0.45, 0.4, 0.35, 0.3, 0.25, 0.2, 0.15, 0.1, 0.05, 0.01]. Kemi krahësuar historinë e konvergjencës së normës së mbetjes të algoritmit GMRESR të parakushtëzuar me algoritmin SHUMR. Kemi llogaritur numrin e shumëzimeve me operatorin e Dirakut deri në konvergjencë si dhe gabimet e normës së mbetjeve për 100 konfiguracione të pavaruara të fushave kalibruese. Gjithashtu është llogaritur koha e invertimit dhe numri i shumëzimeve me matricën e Wilson-Dirakut deri në konvergjencë për secilin algoritëm. Rezultatet numerike paraqiten në Tabelat 5.1 deri 5.3.

Tabelë 5.1 Rezultatet numerike të invertimit të operatorit kiral me algoritmin e ri të zhvilluar krahësuar me algoritmin optimal SHUMR për konstante çiftimi $\beta = 1$.

Masa e kuarkut	Algoritmet	Koha e invertimit	Numri i hapave	Numri i shumëzimeve	Gabimi i normës së	Krahësimi (GMRESR

		në sekonda	deri në konvergjencë	me operatorin e Wilson-Dirac-ut (x 10^4)	mbetjes për 100 konfig.	vs SHUMR)
0.5	SHUMR	59.82	14	5.851	4.11E-05	2.3 herë më i shpejtë
	GMRESR	28.53	7	2.571	8.27E-05	
0.45	SHUMR	62.49	15	6.054	4.94E-05	2.4 herë më i shpejtë
	GMRESR	27.48	7	2.478	9.41E-05	
0.4	SHUMR	67.42	17	7.033	5.32 E-05	2.7 herë më i shpejtë
	GMRESR	27.80	7	2.561	8.26 E-05	
0.35	SHUMR	84.40	20	8.605	5.47 E-05	3.2 herë më i shpejtë
	GMRESR	31.08	7	2.673	9.82 E-05	
0.3	SHUMR	109.83	23	9.712	6.88 E-05	3.2 herë më i shpejtë
	GMRESR	33.72	7	2.997	9.53 E-05	
0.25	SHUMR	123.77	28	11.612	8.01 E-05	4 herë më i shpejtë
	GMRESR	36.84	8	2.975	1.14 E-04	
0.2	SHUMR	169.36	34	14.566	9.52 E-05	4.6 herë më i shpejtë
	GMRESR	40.03	8	3.148	1.63 E-04	
0.15	SHUMR	183.15	45	19.322	1.20 E-04	6 herë më i shpejtë
	GMRESR	42.29	8	3.258	1.96 E-04	
0.1	SHUMR	273.07	67	29.038	1.61 E-04	7.6 herë më i shpejtë
	GMRESR	41.23	9	3.865	2.38 E-04	
0.05	SHUMR	829.11	127	55.635	3.55 E-04	11.6 herë më i shpejtë
	GMRESR	90.75	10	4.779	4.21 E-04	
0.01	SHUMR	2539.00	350	154.160	1.65 E-03	12.2 herë më i shpejtë
	GMRESR	123.56	12	12.675	7.15 E-04	

Tabelë 5.2 Rezultatet numerike të invertimit të operatorit kiral me algoritmin e ri të zhvilluar krahësuar me algoritmin optimal SHUMR për konstante çiftimi $\beta = 1.1$.

Masa e kuarkut	Algoritmet	Koha e invertimit në sekonda	Numri i hapave deri në konvergjencë	Numri i shumëzimeve me operatorin e Wilson-Dirac-ut (x 10^4)	Gabimi i normës së mbetjes për 100 konfig.	Krahësimi (GMRESR vs SHUMR)
0.5	SHUMR	48.95	14	5.204	3.74E-05	2.3 herë më i shpejtë
	GMRESR	23.46	7	2.279	8.11E-05	
0.45	SHUMR	52.49	15	5.522	4.96E-05	2.5 herë më i shpejtë
	GMRESR	23.43	7	2.261	8.19E-05	
0.4	SHUMR	58.19	17	6.202	6.08 E-05	2.7 herë më i shpejtë
	GMRESR	24.56	7	2.270	9.25 E-05	
0.35	SHUMR	69.56	20	7.479	5.82 E-05	3.2 herë më i shpejtë
	GMRESR	26.04	7	2.351	1.04 E-05	
0.3	SHUMR	79.81	20	8.675	7.42 E-05	3.7 herë më i shpejtë
	GMRESR	26.67	7	2.379	1.15 E-04	
0.25	SHUMR	98.21	28	10.615	8.20 E-05	4 herë më i

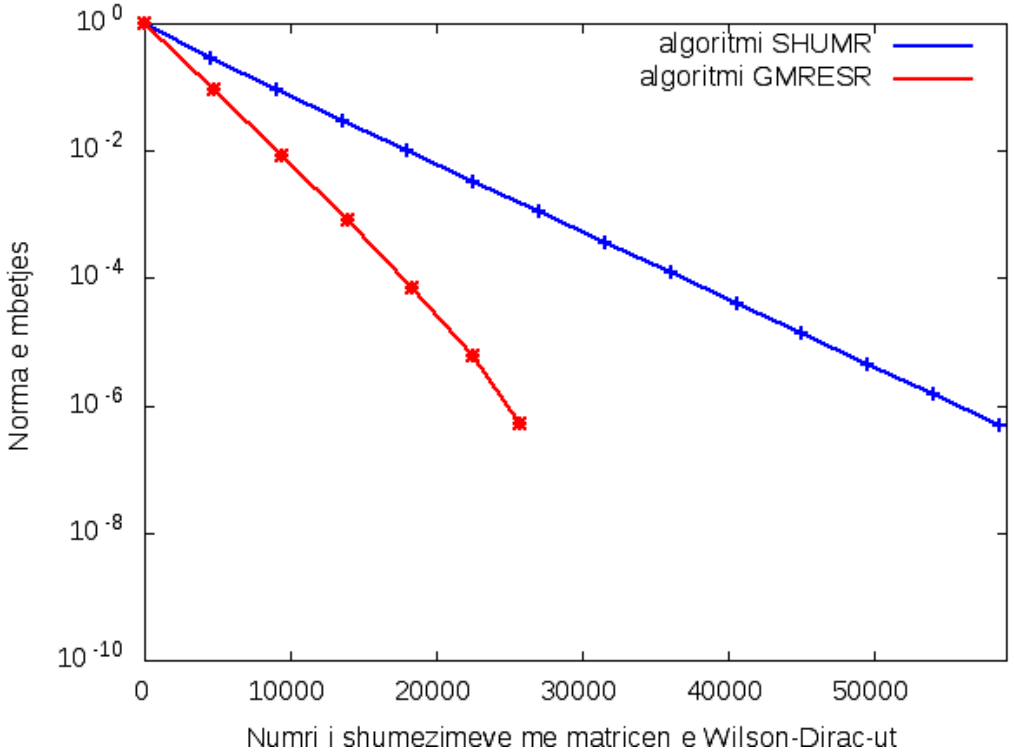
	GMRESR	29.38	8	2.715	1.22 E-04	shpejtë
0.2	SHUMR	127.52	34	13.279	1.05 E-04	4.6 herë më i shpejtë
	GMRESR	33.55	8	2.882	1.56 E-04	
0.15	SHUMR	167.19	46	16.182	1.25 E-04	5 herë më i shpejtë
	GMRESR	37.81	9	3.289	1.78 E-04	
0.1	SHUMR	249.98	65	25.278	1.92 E-04	7.2 herë më i shpejtë
	GMRESR	46.11	9	3.494	2.22 E-04	
0.05	SHUMR	478.55	120	45.945	2.44 E-04	11 herë më i shpejtë
	GMRESR	64.88	10	4.285	3.60 E-04	
0.01	SHUMR	2055.5	350	140.132	2.35 E-03	12 herë më i shpejtë
	GMRESR	212.46	10	11.835	8.19 E-04	

Tabelë 5.3 Rezultatet numerike të invertimit të operatorit kiral me algoritmin e ri të zhvilluar krahësuar me algoritmin optimal SHUMR për konstante çiftimi $\beta = 1.2$.

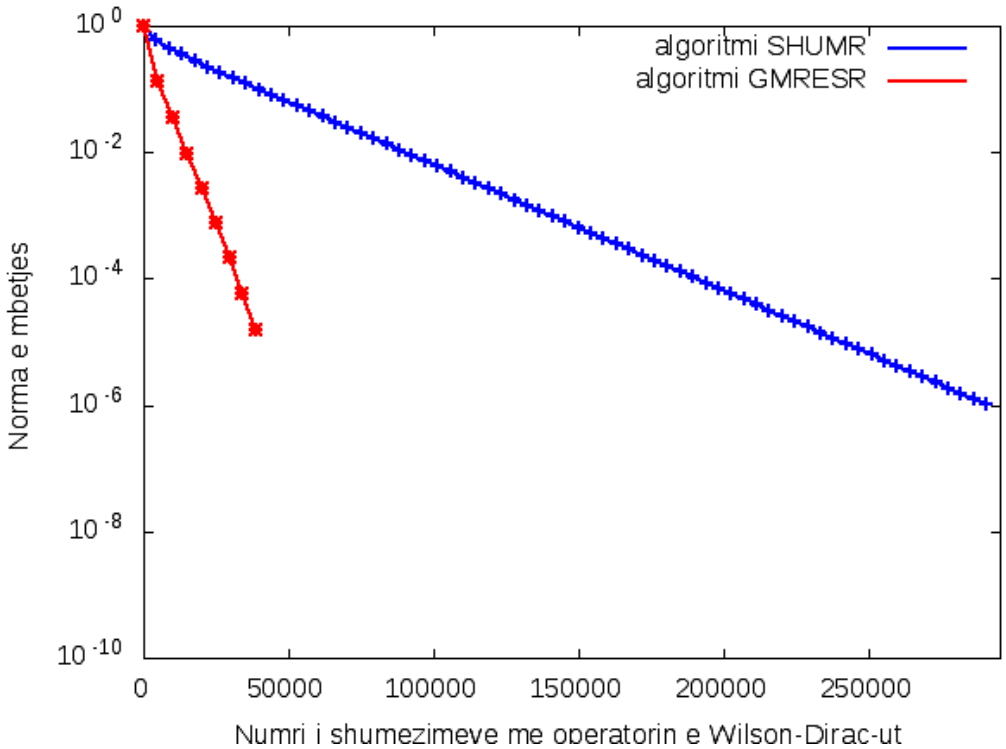
Masa e kuarkut	Algoritmet	Koha e invertimit në sekonda	Numri i hapave deri në konvergjencë	Numri i shumëzimeve me operatorin e Wilson-Dirac-ut (x 10^4)	Gabimi i normës së mbetjes për 100 konfig.	Krahësimi (GMRESR vs SHUMR)
0.5	SHUMR	42.15	14	4.512	4.05E-05	2.3 herë më i shpejtë
	GMRESR	19.99	7	1.939	8.69E-05	
0.45	SHUMR	46.79	14	4.563	5.28E-05	2.3 herë më i shpejtë
	GMRESR	20.92	7	2.015	8.03E-05	
0.4	SHUMR	53.43	17	5.567	5.20 E-05	2.7 herë më i shpejtë
	GMRESR	22.35	7	2.042	9.58 E-05	
0.35	SHUMR	62.71	20	6.605	5.69 E-05	3.2 herë më i shpejtë
	GMRESR	23.48	7	2.086	1.04 E-04	
0.3	SHUMR	74.10	23	7.694	7.18 E-05	3.6 herë më i shpejtë
	GMRESR	25.28	7	2.126	1.37 E-04	
0.25	SHUMR	86.95	28	9.202	7.49 E-05	4.3 herë më i shpejtë
	GMRESR	26.07	7	2.118	1.39 E-04	
0.2	SHUMR	111.34	34	11.572	1.04 E-04	4.6 herë më i shpejtë
	GMRESR	29.79	8	2.533	1.45 E-04	
0.15	SHUMR	149.32	45	15.563	1.18 E-04	5.2 herë më i shpejtë
	GMRESR	34.87	9	2.967	1.96 E-04	
0.1	SHUMR	222.97	67	23.118	1.59 E-04	6.5 herë më i shpejtë
	GMRESR	42.97	10	3.552	2.25 E-04	
0.05	SHUMR	439.91	130	45.798	2.49 E-04	10.4 herë më i shpejtë
	GMRESR	60.29	11	4.399	3.40 E-04	
0.01	SHUMR	1956.00	380	153.202	1.95 E-03	12 herë më

	GMRESR	100.88	11	13.605	7.27 E-04	i shpejtë

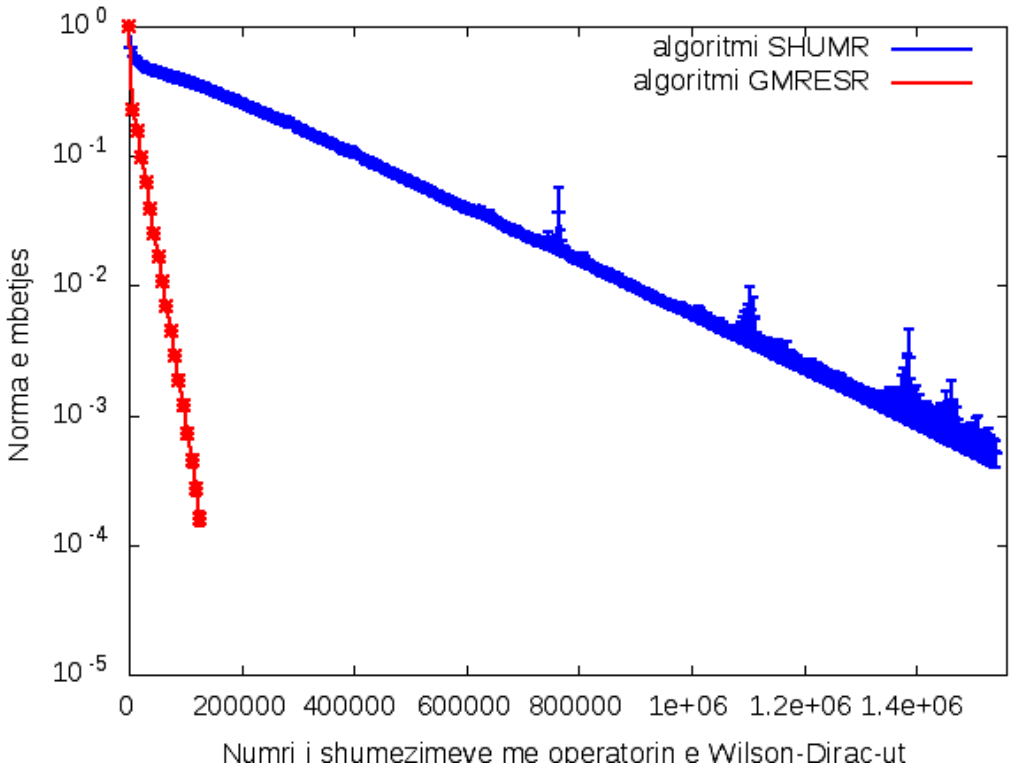
Në vijim paraqiten rezultatet grafike për konstante çiftimi $\beta = 1.0$ dhe vetëm për disa masa kuarkesh, konkretisht për m_q=0.5, m_q=0.1, dhe m_q=0.01



Figurë 5.8 Historia e konvergjencës së normës së mbetjes si funksion i numrit të shumëzimeve me matricën e Wilson-Dirac-ut të algoritmit të ri të propozuar GMRESR i parakushtëzuar dhe SHUMR, për invertimin e operatorit kiral të mbulimit në një rrjetë 32 x 32 me fushë kalibruese U(1), ***konstante çifitmi*** $\beta = 1.0$ ***dhe masë kuarku 0.5*** (në njësi rrjetore).



