UNIVERSITETI I TIRANËS
FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS
DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

PROGRAMI I STUDIMIT: ANALIZË DHE ALGJEBËR

TEZË DOKTORATURE

MBI STRUKTURAT KUAZI TË NORMUARA DHE DISA ASPEKTE INTEGRIMI NË TO

Doktoranti
Enkeleda Zajmi Kotonaj(Kallushi)

Udhëhoqi
Prof.Dr.Xhezair Teliti

Tiranë 2014

UNIVERSITETI I TIRANËS
FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS
DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

PROGRAMI I STUDIMIT: ANALIZË DHE ALGJEBËR

TEZË DOKTORATURE
Paraqitur nga
Znj.Enkeleda Zajmi Kotonaj (Kallushi)

Udhëhequr nga
Prof.Dr.Xhezair Teliti

Për marrjen e gradës shkencore
DOKTOR

Me temë

MBI STRUKTURAT KUAZI TË NORMUARA DHE DISA ASPEKTE INTEGRIMI NË TO

Mbrohet me datë ___/___/2014 para jurisë:
1.Prof.________________________ Kryetar
2.Prof.________________________ Anëtar (Oponent)
3. Prof.________________________ Anëtar (Oponent)
4. Prof.________________________ Anëtar
5. Prof.________________________ Anëtar

Falënderime

Falënderoj udhëheqësin tim shkencor Prof.Dr.Xhezair Teliti për sugjerimet e vlefshme që më ka dhënë gjatë gjithë kësaj kohe dhe për besimin e tij në aftësitë e mia duke më afruar të punojmë së bashku menjëherë pas mbarimit të fakultetit në një lëndë relativisht jo të lehtë për një fillestar si Teoria e Masës dhe Integrimit. Gjithashtu falënderoj familjen time për mbështetjen e pakursyer morale që më kanë dhënë.

Përmbledhje
Punimi është fokusuar fillimisht tek studimi i vetive të hapësirave kuazi të normuara dhe kuazi Banah, duke evidentuar faktin e rëndësishëm se hapësira të tilla janë hapësira vektoriale topologjike të metrizueshme.Në vazhdim janë evidentuar veti konkrete të operatorëve linearë në këto hapësira, duke fituar rezultate me vlerë si : principi i kufizueshmërisë uniforme, teorema e funksioneve të hapur dhe teorema e grafit të mbyllur të cilat varen vetëm nga plotësia aplikohen edhe në hapësirat kuazi-Banah. Më tej është treguar se jo vetëm shtrihet kuptimi i integralit të Bochner-it dhe Birkhoff-it për funksionet f:X→Y ku X,Y janë hapësira kuazi-Banah, por që hapësira e funksioneve Bochner të integrueshëm kur p>0, është lineare e kuazi normuar me funksion kuazinormë të përcaktuar nga barazimi $\|f\|_p = \left(\int_X \|f(x)\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$. Në rastin kur X është një hapësirë e matshme me masë të fundme është mundësuar kalimi në limit tek integrali i Birkhoff-it.
Një vënd i posaçëm në punim i është kushtuar studimit të multifunksioneve, duke fituar për to një sërë vetish që lidhen me vazhdueshmërinë dhe matshmërinë. Punimi mbyllet me trajtimin e integraleve të Aumann-it e të Bocnher-it, duke bërë me anën e izomorfizmi Stone një krahasim real ndërmjet këtyre dy nocioneve.

Fjalët kyçe: hapësirat kuazi-Banah, Integrali i Bochner-it, Integrali i Birkhoff-it,Integrali i Aumann-it, Matshmëria e multifunksioneve, Integrimi i multifunksioneve.

Abstract
The material is initially focused on the study of the properties of quasy-normed spaces and quasy-Banach spaces, highlighting the important fact that such spaces are metrizable topological vector spaces. The following are the specific features identified linear operators in these spaces, gaining valuable results as uniform boundedness principle, open functions theorem and the theorem of the closed graph which depend only on the completeness applied in quasy-Banach spaces. It is further shown that not only extends the meaning of the Bochner's integral and Birkhoff's integral for functions f:X →Y where X,Y are quasi-Banach spaces, but space $L^p(\mu, Y)$ of Bochner integrable functions when p> 0, is the linear space and it is quasy-normed space if we equip it with function $\|f\|_p = \left(\int_X \|f(x)\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$. In the case where X is a measurable space with finite measure is to enable the transition to the limit of Birkhoff's integral.
A special place in the paper is devoted to the study of multifunctions, reaching for them a set of properties associated with continuity and a measurement.
The paper concludes with treatment of Aumann's integral and Bocnher's integral, and making through Stone isomorphism a real comparison between these two notions.

Keywords: quasy-Banach spaces, Bocnher's integral, Birkhoff's integral, Aumann's integral, measurable multifunctions, integrabled multifunctions.

Përmbajtja

Hyrje

Teoria e integrimit renditet si një ndër teoritë bazë të matematikës moderne, e cila sot prezantohet si një drejtim studimi i lëvruar gjerësisht nga mjaft matematikanë. Aktualisht ajo përfaqëson një gamë të konsoliduar rezultatesh dinjitoze si në aspektin teorik ashtu edhe në atë aplikativ. Kjo teori e ka zanafillën të mbështetur në koleksionin e funksioneve me vlera në bashkësinë e numrave Realë. Zhvillimi i vrullshëm që mori kjo teori ndër vite dha rezultate të shumta që sollën një konsolidim të plotë të saj dhe ndërkohë ngacmoi idenë për të trajtuar funksione me vlera në një hapësirë më të përgjithësuar se ajo e numrave realë madje për të trajtuar edhe multifunksionet me vlera në hapësira Banah. Këtë gjë e bënë realitet me punimet e tyre matematikanë të njohur si Bochner, Pettis, Aumann, Birkhoff etj. Synimi i kësaj teme është që të evidentohen klasa hapësirash të kuazi normuara ku mund të përgjithësohen rezultate të njohura të teorisë së integrimit. Materiali është ndarë në tre kapituj. Kapitulli i parë paraqet disa koncepte bazë mbi hapësirat e përgjithësuara metrike dhe të normuara. Fillimisht trajtohen konceptet e kuazi normës dhe p-normës dhe theksohet ekzistenca e një p-norme ekuivalente për çdo kuazi normë (teorema e mirënjohur Aoki-Rolewicz [18]). Me interes është gjithashtu fakti që hapësira $L^p(\mu)$,për 0<p<1,është e p-normuar dhe gjithashtu e kuazi-normuar. Në vijim jemi fokusuar në hapësirat kuazi Banah dhe p Banah. Shembuj hapësirash kuazi-Banah janë hapësirat l_p dhe $L^p(0,1)$ ku $0 < p < 1$ ([19]). Veti të ngjashme me ato që gëzojnë operatorët linearë në rastin e hapësirave të normuara vihen re edhe për operatorët linearë në hapësirat kuazi të normuara. Kështu teorema e njohur Hanh-Banah për hapësirat vektoriale topologjike lokalisht konvekse ([28]), vërejmë se formulohet në mënyrë të ngjashme edhe për hapësirat e kuazi-normuara lokalisht konvekse, të cilën po e quajmë sërish Teorema Hanh-banah. Është e rëndësishme të theksojmë që rezultatet bazë si principi i kufizueshmërisë uniforme, teorema e funksioneve të hapur dhe teorema e grafit të mbyllur të cilat varen vetëm nga plotësia aplikohen edhe në hapësirat kuazi-Banah. Kapitulli i dytë trajton disa aspekte integrimi të funksioneve me vlera në hapësirat e kuazi normuara.Këtu janë trajtuar shtirja e kuptimit dhe disa veti të integraleve të Bochner-it dhe më pas të Birkhoff-it për funksionet me vlera kryesisht në hapësira kuazi Banah. Tregohet lehtë se bashkësia e gjithë klasëve të funksioneve μ-të matshëm $f : X \to Y$ të cilët janë të integrueshëm sipas Bochner-it është një hapësirë lineare mbi fushën K nën veprimet e shumës së klasëve dhe prodhimit të një klase të funksioneve me një skalar, dhe ajo shënohet me $L^1(\mu, Y)$.

Në anën tjetër, përkufizohet hapësira $L^P(\mu, Y)$ për $1 \leq p < +\infty$ si hapësirë lineare mbi fushën K e klasëve të funksioneve μ-të matshëm $f : X \to Y$ të tillë që $\int_X \|f(x)\|^p \, d\mu < +\infty$ (ky i fundit është integral i Lebegut). Është treguar gjithashtu se barazimi $\|f\|_p = \left(\int_X \|f(x)\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ përcakton një kuazi-normë në të. Pra ka vend pohimi: Hapësira $L^P(\mu, Y)$ për $1 \leq p < +\infty$ është hapësirë e kuazi-normuar [9].

Së fundi, kemi përcaktuar hapësirën $L^\infty(\mu, Y)$ e klasëve të funksioneve esencialisht të kufizuar, μ-të matshëm me vlera në Y dhe me kuazi-normë supremum esencial $\|f\|_\infty = esssup\{\|f(x)\|: x \in X=infa>0:\mu x\in X:f(x)>a=0$ (vërtetimi është i menjëhershëm nga përcaktimi i normës supremum esencial dhe vetitë e kuazi-normës) [9].

Kemi vënë re gjithashtu se hapësira $L^p(\mu, Y)$ ku 0 < p < 1, e klasëve të funksioneve μ-të matshëm f:X→Y të tillë që $\int_X \|f(x)\|^p \, d\mu < +\infty$, është hapësirë lineare mbi fushën K [9].

Gjithashtu barazimi $\|f\|_p = \left(\int_X \|f(x)\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ përcakton një kuazi-normë në hapësirën $L^p(\mu, Y)$ ku 0<p<1, kjo sepse hapësira e Lebegut $L^p(\mu)$ është e tillë dhe për më tepër, për funksionet f,g∈$L^p(\mu)$ ka vend mosbarazimi $\|f+g\|^p \leq \|f\|^p + \|g\|^p$ i cili njëlloj si mosbarazimi $|f+g|^p \leq |f|^p + |g|^p$ garanton se barazimi $\|f\|_p = \left(\int_X \|f(x)\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ përcakton një kuazi-normë [9].