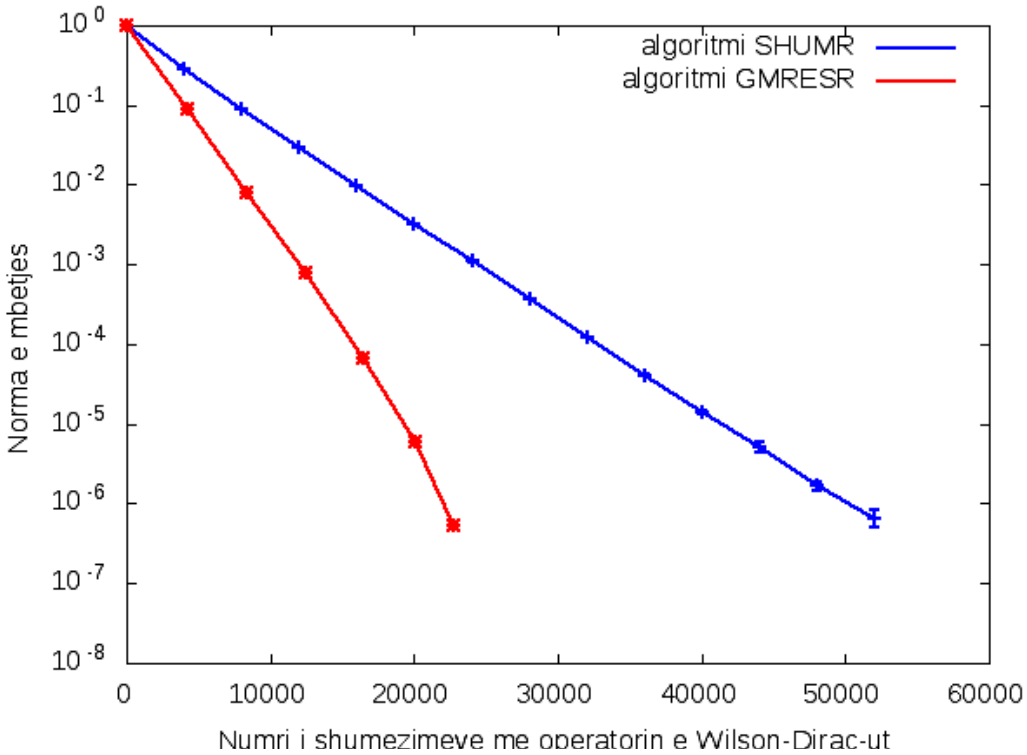
Figurë 5.9 Historia e konvergjencës së normës së mbetjes si funksion i numrit të shumëzimeve me matricën e Wilson-Dirac-ut të algoritmit të ri të propozuar GMRESR i parakushtëzuar dhe SHUMR, për invertimin e operatorit kiral të mbulimit në një rrjetë 32 x 32 me fushë kalibruese U(1), ***konstante çifitmi*** $\beta = 1.0$ ***dhe masë kuarku 0.1*** (në njësi rrjetore).



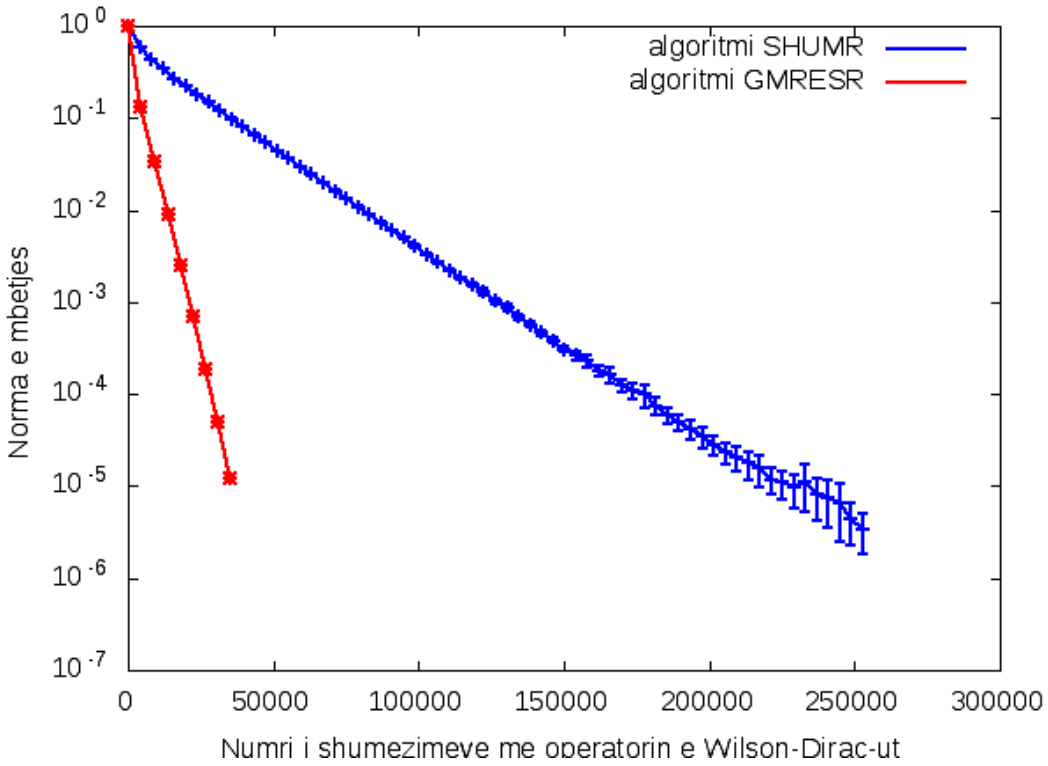
Figurë 5.10 Historia e konvergjencës së normës së mbetjes si funksion i numrit të shumëzimeve me matricën e Wilson-Dirac-ut të algoritmit të ri të propozuar GMRESR i parakushtëzuar dhe SHUMR, për invertimin e operatorit kiral të mbulimit në një rrjetë 32 x 32 me fushë kalibruese U(1), ***konstante çifitmi*** $\beta = 1.0$ ***dhe masë kuarku 0.01*** (në njësi rrjetore).

Paraqitja grafike në Figurat 5.8, 5.9 dhe 5.10 e historisë së konvergjencës për secilin algoritëm të testuar për konstante çiftimi $\beta = 1.0$ tregon se algoritmi i ri i propozuar, GMRESR i parakushtëzuar, konvergjon më shpejt se SHUMR për kuarke me masa të ndryshme. Siç mund të shihet nga Figura 5.8 për masë kuarku 0.5 algoritmi GMRESR fiton një faktor prej 2 krahësuar me algoritmin optimal të testuar SHUMR. Nga Figura 5.9 për masë kuarku 0.1 fitohet një faktor 8 me algoritmin e ri të propozuar dhe nga Figura 5.10 për masë kuarku 0.01 fitohet një faktor 12. Kështu, ajo që është më e rëndësishme është fakti se ***algoritmi i ri është më i shpejtë dhe fitohet më tepër kohë llogaritëse për kuarke të lehta***. Sfida kryesore llogaritëse e simulimeve numerikë në QCD-në rrjetore është ajo me kuarke të lehta.

Në vijim paraqiten rezultatet grafike për konstante çiftimi $\beta = 1.1$ dhe për disa masa kuarkesh, m_q=0.5, m_q=0.1.



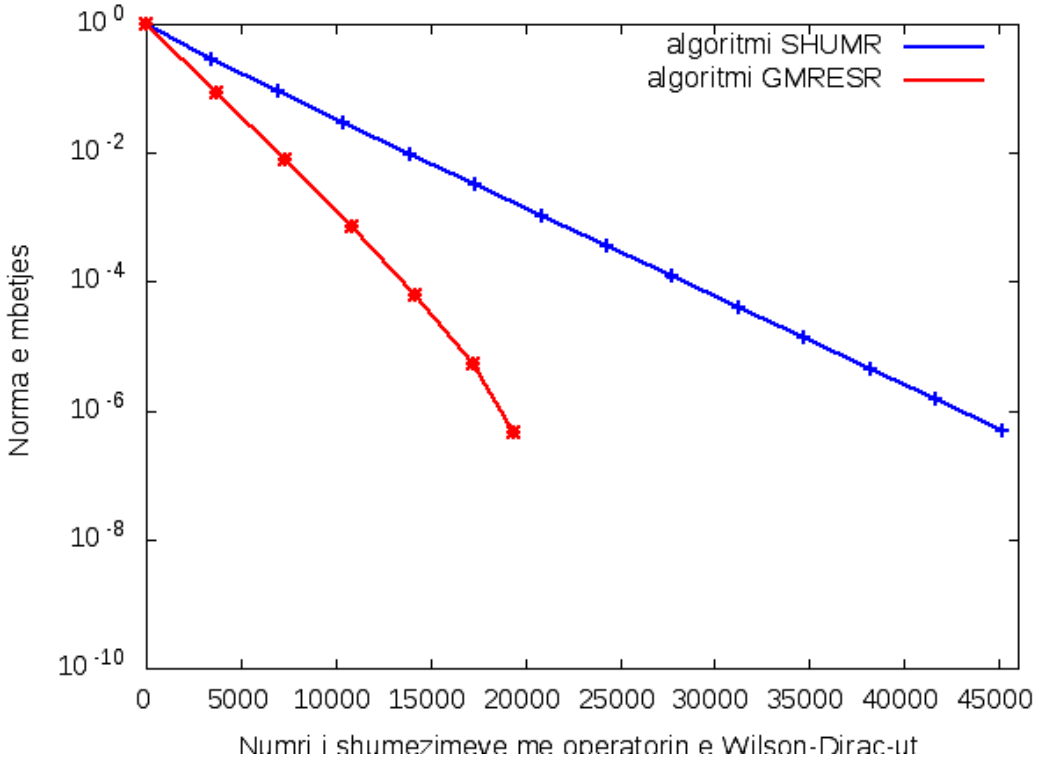
Figurë 5.11 Historia e konvergjencës së normës së mbetjes si funksion i numrit të shumëzimeve me matricën e Wilson-Dirac-ut të algoritmit të ri të propozuar GMRESR i parakushtëzuar dhe SHUMR, për invertimin e operatorit kiral të mbulimit në një rrjetë 32 x 32 me fushë kalibruese U(1), ***konstante çifitmi*** $\beta = 1.1$ ***dhe masë kuarku 0.5*** (në njësi rrjetore).



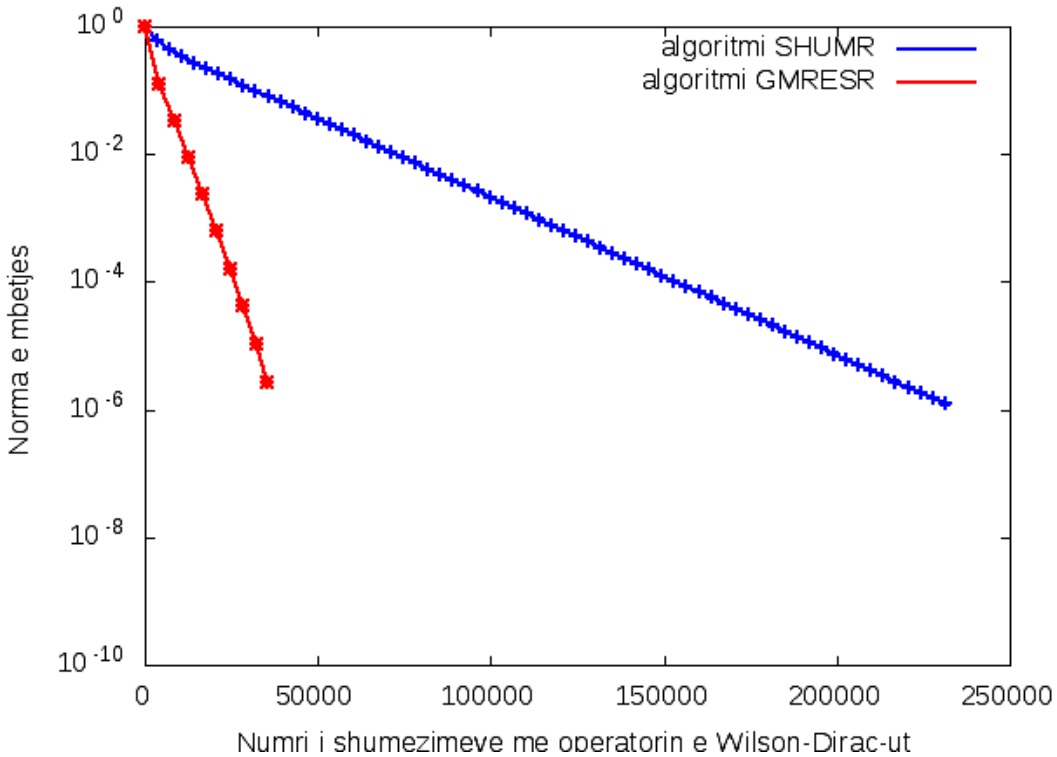
Figurë 5.12 Historia e konvergjencës së normës së mbetjes si funksion i numrit të shumëzimeve me matricën e Wilson-Dirac-ut të algoritmit të ri të propozuar GMRESR i parakushtëzuar dhe SHUMR, për invertimin e operatorit kiral të mbulimit në një rrjetë 32 x 32 me fushë kalibruese U(1), ***konstante çifitmi*** $\beta = 1.1$ ***dhe masë kuarku 0.1*** (në njësi rrjetore).

Paraqitja grafike në Figurat 5.11, 5.12 e historisë së konvergjencës për secilin algoritëm të testuar për konstante çiftimi $\beta = 1.1$ tregon se algoritmi i ri i propozuar, GMRESR i parakushtëzuar, edhe në këtë rast konvergjon më shpejt se SHUMR për kuarke me masa të ndryshme. Siç mund të shihet nga Figura 5.11për masë kuarku 0.5 algoritmi GMRESR fiton një faktor prej 2 krahësuar me algoritmin optimal të testuar SHUMR. Nga Figura 5.12 për masë kuarku 0.1 fitohet një faktor 7 me algoritmin e ri. Pra edhe për konstante çiftimi $\beta = 1.1$, me algoritmin e ri që propozojmë fitohet më tepër kohë llogaritëse për kuarke të lehta.

Në vijim paraqiten rezultatet grafike për konstante çiftimi $\beta = 1.2$ dhe për disa masa kuarkesh, mq=0.5, mq=0.1.



Figurë 5.13 Historia e konvergjencës së normës së mbetjes si funksion i numrit të shumëzimeve me matricën e Wilson-Dirac-ut të algoritmit të ri të propozuar GMRESR i parakushtëzuar dhe SHUMR, për invertimin e operatorit kiral të mbulimit në një rrjetë 32 x 32 me fushë kalibruese U(1), ***konstante çifitmi*** $\beta = 1.2$ ***dhe masë kuarku 0.5*** (në njësi rrjetore).



Figurë 5.14 Historia e konvergjencës së normës së mbetjes si funksion i numrit të shumëzimeve me matricën e Wilson-Dirac-ut të algoritmit të ri të propozuar GMRESR i parakushtëzuar dhe SHUMR, për invertimin e operatorit kiral të mbulimit në një rrjetë 32 x 32 me fushë kalibruese U(1), ***konstante çifitmi*** $\beta = 1.2$ ***dhe masë kuarku 0.1*** (në njësi rrjetore).

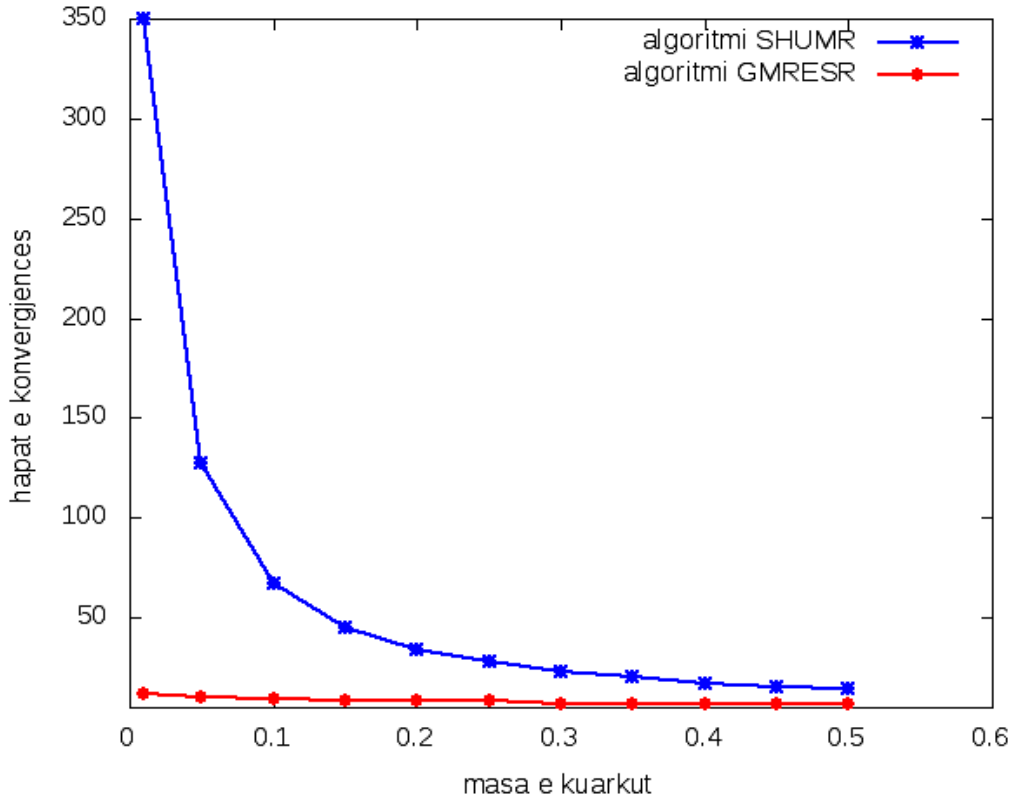
Edhe për konstante çiftimi $\beta = 1.2$ nga paraqitja grafike në Figurat 5.13, 5.14 e historisë së konvergjencës për secilin algoritëm të testuar duket se algoritmi i ri i propozuar, GMRESR i parakushtëzuar, edhe në këtë rast konvergjon më shpejt se SHUMR për kuarke me masa të ndryshme. Siç mund të shihet nga Figura 5.13 për masë kuarku 0.5 algoritmi GMRESR fiton një faktor prej 2 krahësuar me algoritmin optimal të testuar SHUMR. Nga Figura 5.14 për masë kuarku 0.1 fitohet një faktor 7 me algoritmin e ri.

Nga ana tjetër krahësuar me algoritmin e propozuar Cundy *et. al.*, (2005) por në fushën kalibruese SU(3), parakushtëzimi i zgjedhur nga ne çon në një algoritëm 2 herë më të shpejtë për të njëjtën masë kuarku. Ky rezultatet është mjaft premtues në përshtatjen në të ardhmen të algoritmit të ri të propozuar në QCD-në 4-përmasore, pra në SU(3).

5.4.2 Studimi i përshkallëzimit të algoritmit GMRESR i parakushtëzuar me masën e kuarkut

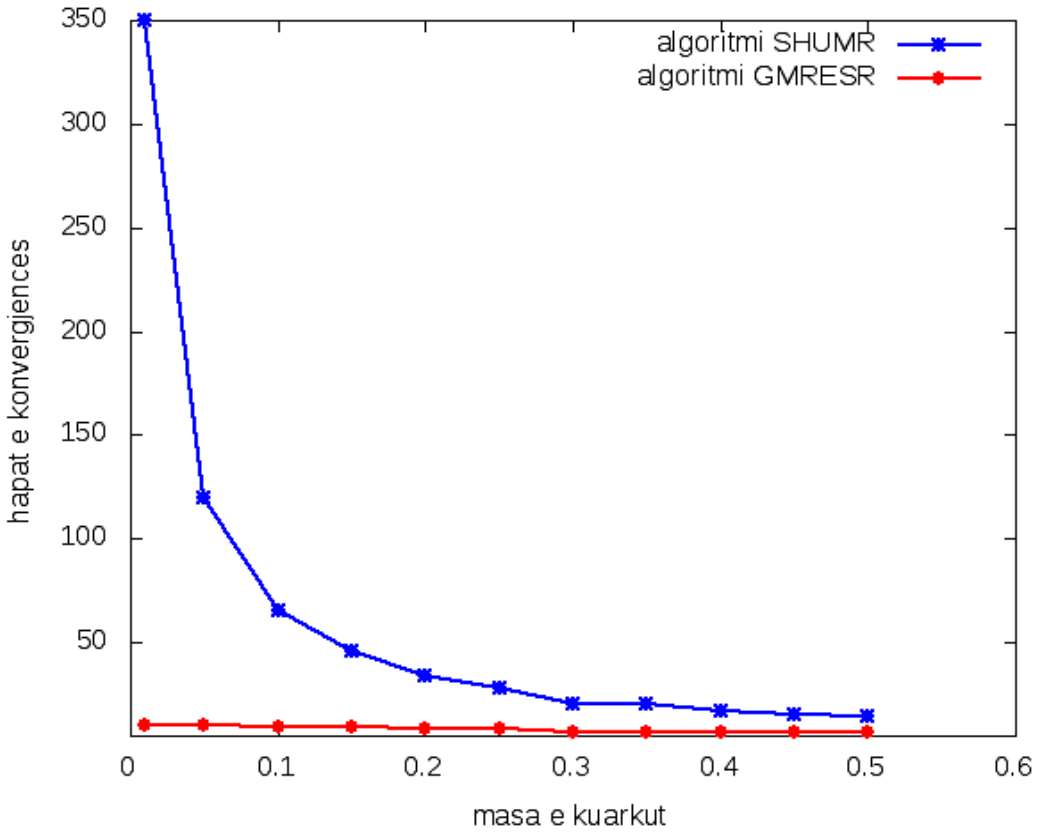
Në simulimet numerike të QCD-së rrjetore kuarket up, doën dhe strange jane kuarke të lehta, pasi masa e tyre është më e vogël krahësuar më parametrin shkallë të shpjeguar në seksionin (2.5) pra $m_q < \Lambda_{QCD}$. Sfida kryesore sot në simulimet e QCD-së rrjetore janë simulimet me kuarke të lehta.

Një tjetër studim i rëndësishëm mbi efikasitetin dhe shpejtësinë e një algoritmi në simulimet numerike të QCD-së rrjetore është përshkallëzimi i algoritmit me masën e kuarkut. Algoritmet standartë të nënhapësirave të Krylov-it siç u përmend dhe më sipër vuajnë nga fenomeni i quajtur **ngadalësim kritik.** Numri i iteracioneve (hapave) N të algoritmit përshkallëzohet me masën e kuarkut si $N \sim 1/m_q^{1/2}$ (Boriçi & Forcrand, 1994). Për këtë qëllim kemi llogaritur gjithashtu për secilin algoritëm, për secilën konstante çiftimi të testuar: kohën e invertimit të operatori të mbulimit (në sekonda) dhe numrin e iteracioneve (hapave) deri në konvergjencë siç u paraqiten në Tabelat 5.1 deri 5.3.

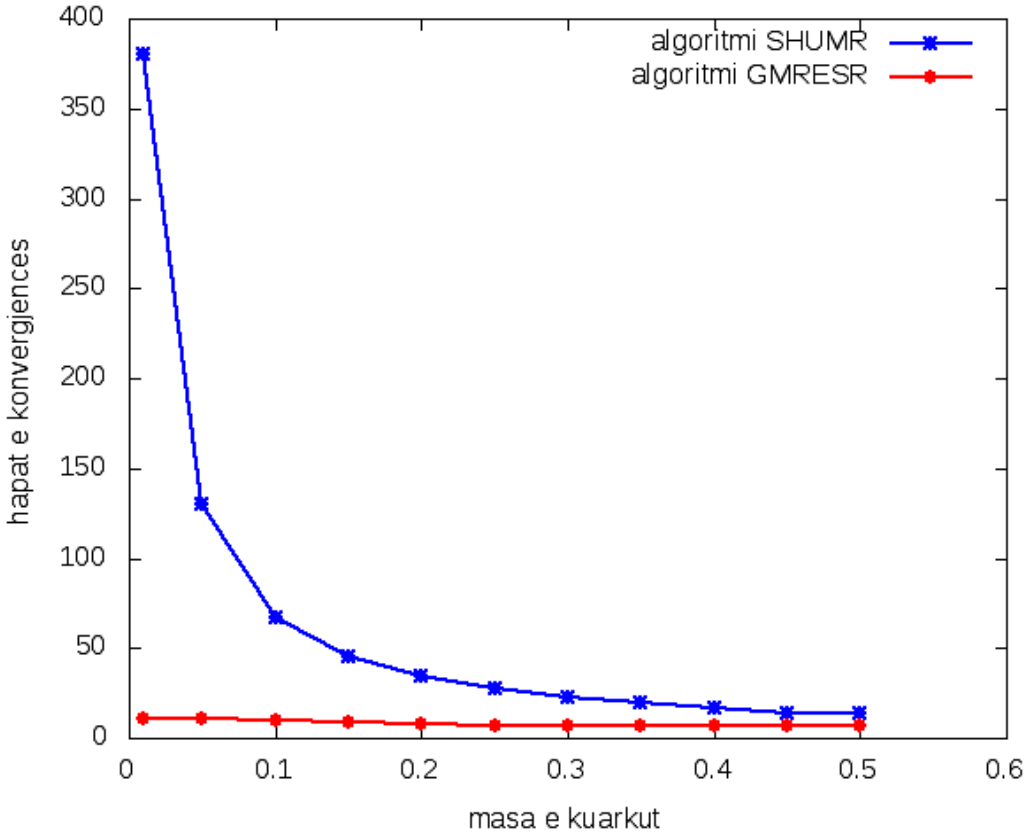


Figurë 5.15 Varësia e numrit të iteracioneve deri në konvergjencë nga masa e kuarkut i algoritmeve GMRESR i parakushtëzuar dhe SHUMR, për invertimin e operatorit kiral të mbulimit në një rrjetë 32 x 32 me fushë kalibruese U(1) dhe konstante çifitmi $\beta = 1.0$

Për të studjuar përshkallëzimin kemi ndërtuar grafikët e varësisë së numrit të hapave deri në konvergjencë nga masa e kuarkut për të treja konstantet e çiftimit të cilët paraqiten në Figurat 5.15, 5.16 dhe 5.17.



Figurë 5.16 Varësia e numrit të iteracioneve deri në konvergjencë nga masa e kuarkut i algoritmeve GMRESR i parakushtëzuar dhe SHUMR, për invertimin e operatorit kiral të mbulimit në një rrjetë 32 x 32 me fushë kalibruese U(1) dhe konstante çifitmi $\beta = 1.1$



Figurë 5.17 Varësia e numrit të iteracioneve deri në konvergjencë nga masa e kuarkut i algoritmeve GMRESR i parakushtëzuar dhe SHUMR, për invertimin e operatorit kiral të mbulimit në një rrjetë 32 x 32 me fushë kalibruese U(1) dhe konstante çifitmi $\beta = 1.2$

Nga grafikët e paraqitur në Figurat 5.15, 5.16 dhe 5.17 rezulton se numri i iteracioneve deri ne konvergjencë i algoritmit të ri të zhvilluar GMRESR i parakushtëzuar është pothuajse konstant dhe ai i algoritmit SHUMR përshkallëzohet si $N \sim 1/m_q^{1/2}$. Ky rezultat tregon se ***algoritmi i propozuar nuk vuan nga ngadalësimi kritik.***

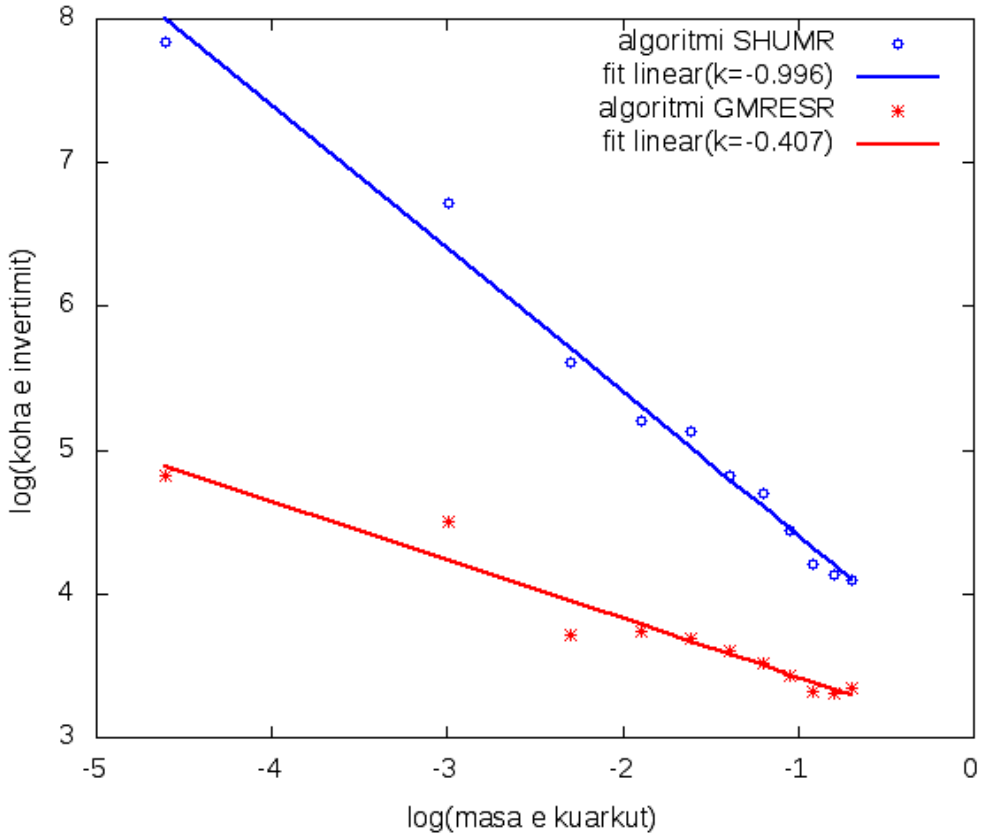
Le të studjojmë varësinë e kohës së invertimit t (sek) për secilin algoritëm nga masa e kuarkut m_q (njësi rrjetore). Kjo varësi mund të modelohet si