Pra ka vend pohimi që vijon:Funksioni $F: L^p(\mu, Y) \rightarrow Y$ ku p > 0, i tillë që çdo funskioni $f \in L^p(\mu, Y)$ i vë në korrespondencë integralin e Bochner-it të tij, është një operator linear.
Në vijim të këtij kapitulli trajtohet kuptimi i integralit të Birkhoff-it [11]. Pasi tregojmë mënyrën se si ndërtohet ky integral për funksionet e sipërpërmendur vërjemë disa veti të tij si p.sh. linearitetin e tij. Vetia më me interes është e shprehur nga ky pohim [11]: Në qoftë se T_n është një varg funksionesh Birkhoff të integrueshëm të ϑ në Ɓ, μ(ϑ) është e fundme dhe vargu T_n konvergjon uniformisht tek funksioni i integrueshëm T atëherë $I(T) = \lim_{n\to\infty} I(T_n)$ (ku I(T) është shënuar integrali i Birkhoff-it i funksionit T).
Kapitulli i tretë trajton multifunksionet me vlera në hapësirat kuazi të normuara dhe disa aspekte integrimi të tyre. Fillimisht jemi fokusuar tek vazhdueshmëria e multifunksioneve dhe matshmëria e tyre, ku theksojmë se ndërmjet vetive të treguara me mjaft interes është shtrirja e teoremave (Kuratowski-Ryll Nardzewski) [15] dhe (Aumann)[22] mbi ekzistencën e selektorëve të matshëm të multifunksioneve (vemë në dukje se koncepti i matshmërisë së multifunksioneve është i lidhur ngushtë me ekzistencën e selektorëve të matshëm). Së fundi jemi fokusuar tek shtrirja e kuptimit të integralit të Aumann-it dhe më pas të Bochner-it për multifunksionet dhe disa veti të tyre [10],[13].
Aumann-i futi konceptin e integralit për multifunksionet si vijon [23]: Integral i multifunksionit F:X→2^Y quhet bashkësia e integraleve të selektorëve të integrueshëm të F, pra $\int_X F d\mu =$ Xfdμ:f∈$\mathcal{F}$ (këtu Xfdμ paraqet një integral të Bochner-it të selektorit f të F). Ndërmjet vetive të treguara mjaft interesante është kjo [13]: Le të jetë (X,Σ,μ) një hapësirë e matshme me masë të fundme. Në qoftë se F_n:X→2^Y është një varg multifunksionesh dobësisht të matshëm , me vlera të mbyllura në Y dhe integrueshmërisht të kufizuar nga i njëjti funksion f:X→R, i tillë që konvergjon tek multifunksioni F:X→2^Y p.k sipas μ mbi X atëherë multifunksioni F është i integrueshëm sipas Aumann-it dhe $\int F d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int F_n d\mu$.

Në vijim jemi përqendruar tek integrali i Bochner-it dhe vetitë e tij madje kemi bërë edhe një krahasim ndërmjet këtyre dy llojeve të fundit të integraleve [10].
Ndër vetitë e integralit të Bochner-it përmendim këtë veti [10]: Hapësira e multifunksioneve Bochner të integrueshëm L^1(X,Σ,μ,ck(Y)) e pajisur me kuazi-normën $\|.\|_1: L^1 \rightarrow R^+$ të tillë që $\|F\|_1 = (L)\int_X |F(x)| d\mu = (L)\int_X \; sup\{\|x'\|: x' \in F(x)\}\, d\mu$ është një hapësirë e kuazi- normuar.
Krahasimi ndërmjet integraleve të Aumann-it dhe Bochner-it është realizuar në vetitë që paraqesin ato kur ndërhyn transformimi i Stone. Kështu kemi vënë re se kanë vend relacionet: $(B)\int_E \; F d\mu = (B)\int_{\tau(E)} \bar{F} d\bar{\mu}$ dhe $(A)\int_E \; F(x) d\,\mu \subset (A)\; \int_{\tau(E)} \overline{F(x)} d\,\bar{\mu}$ (ku τ është izomorfizmi i Stone).

KAPITULLI 1
Koncepte bazë mbi hapësirat e përgjithësuara metrike dhe të normuara

1.1 Kuazi-norma dhe p-norma

Le të jetë X një hapësirë vektoriale (komplekse). Një funksion ||.|| : X→[0,+∞) quhet kuazi-normë në qoftë se plotëson kushtet që vijojnë:

1. ∀x∈X, ||x||≥0 dhe ||x||=0⇔x=0.
2. ∀x∈X dhe ∀λ∈X, ||λx|| = |λ|·||x||
3. ∀x,y∈X, ||x+y||≤K(||x|| + ||y||) ku K≥1 është një konstante e pavarur nga x dhe y.

Më e vogla nga konstantet K që kënaq kushtin e mësipërm quhet modul i konkavitetit i ||.||.

Çifti (X,||.||) quhet hapësirë e kuazi-normuar.

Në qoftë se kushti 3 zëvendësohet me kushtin, 3′: ∃ 0<p≤1 e tillë që ∀x,y∈X, $\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$, atëherë funksioni ||.|| quhet p-normë.Në këtë rast çifti (X,||.||) quhet hapësirë e p-normuar.

Shembull standart janë hapësirat e Lebegut: Në qoftë se μ është masë e përcaktuar mbi një σ-algjebër të nënbashkësive të një bashkësie S, atëherë hapësira $L^p(\mu) = L^p(S,\mu) = L^p(S)$ (0<p≤+∞) përbëhet nga të gjithë funksionet e matshëm me vlera komplekse[1] f mbi S për të cilët $\|f\| = \|f\|_p = \left(\int_S |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ me intepretimin e zakonshëm kur p=+∞.

Në rastin kur p≥1 siç dihet hapësira $L^p(\mu)$ është hapësirë e normuar.

Në rastin kur p<1 funksioni i mësipërm nuk është normë por kënaq kushtin e tretë të kuazi-normës për K = $2^{\frac{1}{p}}$ dhe për më tepër $\|f+g\|^p \leq \|f\|^p + \|g\|^p$ për çdo dy funksione f dhe g në $L^p(\mu)$.

Vërtet

Për të treguar mosbarazimin $\|f+g\|^p \leq \|f\|^p + \|g\|^p$, nisur nga mënyra e përcaktimit të $\|f\|$ dhe vetitë e integralit të Lebegut, mjafton të tregojmë se ka vend i njëjti mosbarazim për vlerën absolute të numrave realë.

Dallojmë rastet:

1.Në qoftë se x dhe y kanë shenja të kundërta, atëherë vërejmë se |x+y|≤|x| ose |x+y|≤|y|.

Vërtet

Supozojmë se x>0 dhe y<0 (njëlloj arsyetohet nëse x<0 dhe y>0)

Në qoftë se |x|>|y| kemi që x > -y ⇒x+y>0⇒|x+y| = x+y < x =|x|.

Në qoftë se |x|<|y| kemi që x< -y ⇒x+y<0⇒|x+y| = -x-y < -y = |y|.

Në qoftë se |x| = |y| kemi që x+y = 0 dhe gjithçka është e qartë. ▫

Si rrjedhim kemi që $|x+y|^p \leq |x|^p$ ose $|x+y|^p \leq |y|^p$ që çon në përfundimin se $|x+y|^p \leq |x|^p + |y|^p$.

2. Në qoftë se x dhe y kanë shenja të njëjtë, konsiderojmë fillimisht rastin kur x dhe y janë pozitivë.

Vërejmë se mosbarazimet që vijojnë janë të njëvlershëm.

$(x+y)^p \leq x^p + y^p \Leftrightarrow x^p\left(1+\frac{y}{x}\right)^p \leq x^p\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^p\right] \Leftrightarrow \left(1+\frac{y}{x}\right)^p - 1 - \left(\frac{y}{x}\right)^p \leq 0$ (∗)

---

[1]Kujtomë se funksionet e matshëm me vlera komplekse janë funksione të tillë që funksionet e pjesëve reale dhe imagjinare të tyre janë funksione të matshëm me vlera reale.

Ndërtojmë funksionin f:R→R të tillë që $f(x) = (1+x)^p - 1 - x^p$.
Vërejmë se funksioni f është zbritës për x pozitivë dhe si rrjedhim f(x) < f(0) = 0 gjë që tregon vërtetësinë e mosbarazimit (*).
Nëse x dhe y janë negativë, atëherë mosbarazimi $|x+y|^p \leq |x|^p + |y|^p$ merr trajtën $(-x-y)^p \leq (-x)^p + (-y)^p \Leftrightarrow (-x)^p\left(1+\frac{y}{x}\right)^p \leq (-x)^p\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^p\right]$. Meqë raporti $\frac{y}{x}$ është pozitiv, pjesa tjetër e arsyetimit është e njëjtë me rastin kur x dhe y janë pozitivë.
3. Në qoftë se x = 0 ose y = 0, atëherë mosbarazimi është evident.
Gjithashtu meqë $\frac{1}{p} > 1$, kemi

$$\|f+g\| \leq (\|f\|^p + \|g\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \{2max(\|f\|^p, \|g\|^p)\}^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}} max(\|f\|^p, \|g\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}}\left\{(\|f\|^p)^{\frac{1}{p}} + (\|g\|^p)^{\frac{1}{p}}\right\} = 2^{\frac{1}{p}}(||f|| + ||g||).$$ ▫

Pra kemi treguar që hapësira $L^p(\mu)$,për 0<p<1,është e p-normuar dhe gjithashtu e kuazi-normuar.

Lemë 1.1.1 ([19])
Çdo p-normë mbi X është një kuazi-normë, ku marrim si modul të konkavitetit të saj K= $2^{\frac{1}{p}}$.Anasjelltas, në qoftë se (X,||.||) është një hapësirë e kuazi-normuar me modul të konkavitetit K, gjendet një p-normë |||.||| mbi X e tillë që |||.||| ≤ ||.|| ≤ $2^{\frac{1}{p}}$|||.||| ku K = $2^{\frac{1}{p}-1}$.

Nga mosbarazimi 3' rrjedh se $\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^p \leq \|x_1\|^p + \|x_2\|^p + \cdots + \|x_n\|^p$ për çdo numër të fundëm elementesh $x_1, x_2, \ldots x_n$ në X.

Një mosbarazim i ngjashëm qëndron edhe në rastin e përgjithshëm, megjithëse një kuazi-normë nuk është p-normë për çdo p.

Lemë 1.1.2 ([18])
Në qoftë se ||.|| është një kuazi-normë në X, atëherë ekzistojnë konstantet p ∈(0,1) dhe c≤4 të tilla që $\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^p \leq c(\|x_1\|^p + \|x_2\|^p + \cdots + \|x_n\|^p)$ për çdo numër të fundëm elementesh $x_1, x_2, \ldots x_n$ në X.

Një rrjedhim i menjëhershëm i lemës 1.1.2 është teorema që vijon:

Teoremë 1.1.3 (Aoki-Rolewicz)
Në qoftë se ||.|| është një kuazi-normë në X, atëherë gjendet një p>0 dhe një p-normë |||.||| në X e tillë që $\frac{\|x\|}{c}$ ≤|||x|||≤||x|| për çdo x∈X, ku c është konstante e pavarur nga x.
(pra për çdo kuazi-normë në X gjendet një p-normë ekuivalente dhe për më tepër p-norma përcaktohet nga barazimi |||x||| = $inf\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} : x = \sum_{j=1}^{n} x_j\right\}$, ku inferiori merret mbi të gjithë sistemet e fundëm të elementeve në X.)

Hapësira X pajiset me strukturën e një hapësire vektoriale topologjike duke marrë si fqinjësi të zeros ‘‘bashkësinë që përmban $\left\{x: \|x\| < \frac{1}{n} \text{ për n} = 1,2\ldots\right\}$’’ .
Vërejmë se në këtë rast ‘‘rruzulli’’ $\{x: \|x\| < 1\}$ nuk është domosdo një bashkësi e hapur.

Vërtet

Siç dihet, një bashkësi është e hapur nëse ajo përmban çdo pikë të saj së bashku me një fqinjësi. Le të marrim se $U_y= y + U_0$ një fqinjësi të y, ku U_0 është një fqinjësi e zeros. Pra për çdo $z\in U_y$, gjendet $x\in U_0$ që z = y + x. Nga vetia (3) e kuazi-normës shkruajmë: $\|z\|\leq K(\|y\| + \|x\|) < K + \frac{K}{n_0}$

Por madhësia $K + \frac{K}{n_0} >1$ dhe si rrjedhim jo domosdo $\|z\|<1$, pra U_y s'është e thënë që të përfshihet në bashkësinë $\{x: \|x\| < 1\}$.▫

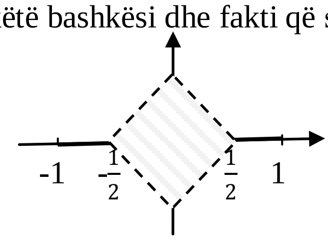
Gjithashtu po japim edhe një shembull ku rruzulli B(0,1) nuk është i hapur në një hapësirë të kuazi-normuar.

Le të jetë $X= R^2$ dhe $\|.\|:X\to R^+$ i tillë që

$$\|x\| = \begin{cases} 2(|x_1| + |x_2|) & n.q.s\ \ x_2 \neq 0 \\ |x_1| & n.q.s\ \ x_2 = 0 \end{cases}$$

Në këtë rast rruzulli $B(0,1) = \{x: \|x\| < 1\}$ nuk është bashkësi e hapur [27].

Mjafton të ndërtojmë grafikisht këtë bashkësi dhe fakti që s'është e hapur duket qartë.



Vihet re lehtë se për të marrë një fqinjësi të një pike (x,y) nga zona do të duhet të zhvendosim zonën në mënyrë që qendra e katëkëndëshit të jetë pika (x,y). Prandaj nëse pikën e marrim në segmentin që bashkon pikat me abshisa -1 dhe 1 në boshtin e x-ve , për shembull marrim pikën $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$, vemë re se sado e vogël qoftë rrezja e rruzullit përsëri ai nuk përfshihet në zonën e vizatuar më lart.▫

Kështu që një kuazi-normë, ndryshe nga një p-normë, në përgjithësi nuk është e vazhdueshme.

Kjo topologji, sipas teoremës Aoki-Rolewicz, është e metrizueshme. Pra, në qoftë se një p-normë $|||.|||$ është ekuivalente me kuazi-normën origjinale, atëherë barazimi $d(x,y) = |||x-y|||^p$ përcakton një metrikë që sjell të njëjtën topologji [18].

•Vërejmë se gjenden hapësira të kuazi-normuara lokalisht konvekse [9].

Vërtetim

Në rastin e hapësirës së normuar, koleksioni i rruzujve të hapur $B(0,\varepsilon) = \{x\in X:\|x\|<\varepsilon\}$ formon një sistem bazë i fqinjësive konvekse të zeros.

Le të jetë $B(0,\varepsilon) = \{x\in X:\|x\|<\varepsilon\}$ një rruzull në hapësirën e kuazi-normuar X. Për çdo $0 \leq t \leq 1$ dhe $x,y\in B(0,\varepsilon)$ mund të shkruajmë $\|tx+(1-t)y\| \leq Kt\|x\| + K(1-t)\|y\| < K\varepsilon$, por meqë $K \geq 1$ nuk mund të themi që $[tx+(1-t)y]\in B(0,\varepsilon)$. Kështu që koleksioni i rruzujve $B(0,\varepsilon)$, i cili formon një sistem bazë fqinjësish të zeros, nuk përbëhet nga bashkësi konvekse.

Në anën tjetër, në qoftë se koleksioni V_0 përbëhet nga mbështjellëset konvekse $c(B(0,\varepsilon))$ të rruzujve $B(0,\varepsilon)$ dhe X është hapësirë e kuazi-normuar, duke supozuar ai është një sistem bazë i fqinjësive të zeros, atëherë mund të konsiderojmë si fqinjësi të zeros të gjithë ato që në topologjinë e zakonshme përmbajnë një element të koleksionit V_0. Le të jetë $\mathcal{U}$ ky koleksion dhe të tregojmë që ai është vërtet një koleksion i fqinjësive të zeros i cili mund të gjenerojë një një topologji lokalisht konvekse.

Janë të vërteta vëtitë që vijojnë:

(1) $0\in U, \forall U\in\mathcal{U}$. (është e qartë)

(2) $\forall U', U''\in\mathcal{U}$ kemi që $U'\cap U''\in\mathcal{U}$.

Vërtet

Gjenden $c[B(0, \varepsilon_1)] = V'$ dhe $c[B(0, \varepsilon_2)] = V''$ të tillë që $V'\subset U'$ dhe $V''\subset U''$. Kështu që, për $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ është e qartë se ka vend barazimi $B(0,\varepsilon) = B(0,\varepsilon_1)$ ose $B(0, \varepsilon_2)$, të themi $B(0,\varepsilon) = B(0, \varepsilon_1)$. Pra $B(0, \varepsilon_1) \subset B(0, \varepsilon_2)$ që nga rrjedh se $c[B(0, \varepsilon_1)] \subset c[B(0, \varepsilon_2)]$ dhe kështu që $V'\cap V'' = c[B(0, \varepsilon_1)] = c[B(0,\varepsilon)]$. Në këto kushte kemi që $V'\cap V''\in V_0$ dhe si rrjedhim $V'\cap V''\subset U'\cap U''\Rightarrow U'\cap U''\in\mathcal{U}$. ▫

(3) Në qoftë se $U'\in \mathcal{U}$ dhe $U' \subset U''$ atëherë $U''\in \mathcal{U}$.(është e qartë)

(4) Në qoftë se $U\in\mathcal{U}$ atëherë për çdo $x\in U$, gjendet një $U'\in\mathcal{U}$ i tillë që $U'\in \mathcal{U}_x$.

Vërtet

Meqë $U\in\mathcal{U}$ atëherë gjendet një $c(B(0,\varepsilon)) \subset U$. Për çdo $x\in U$ marrim $\varepsilon' = \max(\|x\|,\varepsilon)$ dhe është e qartë se $x\in c(B(0,\varepsilon'))$. Kështu që $U'= c(B(0,\varepsilon'))\in\mathcal{U}$ është një fqinjësi e x-it.

Nga sa më sipër arrijmë në përfundimin se mund të zgjedhim $\mathcal{U}$ si system fqinjësish të zeros dhe V_0 si system bazë fqinjësish të zeros. Çdo fqinjësi e x-it është e formës $U_x= x + U$, ku $U\in U$ dhe kështu në të njëjtën mënyrë ndërtojmë sistemin e fqinjësive të pikës x. Aksioma e Kuratovski-t na lejon të përcaktojmë një topologji τ mbi X për të cilën V_0 është një sistem bazë fqinjësish të zeros. Kështu kemi treguar se gjenden hapësira të kuazi-normuara lokalisht konvekse. ▫

Hapësira X nuk është gjithnjë lokalisht konvekse, për shembull $L^p(0,1)$ për $0<p<1$ nuk është lokalisht konvekse.

Vërtet

Le të jenë funksionet $f = (p+1)g$ dhe $g \in L^p(0,1)$ i tillë që $\|g\|<\varepsilon p$.

Për $0< \lambda<1$ shkruajmë $\|\lambda f + (1-\lambda)g\| = (\lambda p+1)\|g\|$. Zgjedhim λ-ën të tillë që $\lambda p = K\|g\|$ ku $K\geq 2$ (kjo është e mundur pasi $\lambda p = K\|g\| \Leftrightarrow \lambda = \frac{K\|g\|}{p}$ dhe për $\|g\|<\varepsilon p$ kemi që $\lambda<K\varepsilon <1$ për ε sado të vegjël).

Kështu që $\|\lambda f + (1-\lambda)g\| = (K\|g\|+1)\|g\|$ dhe meqë trinomi $y = Kx^2 + x -1$ merr vlerat nga -1 në K domethënë merr edhe vlera pozitive (sigurisht duke patur parasysh se $x = \|g\|<1$), arrijmë në përfundimin se ka vend mosbarazimi $\|\lambda f + (1-\lambda)g\|>1$ për λ-ën e zgjedhur si më lart. Kështu që $L^p(0,1)$ nuk ka sistem bazë fqinjësish të zeros të përbëra nga bashkësi konvekse. ▫

Hapësira $L^p(0,1)$ është lokalisht e kufizuar sepse fqinjësitë $\left\{f: \|f\| < \frac{1}{n}\right\}$ janë të kufizuara në kuptimin e njohur të teorisë së hapësirave vektoriale topologjike. Në anën tjetër, dihet se një hapësirë vektoriale topologjike lokalisht e kufizuar mund të përshkruhet nga një kuazi-normë ([26]). Kjo përbën një tjetër mënyrë për të treguar se hapësira $L^p(0,1)$ për $0<p<1$ është e kuazi-normuar.