$$t \sim m^k \tag{V.4.1}$$

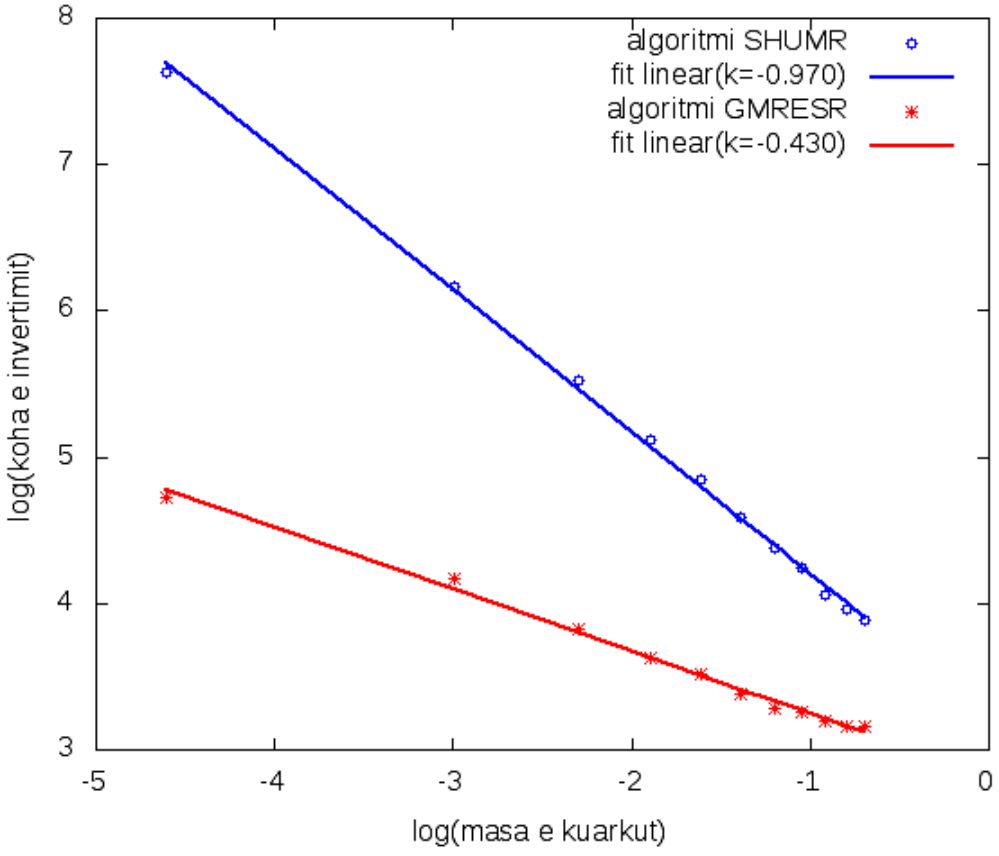
ose në shkallë logaritmike

$$\log(t) \sim k \log(m_q) \tag{V.4.2}$$

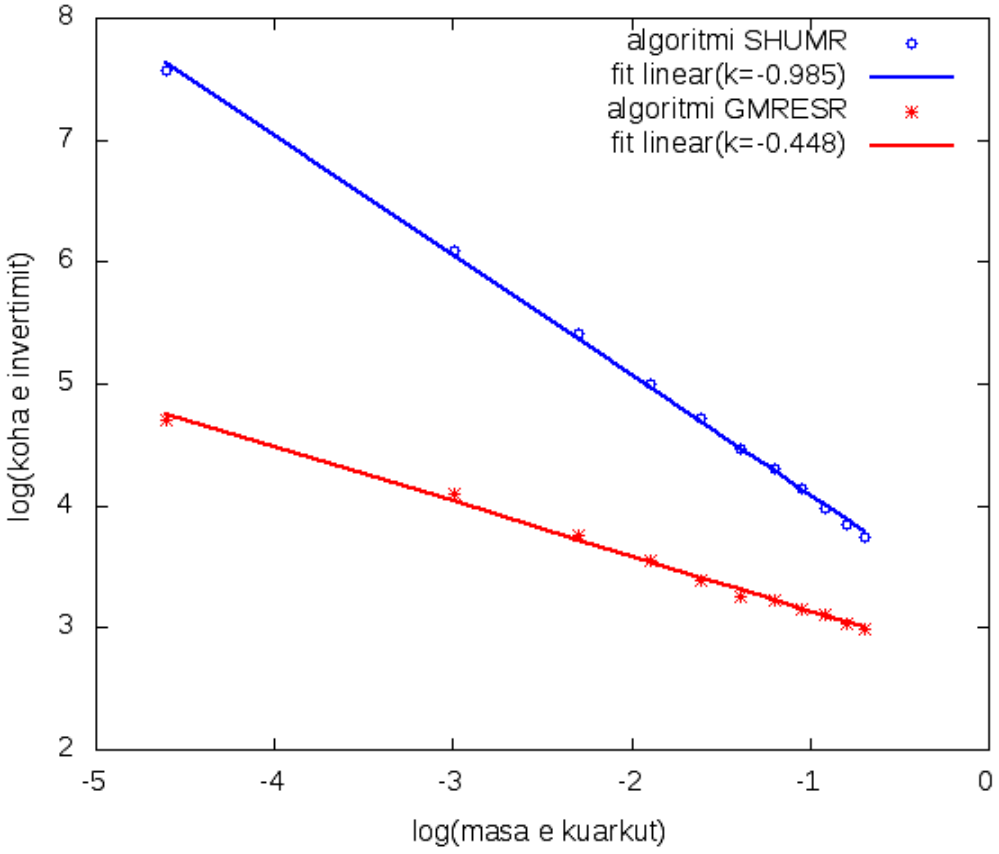
Një algoritëm invertimit do të ishtë optimal për koeffiçent $k \approx 0$, pra totalisht i pavarur nga masa e kuarkut. Në vijim paraqiten grafikët e varësisë së kohës së invertimit (në sekonda) të operatorit kiral të mbulimit nga masa e kuarkut në shkallë logaritmike.



Figurë 5.18 Varësia e kohës së invertimit (në sekonda) të operatorit kiral të mbulimit nga masa e kuarkut në shkallë logaritmike duke përdorur algoritmet GMRESR i parakushtëzuar dhe SHUMR, në një rrjetë 32 x 32 me fushë kalibruese U(1) dhe konstante çifitmi $\beta = 1.0$.



Figurë 5.19 Varësia e kohës së invertimit (në sekonda) të operatorit kiral të mbulimit nga masa e kuarkut në shkallë logaritmike duke përdorur algoritmet GMRESR i parakushtëzuar dhe SHUMR, në një rrjetë 32 x 32 me fushë kalibruese U(1) dhe konstante çifitmi $\beta = 1.1$



Figurë 5.20 Varësia e kohës së invertimit (në sekonda) të operatorit kiral të mbulimit nga masa e kuarkut në shkallë logaritmike duke përdorur algoritmet GMRESR i parakushtëzuar dhe SHUMR, në një rrjetë 32 x 32 me fushë kalibruese U(1) dhe konstante çifitmi $\beta = 1.2$

5.5 Përfundime

Simetria kirale në QCD-në rrjetore është shumë e rëndësishme pasi kjo veti është thelbësore për bashkëveprimet e forta. Simulimet në rrjetë me fermione kirale kanë kosto të lartë llogaritëse për shkak të formës komplekse të operatorit që lidhet me to, pra operatorit të mbulimit. Nga rezultatet duket se algoritmi GMRESR i parakushtëzuar konvergjon më shpejt krahësuar me një nga zgjidhësit optimalë të operatorit të mbulimit siç është SHUMR, për masa kuarkesh të ndryshme.

Gjithashtu treguam se fitohet më shumë kohë për kuarket të lehta me GMRESR dhe se ky algoritëm është afërsisht i pavarur nga masa e kuarkut. Në këtë mënyrë shmanget ai që quhet ngadalësim kritik i algoritmit për masa të lehta kuarkesh. Ky është rezultat kyç në simulimet me fermione kirale në teoritë rrjetore.

KONKLUZIONE

Ky është punimi i parë në gjuhën shqipe për metodat llogaritëse në studimin e teorisë së bashkëveprimeve të forta të grimcave elementare, Kromodinamikës Kuantike.

Konkluzioni kryesor i këtij punimi është: *Kromodinamika rrjetore me fermione kirale mund të simulohet thuajse pa ngadalësim kritik. Deri më sot kjo nuk ka qënë e mundur sepse algoritmet e përdorura nuk tregojnë avantazhet e sjellura në këtë punim. Sidoqoftë mbetet që rezultatet e marra në QCDLAB të shtrihen në katër përmasa përpara se algoritmet tona të përdoren nga komuniteti i QCD-së rrjetore*. Më konkretisht arritjet e këtij punimi mund të përmblidhen si më poshtë:

Së pari për të studjuar bashkëveprimet midis kuarkeve duhen llogaritur përhapësit e kuarkeve që matematikisht janë të anasjelltët e operatorit te Dirakut. Ndërkohë që insistohet të ndërtohet në rrjetë një teori fermionike *kirale* pasi simetria kirale është karakteristikë e bashkëveprimeve të forta. Kështu, në këtë punim ne llogaritëm përhapësit e kuarkeve kirale në rrjetë me anë të një operatori kiral të Dirakut, siç është operatori i mbulimit i Neuberger-it. Meqënëse ky operator lidh dy nënhapësira me anë funksionesh transhendente operatoriale edhe metodat llogaritëse kishin kompleksitet të lartë. Si rrjedhim, metoda e rrjetave të shumëfishta e testuar një dekadë më parë por për një konstante çiftimit është gjetur të përshpejtojë zgjidhjen. Nëpërmjet ekuivalentimit të fermioneve te mbulimit të Neuberger-it me fermionet e shkurtuara të mbulimit, në një formulim 5-përmasor, me përmasë të pestë Euklidiane, bëhet e mundur përshtatja dhe përdorimi i rrjetave të shumëfishta sipas përmasës së pestë. Në studimin tonë ky algoritëm është algoritmi me dy rrjeta, i cili rezultoi 6-herë më i shpejtë se algoritmet standarte të nënhapësirave të Krilovit për konstantet e çiftimit beta = 5.8, 5.7, 5.6, 5.5 dhe për ato masa kuarkesh të caktuara për të cilat ai konvergjon. Në të ardhmen mbetet per tu studjuar stanjacioni i implementimit të algoritmit në katër përmasa për masa të lehta kuarkesh.

Së dyti simulimet në rrjetë me fermione kirale kanë kosto të lartë llogaritëse për shkak të formës komplekse të operatorit që lidhet me to, pra operatorit të mbulimit. Pikërisht fokusi primar i këtij disertacioni ishte zhvillimi i algoritmeve të shpejtë invertimi të këtij operatori. Mjedis i përshtatshëm për zhvillimin e algoritmeve të reja është QED- rrjetore, ose teoria kalibruese rrjetore U(1) në dy përmasa, e cila ndan mjaft tipare dhe algoritme të përbashkët me teorinë 4-përmasore. Një paketë funksionesh llogaritëse e ndërtuar në këtë mjedis është dhe QCDLAB. Në studimin tonë ne zhvilluam një algoritëm të ri të quajtur GMRESR i parakushtëzuar në QCDLAB. Rezultoi se GMRESR i parakushtëzuar konvergjon më shpejt krahësuar me një nga zgjidhësit optimalë të operatorit të mbulimit siç është SHUMR. Për masa kuarkesh të ndryshme nga më të rënda 0.5 deri në më të lehta 0.01 fitohej një faktor nga 2 deri në 12. Gjithashtu treguam se fitohet më shumë kohë llogaritëse për kuarket të lehta me GMRESR dhe se ky algoritëm shkallëzohet me të anasjelltën e rrënjës katrore të masës së kuarkeve në krahësim me ligjin invers proporcional të algoritmeve standarte. Në këtë mënyrë shmanget ai që quhet ngadalësim kritik i algoritmit për masa të lehta kuarkesh.

Ky punim përveç konkluzioneve të mesipërme ka dhënë një ndihmesë konkrete në testimin e koncepteve fizike dhe softwareve FermiQCD dhe QCDLAB për llogaritjen e disa madhësive fizike shumë të rëndësishme në fizikën e grimcave elementare. Kjo e bën punimin njëkohësisht edhe me vlerë didaktike si edhe referuese për studjuesit shqipëtarë të kësaj fushe. Në veçanti për këto llogaritje janë marrë rezultatet e mëposhtme:

Së pari nga studimi i potencialit kuark-antikuark në këtë punim u vu re se për distanca të largëta kuark-antikuark, potenciali rritet linearisht me distance, si rrjedhim konsifrmohet një tipar i rëndëishëm i teorisë QCD në regjime të ulta energjitike i quajtur *mbyllësi e kuarkeve*.. Ky fakt konfirmon mosvrojtueshmërinë në natyrë të kuarkeve si grimca të lira. Nga testimi i bërë për të llogaritur potencialin statik kuark- antikuark prej laqeve të Wilsoni-it me forma të ndryshme dhe metoda të ndryshme, arritëm në përfundimin *se metoda e potencialeve efektive prej laqeve planare është më efikase*. Problemi me laqet vëllimore lidhet me numrin e madh të laqeve vëllimore që duheshin gjeneruar dhe fluktuacioneve më të mëdha. Fushat kalibruese duhet të jenë mjaftueshmërisht të lëmuara që "sinjali" të jetë më i madh se "zhurma" në llogaritjet rrjetore.

Së dyti nga llogaritja e potencialit kuark antikuark në teoritë e pastra kalibruese në përcaktuam dhe shkallën e teorisë. Për të marrë madhësi fizike prej atyre rrjetore është e rëndësishme përcaktimi i parametrit të shkallës. Në këtë punim në përdorëm parametrin e tensionit të kordës si madhësi referencë për të bërë këtë përcaktim. Vlerat e tensionit të kordës të llogaritura u krahësuan me ato prej fenomenit të kordës bozonike nga ku u përcaktua dhe parametri rrjetor për secilën rrjetë të përdorur në simulim. Nga ky përcaktim mund të konvertohen pastaj të gjitha madhësitë e tjera të llogaritura në rrjetë në madhësi fizike.