Gjithashtu vërejmë se ka vend ky pohim:

Pohim 1.1.4 [10]
Në qoftë se $\|.\|:X\to R^+$ është një kuazi-normë në X atëherë funksioni $d: X\to R^+$ i tillë që $d(x,y) = \|x-y\|$ për çdo $x,y\in X$ përcakton një kuazi-distancë në X.
Vërtetim
Dy vetitë e para janë të qarta nga vëtitë e kuazi-normës $\|.\|$.
Të tregojmë tani vetinë e tretë.
Relacionet që vijojnë janë të vërteta: $d(x,y) = \|x-y\| \leq K(\|x-z\|+\|z-y\|) = K[d(x,z)+d(z,y)]$ ku K është moduli i konkavitetit të kuazi-normës. Kështu që funksioni d(x,y) është një kuazi-distancë në X.▫

Kuptimi i kuazi-distancës mund të shtrihet edhe për bashkësitë [10].
Le të jenë A dhe B janë nënbashkësi të X, shënojmë $e(A,B) = \sup\{d(a,B):a\in A\}$ ku $d(a,B) = \inf\{d(a,b) = \|a-b\|:b\in B\}$. Madhësinë e(A,B) e quajmë ekses i A në B.
Eksesi i A në $\{0\}$ shënohet $|A|$ dhe është e qartë se ka vend barazimi $|A| = sup\{\|a\|: a \in A\}$.

Kështu vërejmë se:
Pohim 1.1.5 [10]
Në qoftë se A dhe B janë nënbashkësi të X atëherë madhësia $h(A,B) = \max\{e(A,B), e(B,A)\}$, e cila është analogia e distancës së Hausdorfit kur X është hapësirë e normuar, është një kuazi-distancë në X.
Vërtetim
Dy vetitë e para tregohen krejtësisht në mënyrë analoge si në rastin kur X është hapësirë e normuar.
Nga ana tjetër duke iu referuar pohimit 1.1.4 arrijmë në përfundimin se $d(a,b) \leq K[d(a,c)+d(c,b)]$ ku $a\in A$, $b\in B$,$c\in C$.
Meqw $d(a,B) \leq d(a,b)$ atëherë mund të shkruajmë $d(a,B)\leq K[d(a,c)+d(b,c)]$. Mosbarazimi i fundit është i vërtetë për të gjithë $c\in C$. Kështu që, në qoftë se fiksojmë $a\in A$ dhe $b\in B$ atëherë është e qartë se $d(a,B) \leq K[d(a,C)+d(b,C)]$.
Nga përcaktimi i ekses-it të bashkësisë A në bashkësinë B, ne mund të shkruajmë se $e(A,B) \leq K[e(a,C)+e(b,C)] \leq K[e(A,C)+e(B,C)]$ dhe në mënyrë analoge tregohet se $e(B,A) \leq K[e(B,C)+e(A,C)]$. Prandaj, nga përcaktimi i madhësisë h kemi $h(A,B) \leq K[e(A,C)+e(B,C)] \leq K[h(A,C)+h(B,C)]$.▫

Rrjedhim 1.1.6 [10]
Për çdo dy bashkësi të kufizuara A,B dhe për çdo dy pika $x,y\in X$ është i vërtetë mosbarazimi

$$d(x,A) \leq K[\|x-y\|+Kd(y,B)+Kh(A,B)]$$

Vërtetim
Për çdo $a\in A$ janë të vërteta mosbarazimet $d(x,a) \leq K[d(x,y) + d(y,a)] \leq K^2[d(y,b) + d(b,a)] + Kd(x,y)$.
Prandaj $d(x,A) \leq Kd(x,y) + K^2 [d(y,b) + d(b,a)]$ nga i cili rrjedh se $d(x,A) - Kd(x,y) \leq K^2[d(y,b)+d(b,a)]$. Kështu që $d(x,A) - K\|x-y\| \leq K^2[d(y,B) + d(a,B)] \leq K^2[d(y,B) + e(A,B)] \leq K^2[d(y,B) + h(A,B)]$ dhe si rrjedhim $d(x,A) \leq K [\|x-y\| + Kd(y,B) + Kh(A,B)]$.▫

1.2 Hapësirat Kuazi-Banah dhe p-Banah

Një hapësirë e kuazi-normuar X quhet hapësirë Kuazi-Banah në qoftë se ajo është e plotë, domethënë që një varg $\{x_n\}\subset X$ është konvergjent në qoftë se dhe vetëm

në qoftë se $||x_n - x_m|| \to 0$ kur $m,n \to +\infty$. Në qoftë se X është e p-normuar dhe e plotë, atëherë X quhet hapësirë p-Banah.
Shembuj hapësirash kuazi-Banah janë hapësirat l_p dhe $L^p(0,1)$ ku $0 < p < 1$. ([19])

Për më tepër, siç përmendet në [17], në qoftë se (X,Σ,μ) është një hapësirë e matshme σ-e fundme dhe Σ σ-algjebra e nënbashkësive μ-të matshme të X atëherë mund të ndërtohet hapësira e funksioneve μ-të matshëm me vlera komplekse mbi X që shënohet me $L^0(\mu,\mathbb{C})$. Në këtë hapësirë funksioni $\|.\|: L^0(\mu,\mathbb{C}) \to [0,+\infty]$ që kënaq kushtet:

(1) $\|f\| = 0$ në qoftë se dhe vetëm në qoftë se f = 0 p.k
(2) $\forall \alpha \in C, \forall f \in L^0(\mu,\mathbb{C}), \|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$
(3) $\forall f,g \in L^0(\mu,\mathbb{C})$, $\|f+g\| \leq K(\|f\| + \|g\|)$ ku K është konstante e pavarur nga f dhe g.
(4) në qoftë se $|f| \leq |g|$ p.k atëherë $\|f\| \leq \|g\|$
(5) në qoftë se $E \subset X$ dhe $\mu(E) < +\infty$ atëherë $\|\chi_E\| < +\infty$
(6) në qoftë se $\lim_{n\to+\infty}\|f_n\| = 0$ atëherë $f_n \to 0$ në $L^0(\mu,\mathbb{C})$.
(7) $\|liminf\ |f_n|\| \leq liminf\|f_n\|$

Quhet funksion kuazi-normë i Banahut mbi $L^0(\mu,\mathbb{C})$.
Vërejmë se vetitë (1), (2), (3) e bëjnë bashkësinë $X = \{f \in L^0(\mu,\mathbb{C}): \|f\| < +\infty\}$ një hapësirë të kuazi-normuar. Vetia (7) quhet vetia Fatou dhe është e mjaftueshme që hapësira (X, || . ||) të jetë e plotë. Çdo hapësirë e kësaj forme quhet hapësirë funksionesh kuazi-Banah mbi $L^0(\mu,\mathbb{C})$.

Le të paraqesim tani një mënyrë vërtetimi të një rezultati të përmendur më lart.
Pohim 1.2.1 [17]
Vetia Fatou është e mjaftueshme që hapësira e funksioneve (X, || . ||) të jetë e plotë.
Vërtetim
Le të jetë (f_n) një varg Koshi në hapësirën (X, || . ||), pra $\forall\varepsilon > 0, \exists p \in N$ e tillë që $\forall\, n,m \geq p$ të kemi $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Atëherë $0 \leq limsup\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$ që nga rrjedh se $limsup\|f_n - f_m\| = 0$. Në këto kushte $limsup\|f_n - f_m\| = 0$ dhe nga vetia (6) shkruajmë që $f_n - f_m \to 0$ (në mënyrë pikësore), pra vargu (f_n) është një varg që plotëson kushtet e kriterit Bolcano-Koshi në fushën X. Kështu që vargu (f_n) konvergjon p.k në një funksion g me vlera në fushën X.
Shënojmë me f funksionin e barabartë me g në ato pika ku g është i përcaktuar dhe të barabartë me zero në ato pika ku g është i papërcaktuar. Meqë (f_n) konvergjon p.k në g atëherë g është p.k i përcaktuar në X dhe si rrjedhim f = g p.k. Kështu që vargu (f_n) konvergjon p.k në f dhe duke konsideruar vargun (f_n) si varg pikash në planin koordinativ, siç mund të paraqiten numrat kompleksë, arrijmë në përfundimin se $Re(f_n) \to Re(f)$ dhe $Im(f_n) \to Im(f)$. Prandaj kemi që $|f_n| \to |f|$.
Në këto kushte nga matshmëria e vargut $(|f_n|)$ rrjedh se $|f|$ është funksion i matshëm me vlera reale. Nga ana tjetër nga vetia (7) kemi që $\||f|\| = \|f\| \leq liminf\|f_n\| < +\infty$ pasi $f_n \in X$ dhe si rrjedhim edhe $f \in X$.
Të tregojmë tani se vargu (f_n) konvergjon në f sipas normës.
Në qoftë se $k_0 \in N$ i tillë që $n_{k_0} > p$ atëherë për çdo n > p dhe $k > k_0$ shkruajmë $\left\|f_n - f_{n_k}\right\| < \varepsilon$ (sepse (f_n) është varg Koshi në (X, || . ||)).
Kështu që nga vetia (7) kemi:

$$\left\|liminf\left|f_n - f_{n_k}\right|\right\| \leq liminf\left\|f_n - f_{n_k}\right\| < \varepsilon \text{ dhe si rrjedhim } \left\||f_n - f|\right\| \leq \varepsilon \text{ kur } n_k \to +\infty.$$

Prandaj kemi treguar se $\|f_n - f\| \to 0$ kur $n \to +\infty$, që i jep fund vërtetimit. ▫

Gjithashtu janë të vërteta pohimet:
Pohim 1.2.2 ([18])
Le të jetë X një hapësirë e p-normuar. Hapësira X është e plotë atëherë dhe vetëm atëherë kur konvergjenca e serisë $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p$ sjell konvergjencën e serisë $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Në qoftë se X është e plotë dhe seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergjon, atëherë është i vërtetë mosbarazimi $\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p$.

Pohim 1.2.3 ([8])
Le të jetë $\{x_{j,k}\}$ (j,k≥1) një varg në një hapësirë p-Banah X. Në qoftë se $\sum_{j,k=1}^{\infty}\left\|x_{j,k}\right\|^p<\infty$, atëherë seritë $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{j,k}\right)$ dhe $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_{j,k}\right)$ konvergjojnë dhe kanë të njëjtën shumë.

1.3 Operatorët linearë

Le të jetë f:X→Y një operator linear, ku X,Y janë hapësira të kuazi-normuara.
Me arsyetime të ngjashme si në rastin e operatorëve linearë në hapësirat e normuara, kemi treguar se:
1.Operatori linear është i vazhdueshëm atëherë dhe vetëm atëherë kur ai është i kufizuar.
2.Operatori linear f është i vazhdueshëm atëherë dhe vetëm atëherë kur f[B’$_X$(0,1)] është një bashkësi e kufizuar në Y, ku B’$_X$(0,1) është rruzulli njësi i mbyllur në X.
3.I njëjti barazim që përcakton normën e operatorit linear në rastin e hapësirave të normuara përcakton kuazi-normën e operatorit në rastin e hapësirave të kuazi-normuara. Për më tepër, mund të shkruajmë të njëjtat barazime ekuivalente me ato të shkruara në rastin e hapësirave të normuara. Prandaj, operatori linear f është i kufizuar vetëm kur kuazi-norma e tij është një numër i fundëm dhe ka vend mosbarazimi $\|f(x)\|_Y \leq \|f\| \cdot \|x\|_X$.
4. Operatori linear f është i kufizuar në qoftë se dhe vetëm në qoftë se për çdo bashkësi të kufizuar A⊂X, bashkësia f(A) është e kufizuar në Y.
5.Koleksioni i operatorëve linearë të kufizuar b(X,Y) formon një hapësirë vektoriale sipas veprimeve të zakonshme të shumës së vektorëve dhe shumëzimit të tyre me skalarë: Kjo sepse a) ∀α∈R dhe ∀f∈b(X,Y) mund të shkruajmë:||αf|| = |α|.||f|| kështu ∀f∈b(X,Y),∀α∈R, ||αf|| < +∞ në qoftë se ||f|| < +∞. b)||f+g|| ≤ K[||f||+||g||] ≤ K(K_1+K_2) < +∞ sjell që f+g∈b(X,Y) (ku K është moduli i konkavitetit të kuazi-normës dhe K_1,K_2 janë respektivisht kufij të sipërm të ||f||,||g||).
6.Kjo hapësirë lineare është e kuazi-normuar sipas kuazi-normës së operatorëve të përkufizuar më lart.

Ne njohim teoremën Hanh-Banah për hapësirat vektoriale topologjike lokalisht konvekse ([28]). Vërejmë se ka vend një teoremë e ngjashme edhe për hapësirat e kuazi-normuara lokalisht konvekse, të cilën po e quajmë sërish Teorema Hanh-Banah. Pra është e vërtetë teorema:
Teoremë 1.3.1 (Hanh-Banach)
Në qoftë se X është një hapësirë e kuazi-normuar lokalisht konvekse dhe Y⊂X është një nënhapësirë e X, f:Y→R është një formë lineare e vazhdueshme në Y atëherë

gjendet një shtrirje e vazhdueshme e f në X. Për më tepër shtrirja f_1:X→R mund të zgjidhet e tillë që $||f_1|| = ||f||$.
Vërtetimi është identik si në rastin kur X është hapësirë e normuar.

Vërejtje 1.3.2

Le të jetë (X,||.||) një hapësirë e kuazi-normuar lokalisht konvekse dhe $x_0 \in X$ ku $x_0 \neq 0$. Gjendet një formë lineare e vazhdueshme f:X→R e tillë që ||f|| = 1 dhe $f(x_0) = \|x_0\|$.
Vërtetimi është identik si në rastin kur X është hapësirë e normuar.
Vërejmë gjithashtu se:

Pohim 1.3.3

Le të jenë $(X, \|.\|_1)$ dhe $(Y, \|.\|_2)$ dy hapësira të kuazi-normuara, A ⊂ X një nënhapësirë e X kudo e ngjeshur në të dhe f:A→Y një operator linear i vazhdueshëm. Në qoftë se $(Y, \|.\|_2)$ është një hapësirë kuazi-Banah me modul të konkavitetit 1 ≤ G < 2 atëherë gjendet një operator linear i vazhdueshëm f_1:X→Y i tillë që $f_1(x) = f(x)$ për çdo x∈A dhe $\|f\| \leq \|f_1\| \leq \frac{K}{2-G}\|f\|$ ku K është moduli i konkavitetit të kuazi-normës në X.

Vërtetim

Meqë A është nënhapësirë kudo e ngjeshur në X atëherë $\bar{A} = X$ ku $\bar{A}$ shënohet mbyllja e A-së. Kështu që për çdo x∈X gjendet një varg $(x_k)_{k\in N}$ në A i tillë që konvergjon në x. Meqë çdo varg konvergjent është varg themelor atëherë vargu $(x_k)_{k\in N}$ është varg themelor. Vazhdueshmëria e f-së në A sjell që edhe vargu $f(x_k)$ është varg themelor. Hapësira $(Y, \|.\|_2)$ është hapësirë kuazi-Banah dhe si rrjedhim vargu $f(x_k)$ konvergjon në ndonjë y∈Y. Pika y∈Y është saktësisht e përcaktuar sepse; në qoftë se $(x_k')_{k\in N}$ është një tjetër varg në A dhe vargu $(x_k')_{k\in N}$ është konvergjent në x atëherë vargu $(x_k' - x_k)$ është konvergjent në 0_1 (me 0_1 është shënuar zeroja e hapësirës $(X, \|.\|_1)$). Meqë operatori f është i vazhdueshëm në $0_1 \in A \subset X$ atëherë $[f(x_k') - f(x_k)] = f(x_k' - x_k)$ është konvergjent në $0_2 \in Y$ dhe si rrjedhim $\lim_{k\to+\infty} f(x_k') = \lim_{k\to+\infty} f(x_k) = y$.
Marrim operatorin $f_1: X \to Y$ të tillë që $f_1(x) = y$ për çdo x∈X. Vërejmë se:
(1) $f_1(x) = f(x)$, ∀x∈A sepse për këtë, mjafton të marrim vargun $x_k \to x$ për çdo x∈A.
(2) f_1 është një operator linear.
Ky i fundit është një rrjedhim i menjëhershëm i vazhdueshmërisë dhe linearitetit të operatorit f.
(3) f_1 është i vazhdueshëm mbi X.
Vërtetim
Për çdo n∈N kanë vend mosbarazimet:

$$\text{(a) } \|x_n\| \leq K\|x_n - x\| + K\|x\| \text{ dhe (b) } \|x\| \leq K\|x_n - x\| + K\|x_n\|.$$

Nga mosbarazimi (a) është e qartë se ka vend mosbarazimi (c) $\|x_n\| - K\|x\| \leq K\varepsilon$ për çdo ε > 0. Kështu që, për çdo $n \geq n_0$ dhe ε > 0 sado të vogël ka vend mosbarazimi:

$$\|x_n\| - \|x\| \leq (K-1)\|x\| + \varepsilon' \text{ ku } \varepsilon' = K\varepsilon.$$

Nga mosbarazimi (b) është e qartë se ka vend (d) $\|x\| \leq K\|x_n\| + \varepsilon'$ për çdo $n \geq n_0$ dhe $\varepsilon > 0$ sado të vogël. Kështu që $\|x_n\| \geq \frac{\|x\|-\varepsilon'}{K} = \frac{\|x\|}{K} - \varepsilon''$ dhe duke marrë parasysh mosbarazimin (b) kemi:

$$\|x_n\| - \|x\| \geq \frac{\|x\|}{K} - \varepsilon'' - K\|x_n - x\| - K\|x_n\| \geq \frac{\|x\|}{K} - \varepsilon'' - \varepsilon' - K\|x_n\|$$
$$= \frac{\|x\| - K^2\|x_n\|}{K} - \varepsilon'' - \varepsilon'$$
$$= K(\|x\| - \|x_n\|) + \frac{(1-K^2)\|x\|}{K} - \varepsilon'' - \varepsilon'$$

Ky mosbarazim i fundit sjell që:

$$(1+K)(\|x_n\| - \|x\|) \geq \frac{(1-K^2)\|x\|}{K} - \varepsilon'' - \varepsilon' \Rightarrow \|x_n\| - \|x\|$$
$$\geq \frac{(1-K)\|x\|}{K} - \varepsilon'' - \varepsilon'$$

Meqë $K \geq 1$ atëherë $\frac{K-1}{K} \leq K - 1 \Leftrightarrow \frac{1-K}{K} \geq 1 - K$ dhe kështu ka vend mosbarazimi:

$$\text{(e) } \|x_n\| - \|x\| \geq (1-K)\|x\| - \varepsilon'' - \varepsilon'$$

Nga mosbarazimet (c) dhe (e) arrijmë në përfundimin që për n pas një indeksi ka vend mosbarazimi:

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq (K-1)\|x\| + \varepsilon' + \varepsilon''$$

Prandaj kemi (f) $(2-K)\|x\| - \varepsilon'' - \varepsilon' \leq \|x_n\| \leq K\|x\| + \varepsilon' + \varepsilon''$.
Nga ky rezultat duke marrë limitin për $n \to +\infty$ në mosbarazimin $\|f(x_n)\|_2 \leq \|f\| \cdot \|x_n\|_1$ kemi:

$$(2-G)\|f_1(x)\|_2 \leq K \cdot \|f\| \cdot \|x\|_1 \text{ për çdo } x \in X.$$

(kemi parasysh këtu që edhe vargu $f(x_n)_{n\in N}$ plotëson një mosbarazim të ngjashëm me mosbarazimin (f) në hapësirën Y)
Meqë $1 \leq G < 2$ atëherë operatori linear f_1 është i kufizuar, pra edhe i vazhdueshëm.
Për më tepër, $\|f_1\| = sup\left\{\frac{\|f_1(x)\|_2}{\|x\|_1} : x \in X, x \neq 0_1 \in X\right\} \leq \frac{K}{2-G}\|f\|$.
Në anën tjetër, $\|f_1\| = sup\left\{\frac{\|f_1(x)\|_2}{\|x\|_1} : x \in X, x \neq 0_1 \in X\right\} \geq sup\left\{\frac{\|f_1(x)\|_2}{\|x\|_1} : x \in A, x \neq 0_1 \in X\right\} = \|f\|$.
Prandaj, $\|f\| \leq \|f_1\| \leq \frac{K}{2-G}\|f\|$. ▫
Kështu kemi treguar:
Rrjedhim 1.3.4
Edhe në rastin e hapësirës së kuazi-normuar një operator i vazhdueshëm i një nënhapësire kudo të ngjeshur $A \subset X$ mund të shtrihet në X duke mbetur i vazhdueshëm por nuk ruan kuazi-normën e operatorit.