Së treti në këtë punim në sollëm teknikat e llogaritjes në paralel në llogaritjet e QCD-së rrjetore. Në simulimet në kompjuterat tonë individualë me rrjeta shumë të vogla 4^4 (të rralla) do duhej rreth 8 orë për të marrë laqe drejtkëndore të Wilsoni-it për 100 konfiguracione. Ndërkohë të njëjtës llogaritje në paralel do t'i duheshin disa sekonda. Kështu një drejtim i rëndësishëm ku duhet të fokusohen llogaritjet e ardhshme në QCD-në rrjetore janë llogaritjet në paralel. Nga testi i performancës së këtij softwari rezultoi se ai përshkallëzohet shumë mirë deri për numër procesorësh të përdorur np=4. Koha kompjuterike e llogaritjes bie eksponencialisht me rritjen e numrit të proçesorëve të përdorur për një nyje, për një rrjetë të fiksuar. Edhe testi i përshpejtimit dhe efikasitetit të tij konfirmojnë faktin se softwari i zgjedhur për llogaritjet tona në paralel është një ndër softwaret më të mirë sot për sot në fushën e QCD-së rrjetore. Me kodet e reja të programuar në C++ me gjuhën e FermiQCD-së ne japim kontributin tonë në pasurimin e kësaj pakete në fushën e llogaritjeve në paralel të QCD-së rrjetore.

BIBLIOGRAFI

Alexandrou C. (2011): *"Introduction to Lattice QCD",* University of Cyprus & Cyprus Institute, lezions in Aurora School, ECT* Trento

Alles B., Elia M.D., Giacomo A. D., Kirchner R. (1998): *"A critical comparison of different definitions of topological charge on the lattice"*, preprint hep-lat/9711026

Arnoldi W. E. (1951): "*The principle of minimized iteration in the solution of the matrix eigenvalue problem"*, Quart. Appl. Math. 9, 17

Atiyah M., Singer I. M. (1971): "*The Index of Elliptic Operators I"*, Ann. Math.93, 139

Banks T., Casher A. (1980), Nucl. Phys. B 169, 103.

Barkai D., Creutz M., Moriarty K.J.M. (1984): *"Monte Carlo study of SU(3) gauge theory on a 12^4 lattice,*" Phys. Rev. D29, 1207-1212.

Ben-Av I R., *et al* (1991): "*Fermion simulations using parallel transported multigrid"*, Phys. Lett. B253 , pp. 185-192

Ben-Av I R., Harmatz M., Solomon S., Lauwers P. G. (1993): "*Parallel transported multigrid for inverting the dirac operator: Variants of the method and their efficiency"*, Nucl. Phys. B405, pp. 623-666

Bethke S. (2007): "*Experimental Tests of Asymptotic Freedom"*, Prog. Part. Nucl. Phys. 58, 351.

Boriçi A. (2006): "*QCDLAB: Designing Lattice QCD Algorithms with MATLAB*", High Energy Physics - Lattice (hep-lat), arXiv:hep-lat/0610054

Boriçi A. (1999): "*Truncated Overlap Fermions: the link between Overlap and Domain Wall Fermions"*, in V. Mitrjushkin and G. Schierholz (edts.), Lattice Fermions and Structure of the Vacuum, Kluëer Academic Publishers, 2000, arXiv:hep-lat/9912040v1.

Boriçi A. (2000): *"Lanczos approach to the inverse square root of a large and sparse matrix",* J. Comp. Phys. 162, pp 123-131

Boriçi *A.* (2004): "*Computational methods for the fermion determinant and the link between overlap and domain wall fermions"*, QCD and Numerical Analysus III, Springer 2005, arXiv:hep-lat/0402035v1.

Boriçi A. (2005): "*The two-grid algorithm confronts a shifted unitary orthogonal method*", Nucl. Phys. Proc. Suppl. 140 , pp 850-852, hep-lat/0409078

Boriçi A. (2007): "*Speeding up Domain Wall Fermion Algorithms using QCDLAB*", Invited talk given at the 'Domain Wall Fermions at Ten Years', Brookhaven National Laboratory, arXiv:hep-lat/0703021

Boriçi A. (2008): *Creutz Fermions on an Orthogonal Lattice*, Phys. Rev. D78: 074504, arXiv:0712.4401

Boriçi A. (2009): "*Krylov Subspace Methods in Lattice QCD"*, ISBN 978-99943-889-1-2, PhD thesis defended at the Sëiss Federal Institute of Tehcnology Zurich, 1996

Boriçi A., Allkoci A. (2006): "A *fast minimal residual solver for overlap fermions*", High Energy Physics - Lattice (hep-lat), hep-lat/0602015

Boriçi A., Forcrand de Ph. (1994): "*Fast Krylov Space Methods for Calculation of Quark Propagator"*, Proceedings of Physics Computing, p. 711,hep-lat/9405001

Boriçi A., Rexhepi E. (2010): "*Teoritë Kalibruese të Grimcave Elementare"*, Instiuti i karrierrës Proteus, ISBN 978-9928-4021-0-3.

Boriçi, A (1999): "*Truncated Overlap Fermions: the link between Overlap and Domain Wall Fermions"*, in V. Mitrjushkin and G. Schierholz (edts.), Lattice Fermions and Structure of the Vacuum, Kluwer Academic Publishers

Brandt I A. (1992): "*Multigrid methods in lattice field computations*" Nucl Phys. Proc. Suppl. 26, pp. 137-180

Brower I R. C., Edwards R. G., Rebbi C., Vicari E. (1991): "*Projective multigrid for Wilson fermions"*, Nucl. Phys. B366 pp. 689-705

Bryner J. (2013): "*Particle confirmed as Higgs boson",* NBC News. Retrieved 2013-03-14.

Callan C.G. , Harvey J.A. (1985): "*Anomalies and Fermion zero Modes on Strings and Domain Walls"*, Nucl. Phys. B250 427

Cardoso M., Cardoso N., Bicudo P. (2009): *Lattice QCD computation of the colour fields for the static hybrid quark-gluon-antiquark system, and microscopic study of the Casimir scaling***,** arXiv:0912.3181v1-hep-lat.

Cheng P. T., Clarendon L.F.Li (1984): "*Gauge Theory of Elementary Particle Physics"*, Press, Oxford.

Collins P. D. B., (1977): "*An Introduction to Regge Theory and High-Energy Physics"*, Cambridge: Cambridge University Press. ISBN 0-521-21245-6.

Cottingham W. N., Greenwood A. D. (2001): "*An Introduction to the Standart Model of Particle Physics"*, Second Edition, Camridge University Press, ISBN-13 978-0-521-85249-4.

Creutz M. (1980): "*Monte Carlo study of quantized SU(2) gauge theory*," Phys. Rev. D21, 2308-2315.

Creutz M. (1985): "*Quarks, gluons and lattices"*, Cambridge University Press.

Creutz M. (1989): "*Lattice Gauge Theories and Monte Carlo Algorithms"*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 10 A].

Creutz M. (2011): "*Confinement, chiral symmetry, and the lattice"*, Acta Physica Slovaca 61, No.1, 1-127 Brookhaven National Laboratory Upton, NY 11973.

Creutz M., Moriarty K.J.M. (1982): "*Numerical studies of Wilson loops in SU(3) gauge theory in four dimensions",* Phys. Rev. D26, 2166-2168.

Cundy N., Frommer A., Lippert Th., Krieg S., Schwfer K. (2005): "*Numerical Methods for the QCD Overlap Operator: III. Nested Iterations*", Comput. Phys. Commun. 165, pp 221-242

Di Pierro M. (2001): "*Parallel Programming with Matrix Distributed Processing"*, Computer Physics Communcations, 141, 98-148.

Di Pierro M. (2002): "*FermiQCD: A tool kit for parallel lattice QCD applications"*, Nuclear Physics B- Proceedings, Supplement, 106-107, 1034-1036

Di Pierro M. , El-Khadra A., Mackenzie P., Okamoto M., Oktay M. (2004): "*www.fermiqcd.net"*, Nuclear Physics Proceedings Supplement. 129: 832-834

Duane S., Kennedy A. D., Pendleton B. J., Roweth D. (1987): "*Hybrid Monte Carlo*, Phys. Lett. B195, 216-222

Dyson F.J. (1949): "*The S Matrix in Quantum Electrodynamics"*, Phys. Rev. 75, 1736.

Efron B. (1979): "*Computers and the Theory of Statistics"*, SIAM 21 460.

Eichten E., Preskill J. (1986): "*Gauge Theories on the Lattice"*, Nucl. Phys. B268 179-208

Fischer S., Frommer A., Glassner, Lippert Th., Ritzenhofer G., Schilling K. (1996), ËUB 96-1, HLRZ 4/96, hep-lat/ U. 9602019

Fritzsch H., Gell-Mann M., Leutëyler H. (1973): Phys. Lett. B47, 365.

Frommer A., Gusken S., Lippert T., Nockel B., Schilling K. (1995), J. Mod. Phys. C 6, 627, hep-lat/9504020

Frommer A., Hannemann V., Lippert T., Nockel B., Schilling K. (1994): "*Means of the Stabilized Biconjugate Gradient Algorithm",* J. Mod. Phys. C 5 1073

Gattringer C., Hoffmann R., Schaefer S. (2002): "*Setting the scale for the Luescher-Weisz action"*, Phys.Rev.D65:094503.

Gattringer C., Hagen C., Lang C. B., Limmer M., Mohler D., Schwfer A. (2009): "*Hadron Spectroscopy with Dynamical Chirally Improved Fermions*" Phys.Rev.D79:054501, arXiv:0812.1681.

Gattringer C., Lang C. B. (2009): *Quantum Chromodynamics on the Lattice: An Introductory Presentation*, Springer, ISBN: 3642018491, 343 pages.

Gaviria P., Forger M., Antoneli F. (2006): "*Maximal Subgroups of Compact Lie Groups"*, Journal of Lie Theory 22 (4) (2012) 949-1024.

Gell-Mann M. (1964): "*A Schematic Model of Baryons and Mesons"*, Phys. Lett. 8, 214

Ginsparg P. H., Wilson K.G. (1982): "*A remnant of chiral symmetry on the lattice"*, Phys.Rev. D 25, 2649.].

Golterman M.F.L. (1991): "*Lattice chiral gauge theories: results and problems"*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 20 528

Griffths D. (1987): "*Introduction to Elementary Particles*". John Wiley Sons, inc., New York, ISBN 0-471-60386-4

Gross D. J., Wilczek F. (1973): "*Asymptotically free gauge theories"*, Phys.Rev., D8: 3633–3652

Gross D. J., Wilczek F. (1973): "*Ultraviolet behavior of nonabelian gauge theories"*, Phys.Rev.Lett., 30: 1343–1346.

Gross D.J., Wilczek F., Politzer H.D. (1973): "*Reliable perturbative results for strong interactions"*, Phys. Rev. Lett. 30, 1346-1349.

Guagnelli M., Sommer R., Wittig H. (1998): "*Precision computation of a low-energy reference scale in quenched lattice QCD"***,** Nucl.Phys. B535, 389-402

Gupta R. (1997): "*Introduction to Lattice QCD*", Lectures given at the LXVIII Les Houches Summer School "Probing the Standard Model of Particle Interactions", July 28-Sept 5, 1997. 150 pages, LAUR-98-3174, arXiv:hep-lat/9807028.

Hasenfratz I P. (1998): "*Prospects for perfect actions"*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 63, pp. 53-58

Hoelbling C. (2011): "*Light hadron spectroscopy and pseudoscalar decay Constants*", The XXVIII International Symposium on Lattice Field Theory, Lattice 2010 June 14-19, 2010 Villasimius, Italy, arXiv:1102.0410v2.

Jackiw R., Rebbi C. (1976): *"Electron Fractionalization in 2D Dirac Fermions"*, Phys. Rev.D13, 3398

Jansen K. (1992): *"Chiral fermions and anomalies on a finite lattice"*, Phys. Lett. B288, 348.

Jansen K. (2012): "*Lattice computations for high energy physics"*, International Workshop on recent LHC results and related topics, Tirana

Jansen K., Schmaltz M. (1992): *"Critical momenta of lattice chiral fermions",* Phys. Lett. B 296, 374-378.

Kaplan D.B. (1992): "*A Method for Simulating Chiral Fermions on the Lattice",* Phys. Lett B288, 342.

Kennedy A. D. (2005): *"Fast Evaluation of Zolotarev Coefficients",* QCD and Numerical Analysis III, ISBN: 978-3-540-21257-7, Springer, proceedings of the Third International Workshop on Numerical Analysis and Lattice QCD, Edinburgh June-July 2003

Kuiper R. (2008): "*Introduction to Parallel Computing and the Message Passing Interface",* (MPI) July, Lectures

Lepage G. P. (2000): "*Lattice QCD for Novices"*, Proceedings of HUGS 98, edited by J.L. Goity, World Scientific

Lüscher M. (1982), Commun.Math.Phys.85,39

Lüscher M. (1990): "*Selected Topics In Lattice Field Theory"*, Lectures at the 1988 Les Houches Summer School, North Holland

Lüscher M. (1998): "*Exact chiral symmetry on the lattice and the Ginsparg-Wilson relation"*, Phys. Lett. B 428 342

Lüscher M. (2007): "*Deflation acceleration of lattice QCD simulations",* JHEP0712:011, http://xxx.lanl.gov/abs/0710.5417

Luscher M. (1994), *A New Approach to the Problem of Dynamical Quarks in Numerical Simulations of Lattice QCD"*, Nucl. Phys. B 418, 637-648

Melnikov K., Weinstein M. (2000): *"The Lattice Schwinger Model: Confinement, Anomalies, Chiral Fermions and All That",* Phys.Rev. D62, 094504, SLAC-PUB-8439

Metropolis N., Rosenbluth A. W., Rosenbluth M. N., Teller A. H., Teller E. (1953): "*Equation of state calculations by fast computing machines"*, The Journal of Chemical Physics, 21(6):1087-1092

Montvay I. (1992): *"Anomalous fermion number non-conservation on the lattice"*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 26 57

Montvay I., Münster G. (1997): *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press

Muta T. (2009): "*Foundations of quantum chromodynamics: an introduction to perturbative methods in gauge theories"* (3rd ed.). World Scientific. ISBN 978-981-279-353-9.

Neuberger H. (1998): "*Exactly massless quarks on the lattice*" Phys.Lett.B 417, 141. Phys.Rev. D 57, 5417.

Nielsen H. B., Ninomiya M. (1981): *"A no-go theorem for regularizing chiral fermions",* Nucl. Phys. B185 20

Nielsen H.B., Ninomiya M. (1981): "*Theorem for Regularizing Chiral Fermions"*, Phys. Lett. B105, 219.

Noether E. (1918): "*Invariante Variations probleme"*, Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen, Math-phys. Klasse, 235–257.

Overbye D. (2013): *"Chasing The Higgs Boson",* The New York Times, Retrieved 2013-03-05.

Peskin M. E., Schoeder D. V. (1995):"*An Introduction to Quantum Field Theory*", Westview Press, Colorado.

Politzer H.D. (1973): "*Reliable perturbative results for strong interactions"*, Phys.Rev.Lett., 30:1346–1349.

Press W.H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B.P. (2007): "*Numerical Recipies. Third Edition*", Cambrige University Press, New York.

Rappl F. (2012): "*Improving a GMRES-based algorithm for lattice Quantum Chromodynamics"*, master thesis in physics, University of Regensburg, Nr. 136 300 9.

Rothe H. J. (2005): "*Lattice Gauge Theory, An Introduction"*, Third Edition, World Scientific Lecture Notes in Physics -Vol. 74

Saad Y., Schultz M. H. (1986): "*GMRES: A generalized minimal residual for solving linear systems"*, SIAM J. Sci. Stat. Comput. 7, 856.],

Sexton J. C. (1996), Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 47, 236

Smilga A. (2001): *"Lectures on quantum chromodynamics",* World Scientific. ISBN 978- 981-02-4331-9

Smit J. (1990): "*Standard model and chiral gauge theories on the lattic*e", Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 17, 3-16.