Po paraqesim tani disa pohime mbi hapësirën e operatorëve linearë të vazhdueshëm L(X,Y), kur X dhe Y janë hapësira të kuazi normuara .

Pohim 1.3.5

Hapësira L(X,Y) është e plotë në qoftë se Y është një hapësirë e tillë.

Vërtetim

Meqë hapësira Y është e plotë atëherë për çdo $x \in X$ në qoftë se vargu $\{T_n x\} \subset Y$ plotëson kushtin që $\|T_n x - T_m x\| \to 0$ kur $m,n \to +\infty$ është varg konvergjent.

Le të jetë vargu $\{T_n x\} \subset Y$ një varg Koshi në Y.

Nga përcaktimi i kuazi-normës së operatorëve shkruajmë:

$$\|T_m - T_n\| = \sup\{\|T_m x - T_n x\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|(T_m - T_n)x\| : \|x\| \leq 1\} (*)$$

Për $x \in X$, marrim $y = \frac{x}{K}$ të tillë që $K \geq \|x\|$ (pra $\|y\| \leq 1$). Atëherë nga mosbarazimi $(*)$ kemi $\|T_m - T_n\| = \sup\{\|(T_m - T_n)y\| : \|y\| \leq 1\} = \frac{1}{K} \sup\{\|(T_m - T_n)x\|\} \to 0$ kur $m,n \to +\infty$.

Kështu që vargu $\{T_n\} \subset L(X,Y)$ është varg Koshi.

Anasjelltas, në qoftë se $\|T_m - T_n\| \to 0$ për $m,n \to +\infty$ dhe $x \in X$ çfarëdo e fiksuar (sigurisht $x \neq 0_X$ pasi $\{T_n 0\} = \{0\}$ pra është konvergjent dhe si rrjedhim edhe Koshi në Y), atëherë shkruajmë $\|(T_m - T_n)x\| = \|x\| \cdot \|(T_m - T_n)y\|$ ku $y = \frac{x}{\|x\|}$ dhe si rrjedhim kemi që $\|(T_m - T_n)x\| \leq \|x\| \cdot \sup\{\|(T_m - T_n)y\| : \|y\| \leq 1\} = \|x\| \cdot \|T_m - T_n\| \to 0$ për $m,n \to +\infty$. Pra vargu $\{T_n x\}$ është varg Koshi në Y.

Supozojmë se vargu $\{T_n\} \subset L(X,Y)$ është varg Koshi por nuk është konvergjent.

Kështu që për çdo $T \in L(X,Y)$ gjendet një $\varepsilon_0 > 0$ i tillë që për çdo $p \in N$ të gjendet një $n \geq p$ për të cilën plotësohet kushti $\|T_n - T\| \geq \varepsilon_0$.

Kanë vend mosbarazimet: $\varepsilon_0 \leq \|T_n - T\| = \sup\{\|T_n x - Tx\| : \|x\| \leq 1\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X$ e tillë që $\|x\| \leq 1$ dhe $\|T_n - T\| - \varepsilon < \|T_n x - Tx\| \leq \|T_n - T\| \Rightarrow \varepsilon_0 - \varepsilon < \|T_n x - Tx\|$. Marrim $\varepsilon \to 0$ dhe kemi $\|T_n x - Tx\| \geq \varepsilon_0$.Prandaj vargu $\{T_n x\} \subset Y$, megjithëse plotëson kushtin që $\|T_n x - T_m x\| \to 0$ kur $m,n \to +\infty$ nuk konvergjon tek asnjë $Tx \in Y$. Kjo e fundit kundërshton faktin që Y është hapësirë e plotë, (fakti që vargu $\{T_n x\}$ nëse konvergjon patjetër konvergjon në ndonjë $Tx \in Y$ ku $T \in L(X,Y)$ trajtohet në analogji me rastin e hapësirave të normuara).▫

Pra mund të themi se në qoftë se X dhe Y janë hapësira kuazi-Banah atëherë edhe Hapësira L(X,Y) është e tillë dhe për më tepër duali $X^* = L(X,K)$ ku K është fusha e skalarëve, është gjithashtu hapësirë kuazi-Banah [19]. Kështu që $l_p^* = l_\infty$ dhe $L_p^*(0,1) = \{0\}$ janë hapësira kuazi-Banah.

Një operator $T \in L(X,Y)$ quhet i kthyeshëm në qoftë se ai është bijektiv dhe i anasjellti i tij është i vazhdueshëm.

Pohim 1.3.6 ([7]).

Le të jetë X një hapësirë kuazi-Banah dhe $T \in L(X,Y)$ një operator i tillë që $\|I-T\| < 1$ ku I është operatori identik.

Atëherë operatori T është i kthyeshëm dhe kanë vend mosbarazimet $\|T^{-1}\|^p \leq c(1 - \|I - T\|^p)^{-1}$ ku c dhe p janë konstantet e lemës 1.1.2.

Teorema e mëposhtëme është e rëndësishme megjithëse vërtetimi i saj është mjaft i thjeshtë.

Teoremë 1.3.7
Le të jenë X dhe Y hapësira kuazi-Banah dhe E një nënbashkësi kudo e ngjeshur e X. Le të jetë $T_n \in L(X,Y)$ një varg i tillë që $sup_n \|T_n\| < \infty$. Në qoftë se limiti $\lim_{n\to\infty} T_n x$ ekziston për çdo $x\in E$, atëherë ai ekziston për çdo $x\in X$ dhe operatori $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ është linear dhe i vazhdueshëm.
Vërtetim
Tregojmë fillimisht ekzistencën e limitit $\lim_{n\to\infty} T_n x$,për çdo $x\in X$. Meqë Y është hapësirë kuazi-Banah, mjafton të tregojmë se për çdo $x\in X$ plotësohet kushti $\|T_m x - T_n x\| \to 0$ kur m, n→ +∞.
Nisur nga fakti që E është kudo e ngjeshur në X shkruajmë që: $\forall\varepsilon > 0$ dhe $\forall$ $x\in X$, $\exists y\in E$ i tillë që plotësohet mosbarazimi $\|x-y\| < \varepsilon$. Kështu që kanë vend mosbarazimet $\|T_n x - T_m x\| \leq$ $K[\|T_n x - T_n y\| + \|T_n y - T_m x\|] \leq$ $K\|T_n x - T_n y\|$ $+K^2[\|T_n y - T_m y\| + \|T_m y - T_m x\|]$.
Vërejmë se kur m, n→ +∞, $\|T_n x - T_n y\| < \frac{\varepsilon}{3K}$ dhe $\|T_m y - T_m x\| < \frac{\varepsilon}{3K^2}$ sepse $\|x-y\| < \varepsilon$ dhe T_n janë operatorë të vazhdueshëm, nga ana tjetër $\|T_n y - T_m y\| < \frac{\varepsilon}{3K^2}$ sepse $y\in E$ dhe në E ekziston $\lim_{n\to\infty} T_n y$, pra $\lim_{n\to\infty} T_n y = \lim_{m\to\infty} T_m y$. Prandaj $\|T_m x - T_n y\| \to 0$ kur m, n→ +∞.
Të tregojmë se operatori $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ është linear.
a)Le të jenë $x,y\in X$, atëherë janë të vërteta barazimet $T(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x+y) = \lim_{n\to\infty}(T_n x + T_n y) = \lim_{n\to\infty} T_n x + \lim_{n\to\infty} T_n y = Tx + Ty$.
b) Për çdo skalar λ dhe për çdo $x\in X$ kemi $T(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} \lambda T_n(x) = \lambda \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lambda Tx$ sepse skalari λ nuk varet nga indeksi n sipas të cilit kryhet limiti.

Së fundi, të tregojmë se kufizueshmëria e $\|T_n\|$ sjell kufizueshmërinë e operatorit T. Meqë $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ rrjedh se për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet një $n_0\in N$ e tillë që për çdo $n\geq n_0$, $\|Tx - T_n x\| < \varepsilon$. Nga përkufizimi $\|T\| = \sup\{\|Tx\|: \|x\| \leq 1\}$,por nga ana tjetër $\|Tx\| \leq K[\|Tx - T_n x\| + \|T_n x\|]$.Mosbarazimi i fundit shkruhet për n natyrore të çfarëdoshme, kështu që për $n\geq n_0$ shkruajmë:
$\|Tx\| \leq K\varepsilon + K\|T_n x\| \leq K\varepsilon + K\|T_n\| \leq K(\varepsilon + M)$ ku M është një kufi i sipërm i bashkësisë $\{\|T_n\|\}$. Si rrjedhim $\|T\| < +\infty$.▫

Pohim 1.3.8
Le të jetë T një operator linear i vazhdueshëm i hapësirës së kuazi-normuar X në hapësirën e kuazi-normuar Y, dhe E një nënbashkësi e X e tillë që mbështjellësja lineare e E-së është kudo e ngjeshur në X.Në qoftë se Y_0 është një nënhapësirë e mbyllur e Y e tillë që $T(E)\subset Y_0$ atëherë $T(X)\subset Y_0$.
Vërtetim
Së pari kujtojmë se mbështjellësja lineare e një bashkësie është nënhapësira lineare më e vogël që përmban këtë bashkësi, pra elementet e mbështjellëses lineare të E-së janë kombinime lineare të elementeve të E-së.
Po shënojmë mbështjellësen lineare të E-së me L(E).
Meqë mbështjellësja lineare e E-së është kudo e ngjeshur në X shkruajmë:

$$\forall\varepsilon>0 \text{ dhe } \forall x\in X, \exists x'\in L(E) \text{ i tillë që } \|x-x'\|_X < \varepsilon.$$

Atëherë $\|Tx - Tx'\|_Y = \|T(x-x')\|_Y \leq \|T\|\cdot\|x-x'\|_X \leq M\varepsilon$ (∗) ku M është një kufi i sipërm i $\|T\|$ i cili ekziston sepse operatori T është i vazhdueshëm. Meqë $Tx' = T(\sum_n k_n x_n) = \sum_n k_n T(x_n)$ ku k_n janë skalarë dhe $x_n\in E$, kemi që $Tx'\in Y_0$. Nga ana tjetër mosbarazimi (∗) na garanton që $Tx\in\overline{Y_0} = Y_0$.▫

1.4 Mbështjellësja q-Banah

Në qoftë se X ka dual separabël, si për shembull l_p, atëherë mund t'i shoqërojmë X – it normën e përcaktuar me anë të barazimit $\|x\|_c = \sup\{|x^*(x)|: \|x^*\| \leq 1\}$. Mund të shihet lehtë se $\|x\|_c$ është norma më e madhe mbi X dominuar nga kuazi-norma origjinale e X. Plotësimi i X me këtë normë quhet mbështjellëse e Banahut e X [19].

Në përgjithësi, një hapësirë kuazi-Banah X është e ''mbështjellë'' nga disa hapësira q-Banah. ''Më e vogla'' prej tyre quhet mbështjellëse q-Banah e X [18].

Për të qenë më të saktë, përkufizojmë funksionin N_q ($0 < q \leq 1$) mbi X si vijon: $N_q(x) = inf\left\{\left(\sum_j \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}}: \sum_j x_j = x\right\}$ ku inferiori është marrë mbi bashkësitë e sistemeve të fundëm $\{x_j\}\subset$X.

Ky funksion është një q-gjysmënormë, pra kënaq kushtet:

$\{N_q(f+g)\}^q \leq \{N_q(f)\}^q + \{N_q(g)\}^q$ dhe $N_q(\lambda f) = |\lambda| N_q(f)$. (plotësimi i këtyre kushteve tregohet lehtë duke patur parasysh kuptimin e inferiorit dhe kushtet e q-kuazi -normës)

•Bashkësia $\{x \in X: N_q(x) = 0\} = KerN_q$ është një nënhapësirë e mbyllur e X.

Vërtet

Së pari të tregojmë se $KerN_q$ është një nënhapësirë e X.

Le të jenë x,y $\in KerN_q$,meqë $\{N_q(x+y)\}^q \leq \{N_q(x)\}^q + \{N_q(y)\}^q = 0 + 0$ dhe $N_q(x+y) \geq 0$, marrim $N_q(x+y) = 0 \Leftrightarrow (x+y) \in KerN_q$.

Nga ana tjetër $N_q(\lambda x) = |\lambda| N_q(x) = |\lambda| \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow \lambda x \in KerN_q$.

Të tregojmë tani se $KerN_q$ është bashkësi e mbyllur.

Le të jetë $x \in \overline{KerN_q}$, atëherë $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in KerN_q$ e tillë që $N_q(x-y) < \varepsilon$.

$\{N_q(x)\}^q \leq \{N_q(x-y)\}^q + \{N_q(y)\}^q < \varepsilon^q + 0 \Rightarrow N_q(x) = 0 \Leftrightarrow x \in KerN_q$.▫

•Në qoftë se $KerN_q = \{0\}$ atëherë N_q është një q-normë.

Vërtet

Mjafton të tregojmë se $N_q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$N_q(x) = 0 \Rightarrow x \in KerN_q \Rightarrow x = 0$, anasjelltas $x = 0 \Rightarrow x \in KerN_q \Rightarrow N_q(x) = 0$.▫

Kështu që mund të themi se ''plotësimi'' i hapësirës së q-normuar (X, N_q) është një hapësirë q-Banah dhe quhet mbështjellëse q-Banah e X, shënohet $[X]_q$.

Sipas teoremës Aoki-Rolewicz, gjithnjë gjendet një q e tillë që X = $[X]_q$, me kuazi-normën ekuivalente.

Rëndësia e hapësirës $[X]_q$ qëndron në faktin se çdo operator i X në një hapësirë q-Banah çfarëdo shtrihet në një operator mbi $[X]_q$, më saktësisht:

Pohim 1.4.1

Supozojmë se X ka mbështjellëse q-Banah (pra, N_q është një q-normë) dhe le të jetë Y një hapësirë q-Banah çfarëdo. Në qoftë se T$\in$ L(X,Y), atëherë gjendet një operator i vetëm S$\in$L($[X]_q, Y$) i tillë që Sx = Tx për të gjithë x$\in$X.

Vërtetimi është i njëjtë si në rastin e hapësirave të Banahut, duke ditur se X është kudo i ngjeshur në $[X]_q$.

Fakti që vijon përdoret në identifikimin e mbështjellëses:

Pohim 1.4.2 ([18])
Le të jetë $X \subset Y$ ku Y është një hapësirë q-Banah dhe gjendet një konstante c>0 e tillë që për çdo $x \in X$, $\|x\|_Y \le c\|x\|_X$. Në qoftë se çdo $y \in Y$ mund të paraqitet në formën $y = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n \in X$ dhe $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X^q \le M\|y\|_Y^q$ ku M është konstante e pavarur nga y, atëherë $Y = [X]_q$ e pajisur me kuazi-normën ekuivalente.

Pohim 1.4.3
Funksioni N_q është një q-normë mbi X në qoftë se dhe vetëm se në qoftë se gjendet një hapësirë q-Banah Y e tillë që L(X,Y) ndan pikat në X, pra për çdo $x \neq 0$ gjendet $T \in L(X,Y)$ me vetinë që $Tx \neq 0$.
Vërtetim
Supozojmë së N_q është një q-normë. Kështu që mund të marrim $Y = [X]_q$ e cila është një hapësirë q-Banah. Për funksionin T= Id $\in$ L(X,Y), i cili është linear dhe i vazhdueshëm, kemi që T(x) = x. Kështu që për çdo $x \neq 0$, $T(x)= x \neq 0$.
Anasjelltas, supozojmë se gjendet një hapësirë q-Banah Y e tillë që L(X,Y) ndan pikat në X.
Nëse N_q nuk është një q-normë atëherë gjendet një $x\neq 0$ e tillë që $N_q(x) = 0$.
Prandaj për çdo $\varepsilon > 0$, gjendet një sistem i fundëm elementesh $x_1,x_2,...,x_n$ në X i tillë që $\sum_j x_j = x$ dhe $0 \le \left(\sum_j \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \varepsilon$. Kështu që për çdo j=1,...,n kemi që $\|x_j\|<\varepsilon$. Marrim $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{n\|T\|}$ në rolin e ε dhe kemi që për çdo j=1,...,n ka vend mosbarazimi $|T(x_j)| \le \|T\|\cdot\|x_j\|$. Atëherë shkruajmë $|T(x)| \le \sum_j |x_j| < \varepsilon$, që na çon në përfundimin se T(x) = 0. Kjo kundërshton faktin që L(X,Y) ndan pikat në X, prandaj mbetet të pranojmë që N_q është një q-normë. ▫

1.5 Funksione të hapur, grafe të mbyllur
Është e rëndësishme që rezultatet bazë si principi i kufizueshmërisë uniforme, teorema e funksioneve të hapur dhe teorema e grafit të mbyllur të cilat varen vetëm nga plotësia aplikohen edhe në hapësirat kuazi-Banah.

Një funksion quhet i hapur në qoftë se ai kalon bashkësitë e hapura në bashkësi të hapura.
Në qoftë se $T \in L(X,Y)$ atëherë operatori $\hat{T}: X/KerT \to Y$ përcaktohet nga barazimi $\hat{T}(x + KerT) = Tx$, ndërsa kuazi-norma në X/Z përcaktohet nga barazimi $\|x + Z\| = \inf\{\|x-y\|: y \in Z\}$.
Vërtet
Së pari shohim se operatori $\hat{T} = x + KerT = Tx$ është linear.
1. për çdo dy elemente x,y në X shkruajmë: $\hat{T}\left((x+y) + KerT\right) = T(x+y) = T(x) + T(y) = \hat{T}\left(x + KerT\right) + \hat{T}\left(y + KerT\right)$.
2. për çdo element x në X dhe për çdo skalar λ shkruajmë: $\hat{T}\left(\lambda x + \lambda KerT\right) = \hat{T}\left(\lambda x + KerT\right) = T(\lambda x) = \lambda T(x) = \lambda\hat{T}\left(x + KerT\right)$, kemi parasysh edhe kuptimin e bërthamës prandaj $\lambda KerT \in KerT$.

Tani le të tregojmë se vërtet barazimi $\|x + Z\| = \inf\{\|x - y\|: y \in Z\}$ përcakton një kuazi-normë në X/Z.
1.Është e qartë se $\|x+Z\|\geq 0$.
$\|x+Z\| = 0 \Leftrightarrow \inf\{\|x - y\|: y \in Z\} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists y\in Z$ i tillë që $0 \leq \|x-y\| < \varepsilon$. Kjo tregon se $x \in \bar{Z} = Z$ (meqë në ndërtimin e hapësirës faktore Z është një nënhapësirë e X). Atëherë $x = y\in Z$ domethënë $x + Z = 0 + Z$ (pra është zeroja e hapësirës faktore).
Anasjelltas nëse x është në klasën zero sipas modulit Z, atëherë $x\in Z$ dhe si rrjedhim $0\in \{\|x - y\|: y \in Z\}$, domethënë $\|x + Z\| = 0$.
2. $\|\lambda x + \lambda T\| = \inf\{\|\lambda x - \lambda y\|: y \in Z\} = |\lambda|\cdot \inf\{\|x - y\|: y \in Z\} = |\lambda|\cdot\|x + Z\|$
3. Le të jenë $y_1, y_2 \in Z$. Kanë vend mosbarzimet:
$\|(x_1 + x) - (y_1 + y_2)\| \leq K(\|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\|) \Rightarrow \|x_1 + x_2 + Z\| \leq K(\|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\|)$. Meqë inferiori është më i madhi kufi i poshtëm i një bashkësie kemi që $\|x_1 + x_2 + Z\| \leq K(\|x_1 + Z\| + \|x_2 + Z\|)$.▫

Le të jenë X,Y hapësira të plota të tilla që X është një nënbashkësi kudo e ngjeshur në Y, që do të thotë se çdo element i Y mund të përafrohet me elemente të X. Kjo nuk sjell që elementet e rruzullit $K_1\subset Y$ mund të përafrohen me elementet e një rruzulli $K_2\subset X$, pra që $K_1\subset \overline{K_2}$. ($\overline{K_2}$ është mbyllja e K_2 në topologjinë e Y) Domethënë, si në teoremën që vijon pohohet se, në qoftë se $K_1\subset \overline{K_2}$, atëherë X =Y.