Smit J. (2002): *Introduction to Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press.

Smit J., Vink J.C. (1987), Nucl. Phys. B286, 485

Shamir Y. (1998): "*Reducing Chiral Symmetry Violations in Lattice QCD with Domain Wall Fermions"*, Phys.Rev. D59, 054506.

Tripiçione R. (1993), in Large Scale Computational Physics on Massively Parallel Computers, ed. H. J. Herrmann and F. Karsch.

Weyl H. (1929): "*Elektron und Gravitation"*, Z. Phys 56, 330.

Wick G.C. (1954): "*Properties of Bethe-Salpeter Wave Functions"*, Phys. Rev. 96, 1124.

Wilson K. G. (1974): "*Confinement of quarks*", Phys. Rev. D 10, 2445.

Xhako D., Boriçi A. (2011): "*Invertimi i operatorit të mbulimit me anë të algoritmit me dy rrjeta në QCD-në rrjetore"*, AKTET, Revistë Shkencore e Institutit Alb-Shkenca, ISSN 2073-2244.

Xhako D., Boriçi A. (2014): "*Fast algorithms for simulating chiral fermions in U(1) lattice gauge theory*", AJPA (American Journal of Physics and Application), ISSN: 2330-4308, Vol. 2, No. 2, 2014, pp. 67-72. doi: 10.11648/j.ajpa.20140202.15,

Yang C.N., Mills R.L. (1954): "*Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*" Phys. Rev. 96, 191-195.

BOTIME, KONFERENCA DHE TRAJNIME

Pjesmarrje në konferenca shkencore

1. **D. Xhako**, R.Zeqirllari, A. Boriçi:*"Quark-antiquark potential from LatticeQCD",* konferenca ndërkombëtare e Unionit Ballkanik të Fizikës, Universiteti Ovidius, Constanta, Rumani, proceedings i konferencës, ISBN: 978-606-598-181-2, Korrik 2012.
2. R.Zeqirllari, **D.Xhako**, A. Boriçi:*"Light Mass Spectroscopy from LatticeQCD",* konferenca ndërkombëtare e Unionit Ballkanik të Fizikës, Universiteti Ovidius, Constanta, Rumani, proceedings i konferencës, ISBN: 978-606-598-181-2, Korrik 2012.

3. **D.Xhako**, R.Zeqirllari, A. Boriçi, *"Using Parallel Computing to Calculate Static Interquark Potential in LQCD",* konferenca ndërkombëtare "*HP-SEE User Forum*" të organizuar nga projekti HP-SEE, Beograd, Serbi, proceedings i konferencës*,"High Performance Computing Infrastructure for South East Europe's Research Communities-Results of the HP-SEE User Forum 2012"* në serinë *"Modeling and Optimization in Science and Technologies", Vol.2, Springer, ISSN 2196-7334, ISBN 978-3-319-01520-0,* Tetor 2012.

4. R.Zeqirllari, **D.Xhako**, A. Boriçi, *"Quenched hadron spectroscopy using Fermiqcd",* konferenca ndërkombëtare "*HP-SEE User Forum*" të organizuar nga projekti HP-SEE, Beograd, Serbi, proceedings i konferencës*,"High Performance Computing Infrastructure for South East Europe's Research Communities-Results of the HP-SEE User Forum 2012"* në serinë *"Modeling and Optimization in Science and Technologies", Vol.2, Springer, ISSN 2196-7334, ISBN 978-3-319-01520-0,* Tetor 2012.

5. **D.Xhako**, R.Zeqirllari, A. Boriçi, "*Potenciali kuark-antikuark nga laqet e Wilsonit në QCD-në rrjetore"* konferenca kombëtare "*Në 100 vjetorin e shpalljes së pavarësisë*" organizuar nga FSHN, botuar në buletinin e Shkencave të Natyrës, Nr.15, 2013, ISSN 2305-882X, Nëntor 2012.

6. N.Hyka, A.Xhumari, E.Telhaj, Th. Karaja, **D.Xhako**, "*Intensity Modulated Radiation Therapy (IMRT) in Albania*"; konferenca ndërkombëtare - *Towards future Sustainable Develpment*; pg 77, ISBN: 978-9928-4135-05, Nëntor 2012.

7. **D.Xhako**, R.Zeqirllari, A. Boriçi, "*Improving the Calculation Method of Quark-Antiquark Potential from Fermiqcd*", konferenca ndërkombëtare organizuar nga Universiteti i Shkodrës "*Research and Education – ICRAE 2013*", *ISSN: 2308 – 0825,* Maj 2013.

8. N.Hyka, E.Telhaj, Th.Karaja, **D.Xhako**; *"Oncor prescision açelerator beam data commissioning, equipment and procedures";* konferenca ndërkombëtare

organizuar nga Universiteti i Shkodrës "*Research and Education – ICRAE 2013*"; ISSN: 2308 – 0825, Maj 2013.

9. **D.Xhako**, R. Zeqirllari, A. Boriçi, *"Determining the scale from string tension in lattice QCD"* konferenca e II-të ndërkombëtare e Universitetit të Shkodrës, **"**Research and Education in Natural Sciences", proceedings i konferencës, Vol.I, ISBN 978-9928-4135-5-0, Nëntor 2013.

10. N. Hyka, E. Telhaj, **D. Xhako,** Th. Karaja; *"Calculation methods in radiotherapy using MATLAB",* konferenca e II-të ndërkombëtare e Universitetit të Shkodrës, **"**Research and Education in Natural Sciences", proceedings i konferencës, Vol.I, ISBN 978-9928-4135-5-0, Nentor 2013.

Artikuj shkencorë

1. **D. Xhako**, A. Boriçi**,** "*Invertimi i operatorit të mbulimit me anë të algoritmit me dy rrjeta në QCD-në rrjetore*", AKTET, Revistë Shkencore e Institutit Alb-Shkenca , Vol. IV, Nr. 3, ISSN 2073-2244 , Maj 2011.
2. **D. Xhako**, R. Zeqirllari, A. Boriçi**,** "*Planar Wilson Loops for Deriving Interquark Potential in Lattice QCD* ", ANGLISTICUM, Revistë Shkencore Ndërkombëtare, Vol. II, Nr. 5, ISSN 1857-8179, Tetor 2013
3. **D. Xhako**, R. Zeqirllari, A. Boriçi, "*Improving the calculation results of lattice spacing from quark potential*", AJNTS, Revistë Ndërkombëtare e Shkencave Natyrore dhe Teknike, Akademia e Shkencave e Shqipërisë, (botohet në Qershor 2014).
4. **D. Xhako**, A. Boriçi, "*Fast algorithms for simulating chiral fermions in U(1) lattice gauge theory*", AJPA (American Journal of Physics and Application), ISSN: 2330-4308, Vol. 2, No. 2, 2014, pp. 67-72. doi: 10.11648/j.ajpa.20140202.15, Shkurt 2014.
5. N.Hyka, E. Telhaj, **D. Xhako**, Th.Karaja; *"Comparison between different dosimetric tools applications in radiotherapy",* Anglisticum Journal (IJLLIS*)*, Volume: 2, Issue 5, fq 230 – 235,. e-ISSN: 1857-1878, p-ISSN: 1857-8179 October 2013
6. N.Hyka, E.Spahiu, **D. Xhako**, P.Malkaj, Th.Karaja; *"Linac photon beam calibration using virtual simulator program",* Anglisticum Journal (IJLLIS), Volume 2, Issue 4, fq 379-386, e-ISSN: 1857-1878, p-ISSN: 1857-8179 August 2013.
7. N. Hyka, **D. Xhako,** Th. Karaja, E. Telhaj: "*Calculation Methods in Radiotherapy Using MATLAB*", Journal International Environmental Application Science, ISSN: 1307-0428, May 2014.

Trajnime/Workshope

I. **Janar 2011 →** Shkolla dimërore ndërkombëtare për superllogaritje "Trajnim në teknikat e programimit" 24-27 Janar 2011, CaStoRc, Qipro, Greqi

II. **Korrik 2011 →** Shkolla verore ndërkombëtare për superllogaritje "Trajnim në teknikat e programimit në paralel" 13-15 Korrik 2011, akademia OTE (Hellenic Telecommunications Organization) Athinë, Greqi.

III. **Shtator 2011 →** Shkolla verore ndërkombëtare e Fizikës Teorike të Avancuar "QCD-ja rrjetore dhe Spektroskopia e Hadroneve" instituti Helmoltz, Dubna, Rusi, 5-18 Shtator, 2011

IV. **Maj 2012 →** Shkolla verore ndërkombëtare e Fizikës së Energjive të Larta "Sarajevo School of High Energy Physics 2012" Universiteti i Sarajevës, 9 - 13 Maj 2012

V. **Qershor 2012 →** Pjesëmarrese ne Workshopin e organizuar nga UT-FSHN" "Numerical Mehtods and Parallel computing Using MPI"

VI. **Tetor 2012 →** Referuese në Workshopin e I-rë ndërkombëtar "Recent LHC Physic's results and related topics" 8-9 Tetor 2012, FSHN&UPT, Tiranë

VII. **Qershor 2013 →** Trajnim në shkollën ndërkombëtare mbi analizën e të dhënave me MC në LQCD "Monte Carlo methods and data analysis in lattice QCD", Regensburg, Gjermani, 24-27 Qershor 2013.

VIII. **Shtator 2010 – Tetor 2013 →** Pjesë e projektit HP-SEE (High-Performance Computing Infrastructure for South East Europe's Research Communities) me një aplikim nga fizika llogaritëse "HMLQCD" (Hadron Masses from Lattice QCD)(projekti mundësonte aplikimin dhe zbatimin e një pune llogaritëse në disiplinat e shkencave llogaritese duke përdorur ekzekutime masive paralele kompjuterike – akses ne klasterin ne Bullgari BG-HPC)

IX. **Nëntor 2013 →** Pjesëmarrje në trajnimin e ICTP (International Centre for Theoretical Physics) 25 Nëntor - 6 Dhjetor 2013, Itali.

FALENDERIME

Realizimi i doktoraturës *"Përshpejtimi i llogaritjeve të fermioneve kirale me anë të rrjetave të shumëfishta në QCD-në rrjetore"* nuk do të ishte i mundur pa ndihmën dhe kontributin e shumë kolegëve, miqëve dhe bashkëpunëtorëve të mi.

Më duhet të falenderoj fillimisht Prof. Dr Artan Boriçi, iniciatorin dhe mbështetësin kryesor në çdo hap të këtij procesi. Pa ndihmën e tij, do të ishte e pamundur realizimi i disa prej kualifikimeve dhe trajnimeve në institucionet dhe qëndrat më të njohura europiane të fizikës llogaritëse. Falenderim të veçantë për kontributin e tij në formimin tim si kërkuese shkencore në një fushë mjaft të vështirë të Fizikës së Grimcave Elementare si dhe në realizimin me sukses të këtij punimi.

Dua të shpreh mirënjohjen time për Departamentin e Fizikës në Fakultetin e Shkencave të Natyrës, për ndihmesën dhe mbështetjen gjatë diskutimeve të veccanta apo prezantimeve gjatë zhvillimit të disertacionit. Mjaft nga këshillat dhe udhëzimet e tyre janë reflektuar në përfundim e këtij disertacioni.

Falenderoj disa nga bashkëpunëtorët e mi të cilët mundësuan kryerjen e simulimeve dhe llogaritjeve kompjuterike në paralel dhe veccanërisht organizatorët e projektit HP-SEE (High-Performance Computing Infrastructure for South East Europe's Research Communities), ku u shfrytëzuan grupet e kompjuterave për superllogaritje në Bullgari.

Një falenderim i veçantë për bashkëshortin tim i cili ka qënë bashkëudhëtari im që në fillimet e studimeve të mia universitare deri në finalizmin me sukses të këtij punimi.

Falenderim të veçantë për familjen time, e cila më ka mbështetur maksimalisht në këtë periudhë të gjatë studimesh kërkimore.

Dafina Xhako, Tetor 2014

SHTOJCAT

SHTOJCA A Kodet e llogaritjes të potencialit kuark-antikuark

~~~
~~~

```
   // ruaj laqet size1 x size2
   fout << size1 << size2 << " " << ëloop << endl;
 }
}
fout.close();
mdp.close_wormholes();  //MBYLL komunikimet
return 0;
}
```

Copyright FermiQCD

~~~~~~

Kodi A.2: Kodi i përshtatur për gjetjen e parametrave që modelojnë ekuacionin (III.8.2) konstantes rrjetore, potencialin si dhe gabimeve respektive me Jacknife, në Matlab/Octave (për *r=t=1,…6*). (është zgjedhur rrjeta me volum 8^4)

~~~~~~

```
%Script qe llogarit potencialin statik kuark-antikuark prej laqeve
%planare W(R,T)te Wilson-it, per rrjeten me permasa 8^4, me
%R=T=1,...,6 sipas modelit -logW(R,T)=C0+V_0*T+K*R*T+(alpha/R)*T,
%konstanten %rrjetore si dhe gabimet respektive
n=6; konf=100; T=(1:n)'; R=T;
%Percaktimi i matrices se koeficenteve
A=[ones(n^2,1) kron(ones(n,1),T) kron(R,T) kron(1./R,T)];
%Ngarkimi i te dhenave qe permbajne laqet e Wilson-it
load ëloop.dat;
B=wloop(:,2);
C=reshape(B,n^2,konf);
W=mean(C,2);
w=-log(W);
b=w;
%Zgjidhja e sistemit linear per percaktimin e koeficenteve te modelit
x=A\b;
%Gjetja e gabimeve te koeficenteve x(1),x(2),x(3),x(4) me Jacknife
%Gjenerimi i zgjedhjeve te reja prej atyre ekzistuese
 X=[];
 for j=1:n^2
     iks=C(j,:);
     for i=1:konf
        f=W(j)-((iks(i)-W(j))/(konf-1));
        X=[X,f];
     end
 end
 X_perf=reshape(X,konf,n^2);
 % Gjetja e madhesive te derivuara ne funksion te zgjedhjeve te reja
for k=1:konf
    b=-log(X_perf(k,:));
    b=b';
    solve=A\b;
    xx=[xx,solve];
end
x_jacknife=mean(xx,2);
v_jknife=x_jacknife(2)+x_jacknife(3)*r+x_jacknife(4)./r;
%Llogaritja e gabimit te koeficenteve
sigm_sq=((konf-1)^2/konf)*(std(xx')).^2;
gabimi_koef=sqrt(sigm_sq);
```

```
%Gjetja e gabimit te llogaritjes se potencialit me Jacknife
%Gjetja e madhesive te derivuara ne funksion te zgjedhjeve te reja
V=[];
for p=1:konf
        pot=xx(2,p)+xx(3,p)*r +xx(4,p)./r;
        V=[V,pot];
end
[z,y]=size(r);
V_perf=reshape(V,y,konf);
V_mes=mean(V_perf,2);
% Llogaritja e gabimit per potencialin
sigm_sq_pot=((konf-1)^2/konf)*(std(V_perf')).^2;
gabimi_pot=sqrt(sigm_sq_pot);
% Ndertimi i grafikut V+sigma, V_mes, V-sigma
figure(1);
plot(r,V_mes,'b');
hold on
plot(r,V_mes+gabimi_pot','r');
hold on
plot(r,V_mes-gabimi_pot','r');
%Percaktimi    i    konstantes    se    rrjetes    me    formulen
%a=r0*sqrt(K/(1.65+alpha)),ku K dhe alpha jane respektivisht tensioni
%i kordes ne njesi rrjetore dhe konstantja e ciftimit te forte. r0
%eshte 0.5 fm,
r0=.5;
a_latt=r0*sqrt((x_jacknife(3,1))/(x_jacknife(4,1)+1.65));
%Gjetja e gabimit te konstantes rrjetore me Jacknife
KK=[];
Alpha=[];
K=xx(3,:);
alpha=xx(4,:);
kk_mes=mean(K');
alpha_mes=mean(alpha');
for l=1:konf
     kk_new=kk_mes-((K(l)-kk_mes)/(konf-1));
         KK=[KK,kk_new];
     alpha_neë=alpha_mes-((alpha(l)-alpha_mes)/(konf-1));
   Alpha=[Alpha,alpha_neë];
end
aa=r0*sqrt(KK./(Alpha+1.65));
sigm_sq_a=((konf-1)^2/konf)*(std(aa')).^2;
gabimi_a=sqrt(sigm_sq_a);
% Copyright D.Xhako (2011-2014)
```
~~~~~~

~~~~~~

Kodi A.3: Kodi i përshtatur për llogaritjen e laqeve drejtkëndorë të Wilsonit me përmasa $r \times t$ për $r \prec L/2$ dhe $t \prec L/2$,(*L*-gjatësia e rrjetës) në FermiQCD duke shumuar sipas të gjithë planeve të mundshme që nuk përsëriten

~~~~~~

```
#include "fermiqcd.h"              //përfshi libraritë e FermiQCD-së
int main(int argc, char** argv) {
mpi.open_wormholes(argc, argv);    //Fillo komunikimet
define_base_matrices("FERMILAB");
```
~~~~~~

```
  int box[4]={8,8,8,8};              // Përcakto volumin e rrjetës
  mdp_lattice lattice(4,box);        // Ndërto rrjetën
  gauge_field U(lattice,3);        // Ndërto fushat kalibruese
  int N=100;                  // Numri i hapave MC(i konfiguracioneve)
  mdp_complex sum;
  string filename="gaugefile";
  U.load(filename);
  set_hot(U);                   // Fillo me një konfiguracion të rastit
  coefficients gauge;               // Përcakto parametrat fizikë
  gauge["beta"]=5.7;                // Përcakto betën
  ofstream fout;
  fout.open("w_n8.dat");             //hap një file ku do ruhen laqet
  for (int k=0; k<N; k++) {          // cikël sipas konfiguracioneve
  WilsonGaugeAction::heatbath(U,gauge,N);
  // për të gjitha format e laqeve drejtkëndore
  for(int size1=1; size1<box[1]/2; size1++)
  for(int size2=1; size2<box[1]/2; size2++) {
    sum=0.0;
  int path[2*size1+2*size2][2];
  // për të gjitha planet
  for(int mu=0; mu<U.ndim; mu++)
  for(int nu=0; nu<U.ndim; nu++)
     if(mu!=nu) {
     // ndërto rrugën e lakut
  for(int k=0; k<size1; k++)  { path[k][0]=+1; path[k][1]=mu; }
  for(int k=size1; k<size1+size2; k++) { path[k][0]=+1; path[k][1]=nu;
}
  for(int k=size1+size2; k<2*size1+size2; k++) { path[k][0]=-1;
                  path[k][1]=mu;}
  for(int k=2*size1+size2; k<2*size1+2*size2; k++) { path[k][0]=-1;
                  path[k][1]=nu; }
  //llogarit mesataren e laqeve të Wilson-it
  sum+=average_path(U,2*size1+2*size2,path);
        }
    // ruaj rezultatet
    fout << size1<<size2 << " " << sum/(U.ndim*(U.ndim-1)) << endl;
   }
  }
 fout.close();
 mpi.close_wormholes();   //Mbyll komunikimet
 return 0;
 } Copyright FermiQCD
```

~~~~~~

Kodi A.4: Kodi i zhvilluar per llogaritjen e parametrave që modelojnë potencialin në prej potencialeve efektive sipas konstantes rrjetore, potencialin si dhe gabimeve respektive me Jacknife, në Matlab/Octave (për $r=t=1,\ldots 6$) (është zgjedhur rrjeta me volum 8^4)

~~~~~~

```
%Script që llogarit potencialin efektiv kuark-antikuark prej laqeve
planare W(R,T)te Wilson-it, per rrjeten me permasa 8^4, me R=T=1,...,6,
konstanten %rrjetore si dhe gabimet respektive
n=6; konf=100; T=(1:n)'; R=T;
%Ngarkimi i te dhenave qe permbajne laqet e Wilson-it
load wloop.dat;
```

```
B=wloop(:,2);
C=reshape(B,n^2,konf);
w=mean(C,2);
W=reshape(w,n,n);
V_eff=[];
for i=1:n
   WW=W(:,i);
    for j=1:(n-1)
        pot_eff=-log((WW(j+1)/WW(j)));
        V_eff=[V_eff,pot_eff];
    end
end
VV_eff=reshape(V_eff,n-1,n);
b=(max(VV_eff))';
A=[ones(n,1) R 1./R];
x=A\b;
%Ndertimi i grafikut teorik me koeficentet e gjetur + grafiku me te
dhenat e llogaritura te potencialit
figure (1)
r=[.2:.01:8];
V_graf=x(1)+(x(2))*r+(x(3))./r;
plot(r,V_graf);
hold on
plot(R,b,'o');
r0=0.5;
a_latt=r0*sqrt((x(2))/(x(3)+1.65));
%LLogaritja e gabimeve me Jacknife
 X=[];
 for j=1:n^2
     iks=C(j,:);
     for i=1:konf
        f=Ë(j)-((iks(i)-W(j))/(konf-1));
        X=[X,f];
     end
 end
 X_perf=reshape(X,konf,n^2);
 % Gjetja e madhesive te derivuara ne funksion te zgjedhjeve te reja
 V_eff_neë1=[];
for k=1:konf
    rreshti=X_perf(k,:);
    for l=1:n-1
    p_eff1=-log((rreshti(l+1)/rreshti(l)));
    V_eff_neë1=[V_eff_neë1, p_eff1];
    end
end
V1=reshape(V_eff_new1,n-1,konf);
Vj1=(max(V1))';
V_eff_neë2=[];
for k=1:konf
    rreshti=X_perf(k,:);
    for l=n+1:n+5
    p_eff2=-log((rreshti(l+1)/rreshti(l)));
    V_eff_neë2=[V_eff_new2, p_eff2];
    end
end
V2=reshape(V_eff_new2,n-1,konf);
Vj2=(max(V2))';
```

```
V_eff_neë3=[];
for k=1:konf
    rreshti=X_perf(k,:);
    for l=n+7:n+11
    p_eff3=-log((rreshti(l+1)/rreshti(l)));
    V_eff_neë3=[V_eff_neë3, p_eff3];
    end
end
V3=reshape(V_eff_neë3,n-1,konf);
Vj3=(max(V3))';

V_eff_neë4=[];
for k=1:konf
    rreshti=X_perf(k,:);
    for l=n+13:n+17
    p_eff4=-log((rreshti(l+1)/rreshti(l)));
    V_eff_neë4=[V_eff_neë4, p_eff4];
    end
end
V4=reshape(V_eff_neë4,n-1,konf);
Vj4=(max(V4))';

V_eff_neë5=[];
for k=1:konf
    rreshti=X_perf(k,:);
    for l=n+19:n+23
    p_eff5=-log((rreshti(l+1)/rreshti(l)));
    V_eff_new5=[V_eff_new5, p_eff5];
    end
end
V5=reshape(V_eff_neë5,n-1,konf);
Vj5=(max(V5))';

V_eff_neë6=[];
for k=1:konf
    rreshti=X_perf(k,:);
    for l=n+25:n+29
    p_eff6=-log((rreshti(l+1)/rreshti(l)));
    V_eff_new6=[V_eff_new6, p_eff6];
    end
end
V6=reshape(V_eff_new6,n-1,konf);
Vj6=(max(V6))';

V_perf=[Vj1 Vj2 Vj3 Vj4 Vj5 Vj6];
xx=[];
for k=1:konf
    b=V_perf(k,:);
    b=b';
    solve=A\b;
    xx=[xx,solve];
end
x_jacknife=mean(xx,2);
v_jknife=x_jacknife(1)+x_jacknife(2)*r+x_jacknife(3)./r;
```

```
%Llogaritja e gabimit te koeficenteve
sigm_sq=((konf-1)^2/konf)*(std(xx')).^2;
gabimi_koef=sqrt(sigm_sq);
%Gjetja e gabimit të llogaritjes se potencialit me Jacknife
%Gjetja e madhesive te derivuara ne funksion te zgjedhjeve te reja
V=[];
for p=1:konf
        pot=xx(1,p)+xx(2,p)*r +xx(3,p)./r;
        V=[V,pot];
end
[z,y]=size(r);
V_perf=reshape(V,y,konf);
V_mes=mean(V_perf,2);
% Llogaritja e gabimit per potencialin
sigm_sq_pot=((konf-1)^2/konf)*(std(V_perf')).^2;
gabimi_pot=sqrt(sigm_sq_pot);
% Ndertimi i grafikut V+sigma, V_mes, V-sigma
figure(2);
plot(r,V_mes,'b');
hold on
plot(r,V_mes+gabimi_pot','r');
hold on
plot(r,V_mes-gabimi_pot','r');
%Percaktimi i konstantes se rrjetes me formulen
a=r0*sqrt(K/(1.65+alpha)),
%ku K dhe alpha jane respektivisht tensioni i kordes ne njesi rrjetore
%dhe konstantja e ciftimit te forte. r0 eshte 0.5 fm,
r0=.5;
a_latt=r0*sqrt((x_jacknife(2,1))/(x_jacknife(3,1)+1.65));
%Gjetja e gabimit te konstantes rrjetore me Jacknife
KK=[];
Alpha=[];
K=xx(2,:);
alpha=xx(3,:);
kk_mes=mean(K');
alpha_mes=mean(alpha');
for l=1:konf
     kk_neë=kk_mes-((K(l)-kk_mes)/(konf-1));
         KK=[KK,kk_new];
     alpha_neë=alpha_mes-((alpha(l)-alpha_mes)/(konf-1));
         Alpha=[Alpha,alpha_neë];
end
aa=r0*sqrt(KK./(Alpha+1.65));
sigm_sq_a=((konf-1)^2/konf)*(std(aa')).^2;
gabimi_a=sqrt(sigm_sq_a);
% Copyright D. Xhako, 2011-2014,
~~~
```

```
mdp.open_wormholes(argc,argv);// FILLO komunikimet
int L[]={8,8,8,8};        // përcakto përmasat e rrjetës
int n=3;                  // përcakto grupin e simetrisë SU(n)
int N=100;                // numri i konfiguracioneve(hapat MC)
mdp_lattice lattice(4,L); // krijo një rrjetë 4-d
gauge_field U(lattice,n); // krijo një fushë kalibrimi
coefficients gauge;       // vendos parametrat fizikë
gauge["beta"]=5.7;        // përcakto distancën rrjetore
set_hot(U);               // gjenero një konfiguracion të rastit
int maxsize1=6;         //përcakto vlerën maksimale të r1
int maxsize2=6;         //përcakto vlerën maksimale të r2
int maxsize3=6;         //përcakto vlerën maksimale të t
int size1;              //deklaro parametrin r1, të plotë
int size2;              //deklaro parametrin r2, të plotë
int size3;              //deklaro parametrin t, të plotë
double ëloop;
ofstream fout;
fout.open("w_vell8_n.dat");
for (int k=0; k<N; k++) {  // cikel sipas numrit te konfiguracioneve
ËilsonGaugeAction::heatbath(U,gauge,N); // bej N-hapa MC
for (size1=1;size1<=maxsize1;size1++)
for (size2=1;size2<=maxsize2;size2++)
for (size3=1;size3<=maxsize3;size3++){
int length=2*size1+2*size2+2*size3;
int path[length][2];
for(int i=0; i<size1; i++) {
 path[i][0]=+1;
 path[i+size1+size2+size3][0]=-1;
 }
 for(int i=size1; i<size1+size2; i++) {
  path[i][0]=+1;
  path[i+size2+size3+size1][0]=-1;
  }
  for(int i=size1+size2; i<size3+size2+size1; i++) {
  path[i][0]=+1;
  path[i+size3+size2+size1][0]=-1;
  }
   ëloop=0.0;
   for(int mu=0; mu<4; mu++)
   for(int nu=0; nu<4; nu++)
   for(int t=0; t<4; t++){
   if (mu!=nu&&nu!=t&&mu!=t) {
   for(int i=0;i<size1;i++)
   path[i][1]=path[i+size1+size2+size3][1]=mu;
   for(int i=size1;i<size1+size2;i++)
   path[i][1]=path[i+size2+size3+size1][1]=nu;
   for(int i=size1+size2;i<size1+size2+size3;i++)
   path[i][1]=path[i+size3+size1+size2][1]=t;
   ëloop+=real(average_path(U,length,path))/24;
        }
      }
    fout << size1 << size2 <<size3<<" "<< wloop << endl;
   }
  }
 fout.close();
 mdp.close_wormholes();  //MBYLL komunikimet
 return 0;
```

```
  }
```

Copyright FermiQCD

~~~~~~

~~~~~~

Kodi A.6: Kodi i zhvilluar per llogaritjen e parametrave që modelojnë potencialin, konstanten rrjetore, në Matlab/Octave *për laqet vëllimore të Wilson-it (*është zgjedhur rrjeta me volum 8^4)

~~~~~~

```
%Script qe llogarit potencialin efektiv prej laqeve vëllimore te
Wilson-it
n=6; r2=(1:n)'; konf=100;
load w_vell8_n.dat;
B=w_vell8_n(:,2);
C=reshape(B,n^3,konf);
W=mean(C,2);
WW=reshape(W,n,n^2);
V_eff=[];
for i=1:n^2
    V=WW(:,i);
    for j=1:(n-1)
        if ((V(j)>0)&&(V(j+1)>0))
        pot_eff=-(log((V(j+1))/(V(j))));
        else
        pot_eff=Inf;
        end
        V_eff=[V_eff,pot_eff];
    end
end
VV_eff=reshape(V_eff,n-1,n^2);
V_mes=max(VV_eff);
b=V_mes';
R=[];
for i=1:n
    r1(1:n,1)=i;
    R=[R,r1];
end
R1=reshape(R,n^2,1);
R2=[kron(ones(n,1),r2)];
r=[];
for i=1:n^2
    rr=sqrt((R1(i)^2)+(R2(i)^2));
    r=[r,rr];
end
r=r';
n2=n^2;
b(36)=[];r(36)=[];
b(33)=[];r(33)=[];
b(32)=[];r(32)=[];
b(31)=[];r(31)=[];
b(29)=[];r(29)=[];
b(28)=[];r(28)=[];
b(27)=[];r(27)=[];
b(25)=[];r(25)=[];
b(24)=[];r(24)=[];
b(22)=[];r(22)=[];
b(21)=[];r(21)=[];
```
~~~~~~

```
b(19)=[];r(19)=[];
b(18)=[];r(18)=[];
b(17)=[];r(17)=[];
b(11)=[];r(11)=[];
b(10)=[];r(10)=[];
b(6)=[];r(6)=[];
b(2)=[];r(2)=[];
n2=n^2-18;
for i2=n2:-1:1; if b(i2)==Inf, b(i2)=[]; r(i2)=[]; end, end
n2=max(size(r));
A=[ones(n2,1) r 1./r];
x=A\b;
%Gjetja e gabmeve te koeficenteve
I=eye(size(A));
Lfit(A,I,b)
%Ndërtimi i grafikut
V_graf=x(1)+(x(2))*r+(x(3))./r;
v2=[r,V_graf];v2=sort(v2,1);
clf;
plot(v2(:,1),v2(:,2))
%plot(r,V_graf)
hold on
plot(r,b,'*')
r0=0.5;
a_latt=r0*sqrt((x(2))/(x(3)+1.65));
%Copyright D. Xhako, 2011-2014,
```
~~~~~~

~~~~~~

Kodi A.7: Funksioni që përcakton gabimet e tensionit të kordës për laqe vëllimore të Wilson-it duke përdorur funksionin *Lfit*

~~~~~~

```
function [x,y,chi2,smax] = Lfit(A, I, b);
z = A' * I * b;
S = A' * I * A;
S = inv(S);
x = S * z;
sx = diag(S);
y = A * x;
r = b - y;
chi2 = r' * I * r;
[N, dummy] = size(b);
[n, dummy] = size(x);
sx = sqrt(sx * chi2/(N-n));
sy = diag(A * S * A');
sy = sqrt(sy * chi2/(N-n));
smax = max(eig(S));
smax = sqrt(smax* chi2/(N-n));
x = [x, sx];
y = [y, sy];
Copyright QCDLAB
```
~~~~~~

SHTOJCA B   Metoda Jacknife për llogaritjen e gabimeve

Për të llogaritur gabimet e madhësive të derivuara siç është rasti jonë konkret me potencialin, distancën rrjetore etj, metodat më të përdorura janë ato jo-parametrike si *Bootstraping* dhe *Jacknife*. Në përcaktimin e gabimeve në këtë mikrotezë kemi përdoru metodën *Jacknife*, e cila ndjek këto hapa:

Hapi 1: Krijo zgjedhje të reja të rastit X_i për $i = 1,2...,n$ me anë të zgjedhjes së rastit fillestare x_i për $i = 1,2...,n$ sipas barazimit:

$$X_i = \overline{x} - \frac{x_i - \overline{x}}{n-1}$$

Hapi 2: Llogarit madhësitë e derivuara në funksion të zgjedhjeve të reja sipas

$$y_i = f_i(X_1,...,X_n)$$

Hapi 3: Vlerëso gabimin e mesatares $\overline{y}$ sipas shprehjes:

$$\sigma_{\overline{y}} = \frac{n-1}{n}\sum_i (y_i - \overline{y})^2$$

SHTOJCA C   Kodet e algoritmit me dy rrjeta

~~~~~~

Kodi C.1: Funksioni në Matlab/Octave i algoritmit TWO-GRID

~~~~~~

```
function rr = Two_grid(b,x1,tol,tol0,nmax);
global mass Nlatt N5
%Algoritmi me dy rrjeta i përdorur per te zgjidhur sistemin linear
Dx=b,
```

```
%D-nuk është një matricë e thjeshtë por një funksion matricor D=f(A),ku
%A-është matrica e zhvendosur e Wilson_Dirac pra A=D_W -I,
%Konkretisht D paraqet operatorin e mbulimit ose i quajtur ndryshe
%operatori i Neubergerit, i cili jepet: D=c1I-c2V, ku V=A(A*A)^(-1/2)
c1=(1+mass)/2;
c2=(1-mass)/2;
x1=x1(:);
b=b(:);
Vx1=u2_comp(x1,nmax);
%Meqe kerkojme Dx1=(c1I-c2V)x1=c1Ix1-c2Vx1=c1x1-c2x, ku x-është
zgjidhja që
%marrim nga funksioni u2_comp.
Dx1=c1*x1-c2*Vx1;
r1=b-Dx1;
%formojme vektorin e rrjetës së rrallë
z=zeros(N*(N5-1),1);
ita=[r1;z]; z0=zeros(N*N5,1);
[z,rr]=BiCGstab_TOV(A,mass,Nlatt,N5,b,z0,tol,nmax);
```

Copyright QCDLAB

~~~~~~

SHTOJCA D Kodet e QCDLAB

~~~~~~

Kodi D.1: Funksioni që llogarit pllakën në QCDLAB

~~~~~~

```
function p=Plaquette(C);
%llogarit pllaken
p=0;
```
~~~~~~

```
%globale
global beta N E1 E2
U1=sparse(diag(C(1:N))); U2=sparse(diag(C(N+1:2*N)));
U1=U1*E1; U2=U2*E2;
p=p+real(trace(U1*U2*U1'*U2'));
```

Copyright QCDLAB

~~~~~~

~~~~~~

Kodi D.2: Funksioni që llogarit operatorin e Ëilson-Dirac-ut në rrjetën dy përmasore në QCDLAB

~~~~~~

```
function A=Dirac2(N1,N2,u1,u2,mass)
% llogarit operatorin e Ëilson-Dirac-ut
% parametra globale mass N N1 N2
Dim=2; % dimensionet e rrjetes
N=N1*N2;
% matricat e Paul-it
sigma1=[0, 1; 1, 0]; sigma2=[0,-1i; 1i, 0];
% Operatorët e projektimit
P1_plus = eye(2)+sigma1; P1_minus=eye(2)-sigma1;
P2_plus = eye(2)+sigma2; P2_minus=eye(2)-sigma2;
% Operatorët e zhvendosjes
p1=[N1,1:N1-1]; p2=[N2,1:N2-1];
I1=speye(N1); I2=speye(N2);
T1=I1(:,p1); T2=I2(:,p2);
E1=kron(I2,T1);
E2=kron(T2,I1);
% Operatorët kovariant të zhvendosjes
% Konfiguracioni i fushave kalibruese {u1, u2}: matrica komplekse N x 1
U1=sparse(diag(u1))*E1; U2=sparse(diag(u2))*E2;
% Matrica tridiagonale e sipërme
A= kron(U1,P1_minus);
A=A+kron(U2,P2_minus);
% Matrica tridiagonale e poshtme
A=A+kron(U1,P1_plus)';
A=A+kron(U2,P2_plus)';
% përcaktimi i parametrit të kërcimit
kappa=1/2/(2+mass);
% llogaritja përfundimtare e matricës A
A=(Dim+mass)*speye(2*N)-A/2;
```

Copyright QCDLAB

~~~~~~

~~~~~~

Kodi D.3: Funksioni që inicializon një fushë kalibruese fillestare në QCDLAB

~~~~~~

```
function C=GaugeField(iconf)
% initialises an U(1) gauge field
global N
%
```

```
if (iconf==0),
  C=ones(2*N,1);
elseif (iconf==1),
  P=sqrt(-1)*rand(2*N,1);
  C=exp(P);
end
```

Copyright QCDLAB

~~~~~~

~~~~~~

Kodi D.4: Funksioni që llogarit ngarkesën topologjike në QCDLAB

~~~~~~

```
function q=Topology(C);
% computes topological charge
%globals
global beta N E1 E2
q=[];
for mu=1:2;
M=sparse(zeros(N));
nu=mu+1; if (nu==3), nu=1; end
U1=sparse(diag(C((mu-1)*N+1:mu*N)));
U2=sparse(diag(C((nu-1)*N+1:nu*N)));
U1=U1*E1; U2=U2*E2;
M=M+U1*U2*U1'*U2';
qtop=imag(log(M));
q=[q;qtop];
end
q=(1/2*pi)*q;
```

Copyright QCDLAB

~~~~~~

~~~~~~

Kodi D.5: Funksioni në Matlab/Octavë i algoritmit SHUMR për invertimin e operatorit kiral të mbulimit në teorinë kalibruese U(1), në QCDLAB.

~~~~~~

```
function [x,Matvec,rr]=SHUMR(A,psi,lambda,b,c1,c2,tol,imax);
b=b(:);
N=max(size(b));
vzero=zeros(N,1);
x=vzero;
r=b;
matvec=0; Matvec=matvec;
rho = norm(r);
rnorm=rho;
rr=rho;
alpha = rho;
u12=0;
beta=1;
L11_tilde=1;
q=r/rho;
q_old=vzero; v_old=vzero; ë_old=vzero; s_old=vzero;
% start added lines
```

```
c_km1=1; s_km1=0; c_km2=0; s_km2=0;
p1=vzero; p2=vzero; Dp1=vzero; Dp2=vzero;
% end added lines
counter = 1;
ëhile ( (rnorm > tol) & (counter<=imax) );
  %v=V*q;
  [v,multDë]=Mult_overlap(A,q,psi,lambda,imax);
  if (counter > 1),
    u12=-(q_old'*v)/(q_old'*v_old);
  end
  gamma=-c1*u12;
  L11=(q'*v)+u12*(q'*v_old);
  q_tilde=v-L11*q+u12*v_old;
  L21=norm(q_tilde);
  if (L21<=tol), break, end;
  ë=q+q_old*u12+ë_old*gamma/L11_tilde;
  s=c1*(q+q_old*u12)+c2*(v+v_old*u12)+s_old*gamma/L11_tilde;
  L11_tilde=c1+c2*L11-beta*gamma/L11_tilde;
  alpha=alpha*beta/L11_tilde;
  x=x+ë*alpha;
  r=r-s*alpha;
  q_old=q;
  v_old=v;
  ë_old=ë;
  s_old=s;
  q=q_tilde/L21;
  beta=-c2*L21;
  rnorm=norm(r);
% start added lines
  t11=c1+c2*L11;
  mu=t11*c_km1+gamma*conj(s_km1)*c_km2;
  nu=c2*L21;
  if (mu != 0),
    c_k=abs(mu)/sqrt(abs(mu)*abs(mu)+abs(nu)*abs(nu));
    s_k=conj(c_k*nu/mu);
  else
    c_k=0;
    s_k=1;
  end
  omega=nu*alpha*s_k;
  mu_k=c_k*mu+s_k*nu;
  eps=t11*s_km1-gamma*c_km1*c_km2;
  theta=-gamma*s_km2;
  p=(q+q_old*u12-p1*eps-p2*theta)/mu_k;
  Dp=(c1*(q+q_old*u12)+c2*(v+v_old*u12)-Dp1*eps-Dp2*theta)/mu_k;
  rnorm_p=norm(r+omega*Dp);
  xp=x-omega*p;
  c_km2=c_km1; s_km2=s_km1; p2=p1; Dp2=Dp1;
  c_km1=c_k; s_km1=s_k; p1=p; Dp1=Dp;
% end added lines
  rr=[rr;rnorm];
  matvec=matvec+multDë;
  Matvec=[Matvec,matvec];
  counter++;
end
```
Copyright QCDLAB

~~~~~~
~~~~~~

~~~~~~

Kodi D.6: Funksioni *Mult_Overlap.m* që llogarit operatorin e saktë të mbulimit në QCDLAB

~~~~~~

```
function [Vx,Matvec,rr]=Mult_overlap(A,x,psi,lambda,nmax)
% Nqse jepet operatori i zhvendosur i Dirac-ut, ky funksion
% shumezon x me pjesne unitare U*V' te A=U*S*V'
% duke perdorur algoritmin e Lanczos-it per llogaritjen
% e te anasjellit te rrenjes katrore A'*A
% dhe perafrimin e Zolotarev per te ansjelltin e rrenjes katrore te T
% duke perdorur projektimin e vlerave me te vogla vehtjake (psi,lambda)
%te A'*A
Matvec=0;
AHA=A'*A;
if norm(x)<=1e-6,
  Vx=A*x;
  rr=[];
end
Qx=x-psi*(psi'*x); % projected right hand side
[T1,matvec,rr]=lanczos(AHA,Qx,psi,lambda,1e-6,nmax,[],[],0);
Matvec=Matvec+matvec;
T=T1;T(end,:)=[];
% compute 1/sqrt(T)*e1
epsilon=max(real(diag(lambda))); % smallest eigenvalue of A'*A;
n=60; % order of Zolotarev approximation
[d,q,y,Delta]=coef_zolotarev(1,n,epsilon);
nlanczos=max(size(T));
e1=zeros(nlanczos,1);e1(1)=1;
d0=d(1);d(1)=[];n2=max(size(d));
inv_sqrt_T=d0*e1;
for l=1:n2;
 Tl=sparse(epsilon*speye(nlanczos)+T*q(l));
 inv_sqrt_T=inv_sqrt_T+T*d(l)*(Tl\e1); % n2 inversions of Tl
end
inv_sqrt_T=inv_sqrt_T*norm(x);
% second call to lanczos
[y,matvec]=lanczos(AHA,Qx,psi,lambda,1e-6,nmax,T1,inv_sqrt_T,1);
Matvec=Matvec+matvec;
inv_sqrt_lambda=diag(1./sqrt(real(diag(lambda))));
y1=y/sqrt(epsilon)+psi*(inv_sqrt_lambda*(psi'*x));
Vx=A*y1;
```

Copyright QCDLAB

~~~~~~

~~~~~~

Kodi D.7: Funksioni në Matlab/Octavë i algoritmit GMRESR i parakushtëzuar për invertimin e operatorit kiral të mbulimit në teorinë kalibruese U(1) në QCDLAB.

~~~~~~

```
function
[x,Matvec,rr]=gmresr(A,psi,lambda,c1,c2,M,M1,P,b,tol0,tol,nmax)
%function [x,Matvec,rr]=gmresr(V,c1,c2,M,M1,P,b,tol0,tol,nmax);
n=max(size(b)); N3=max(size(P))/n; matvec=0; Matvec=matvec;
k=1; b=b(:); r=b; x=zeros(n,1);
rnorm=norm(r); rr=rnorm; U=[]; C=[];
```
~~~~~~

```
ëhile ((rnorm>tol)&&(k<=nmax));
% llogarit zgjidhjen e perafert u=f(r)
  r1=zeros(n*N3,1); r1(1:n)=r;
  r1=M1*(P*r1);
  [u1,rrM]=cgne(M,r1,r1,tol0*rnorm,n*N3);
  multDë=2*N3*max(size(rrM));
  %norm(r1-M*u1)
  u=P'*u1; u=u(1:n);
  %c=c1*u+c2*(V*u);
  [Vu,multA]=Mult_overlap(A,u,psi,lambda,n*N3);
  c=c1*u+c2*Vu;
  for i=1:k-1;
    alpha=C(:,i)'*c; c=c-alpha*C(:,i); u=u-alpha*U(:,i);
  end
  beta=norm(c);
  c=c/beta; u=u/beta; U=[U,u]; C=[C,c];
  gamma=c'*r;
  x=x+u*gamma;
  r=r-c*gamma;
  rnorm=norm(r); rr=[rr;rnorm];
  matvec=matvec+multDë+multA; Matvec=[Matvec,matvec];
  k=k+1;
end
```

Copyright QCDLAB

~~~~~~
~~~~~~