Teoremë 1.5.1 ([18])
Le të jenë X,Y hapësira kuazi-Banah dhe $T\in L(X,Y)$ i tillë që mbyllja e T(B), ku $B = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$, përmban një fqinjësi të zeros në Y. Atëherë funksioni $T:X\rightarrow Y$ është i hapur dhe operatori $\hat{T}: X/KerT \rightarrow Y$ është i kthyeshëm.

Teoremë 1.5.2 ([18]) (mbi funksionet e hapur)
Le të jenë X dhe Y hapësira të plota dhe $T\in L(X,Y)$. Në qoftë se T është syrjektiv atëherë T është i hapur. Në veçanti, T është i kthyeshëm në qoftë se ai është bijektiv.

Një nënhapësirë E e një hapësire kuazi-Banah X ka vetinë e shtrirjes Hahn-Banah në qoftë se çdo $e^*\in E^*$ shtrihet në një $\lambda\in X^*$. Për më tepër, në qoftë se E ka vetinë e shtrirjes Hahn-Banah, atëherë λ mund të zgjidhet e tillë që $\|\lambda\|_X \leq C\|e^*\|_{E^*}$, ku C është e pavarur nga e^*.

Siç dihet nga rezultatet e Day, është e mundur të gjendet një nënhapësirë e mbyllur E e L_p ku $0 < p < 1$ dhe një funksion linear i vazhdueshëm $e^*\in E^*$ i cili nuk mund të shtrihet si funksion i tillë edhe në L_p^* ; në të vërtetë E mund të merret njëdimensionale [19].

Ka vend teorema që vijon:
Teoremë 1.5.3 ([19])
Një hapësirë kuazi-Banah E ka vetinë e shtrirjes Hahn-Banah në qoftë se dhe vetëm në qoftë se X është lokalisht konvekse (pra është një hapësirë Banah).

Si një rast të veçantë të teoremës së funksioneve të hapur tregojmë se ka vend kjo teoremë:
Teoremë 1.5.4 (mbi kuazi-normat ekuivalente)
Le të jenë $\|.\|_1$ dhe $\|.\|_2$ kuazi-norma mbi të njëjtën hapësirë vektoriale X dhe le të jetë i vërtetë mosbarazimi $\|x\|_1\leq\|x\|_2$ për çdo $x\in X$. Në qoftë se X është e plotë sipas të dy

kuazi-normave, atëherë gjendet një konstante $C < +\infty$ e tillë që $\|x\|_2 \le C\|x\|_1$ për të gjithë $x\in X$.

Vërtetim

Meqë është i vërtetë mosbarazimi $\|x\|_1\le\|x\|_2$ për çdo $x\in X$, atëherë çdo varg pikash (x_n) konvergjent në $(X,\|.\|_2)$ është konvergjent në po të njëjtën pikë edhe në $(X,\|.\|_1)$. Prandaj funksioni Id: $(X,\|.\|_2)\rightarrow(X,\|.\|_1)$ është operator linear i vazhdueshëm. Nga ana tjetër ky operator është bijektiv dhe si rrjedhim është i kthyeshëm, pra ka të anasjelltë të vazhdueshëm.

Supozojmë se për çdo konstante $C < +\infty$ gjendet një $x_0\in X$ i tillë që $\|x_0\|_2 > C\|x_0\|_1$. Në këto kushte operatori Id: $(X,\|.\|_1)\rightarrow(X,\|.\|_2)$ është i pakufizuar, pra edhe jo i vazhdueshëm. Ky absurditet tregon se supozimi është i gabuar dhe i jep fund vërtetimit.▫

Principi i kufizueshmërisë uniforme

Po paraqesim një vërtetim që na duket me interes të teoremës së njohur Banach-Steinhauss në rastin e hapësirave kuazi-Banah, të cilën për analogji po e quajmë me të njëjtin emër.

Teoremë 1.5.5 (Banach-Steinhauss)

Le të jenë X dhe Y hapësira kuazi-Banah dhe $\{A_s\}\subset L(X,Y)$ një familje operatorësh. Në qoftë se $\sup_S\|A_s x\| < +\infty$ për të gjithë $x\in X$ atëherë $\sup_S\|A_s\| < +\infty$. Në veçanti limiti i një vargu kudo konvergjent operatorësh të kufizuar është operator i kufizuar.

Vërtetim

Le të jetë $\|x\|_2 = \|x\|_X + \sup_S\|A_s x\|_Y$ (për çdo $x\in X$). Tregohet lehtë se funksioni $\|.\|_2$ është një kuazi-normë në X. Gjithashtu meqë hapësirat X dhe Y janë kuazi-Banah dhe $\{A_s\}\subset L(X,Y)$, është e menjëhershme që edhe hapësira $(X,\|.\|_2)$ është kuazi-Banah.

Vërejmë se $\|x\|_X \le \|x\|_2$ dhe nga teorema 1.5.4 gjendet një konstante $C <+\infty$ e tillë që $\|x\|_2 \le C\|x\|_X$ për të gjithë $x\in X$.

Nga ana tjetër, dimë se për çdo $s\in S$, $\|A_s\| = \sup\{\|A_s(x)\|: \|x\|_X \le 1\} \le \sup\{\|x\|_2: \|x\|_X \le 1\}\le C$.

Prandaj edhe $\sup_S\|A_s\|\le C< +\infty$.

Së fundi të tregojmë se: limiti i një vargu kudo konvergjent operatorësh të kufizuar është operator i kufizuar.

Le të jetë $(A_n) \subset L(X,Y)$ një varg operatorësh të kufizuar i cili konvergjon tek operatori $A\in L(X,Y)$, pra $\forall\varepsilon > 0$, $\exists p\in N$ e tillë që $\forall n\in N$ dhe $n>p$ është i vërtetë mosbarazimi $\|A_n - A\|<\varepsilon$.

Fiksojmë një $n\in N$, ku $n > p$ dhe konsiderojmë $x\in X$ me $\|x\|_X \le 1$. Mund të shkruajmë që:

$\|Ax\|_Y \le K(\|A_n x - Ax\|_Y + \|A_n x\|_Y) \le K(\|A_n - A\| + \|A_n\|) < K\varepsilon + K\|A_n\| < KM$ ku $M = 1+\|A_n\|$. Si rrjedhim $\|A\|< +\infty$.▫

Rrjedhim 1.5.6

Le të jetë B: $X\times Y\rightarrow Z$ operator bilinear ndashmërisht i vazhdueshëm, ku X,Y,Z janë hapësira kuazi-Banah. Atëherë gjendet një konstante $C < +\infty$ e tillë që $\|B(x,y)\|_Z \le C\|x\|_X\cdot\|y\|_Y$ për të gjithë $x\in X$ dhe $y\in Y$.

‘‘Ndashmërisht i vazhdueshëm’’ do të thotë që çdo operator i formës $x\rightarrow B(x,y)$ (për $x\in X$) ose $g\rightarrow B(x,y)$ (për $y\in Y$) është i vazhdueshëm.

Baza e Shauder-it

Një varg $\{e_n\}_{n\in N}$ në një hapësirë kuazi-Banah X quhet bazë e Shauder-it e X në qoftë se, për çdo x∈X gjendet një varg i vetëm skalarësh $\{\lambda_n(x)\}$ i tillë që seria x = $\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n(x)\, e_n$ konvergjon në topologjinë e X.

Pohim 1.5.7 ([18])

Në qoftë se $\{e_n\}_{n\in N}$ është një bazë e Shauder-it e X, atëherë format lineare λ_n janë të vazhdueshme dhe operatorët linearë S_n:X→X të përcaktuar nga barazimi $S_n(x)$ = $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x)\, e_k$ janë uniformisht të kufizuar.

Teoremë 1.5.8 (e grafit të mbyllur)

Le të jetë T:X→Y një operator linear, ku X dhe Y janë hapësira të plota. Atëherë T është i vazhdueshëm në qoftë se kënaq kushtin e mëposhtëm:

Për çdo varg $\{x_n\}\subset$ X të tillë që vargu x_n konvergjon në 0∈X dhe vargu $\{Tx_n\}$ konvergjon në ndonjë y∈Y kemi që y = 0.

Vërtetim

Rrjedh nga hipoteza që X është e plotë edhe sipas kuazi-normës $\|x\|_2 = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$. Duke aplikuar teoremën 1.5.4 në mënyrë të ngjashme si në teoremën e Banach-Steinhauss tregohet se operatori T është i kufizuar, pra i vazhdueshëm.▫

1.6 F-hapësirat

Teorema e grafit të mbyllur mbetet e vlefshme në një klasë më të gjerë të hapësirave, të ashtuquajtura F-hapësira. Me termin F-normë në një hapësirë vektoriale X kuptojmë një funksion N:X→[0,+∞) që kënaq kushtet:

a) N(x) = 0⇒x= 0 b) N(x+y) ≤ N(x) +N(y) c) N(λx) ≤ N(x) për |λ| ≤ 1 dhe $\lim_{\lambda\to 0} N(\lambda x) = 0$ (*)

Barazimi d(x,y) = N(x-y) përcakton një metrikë në X dhe topologjia e induktuar nga kjo metrikë është vektoriale, që nënkupton në veçanti që shumëzimi me skalar është i vazhdueshëm mbi X×X. Në rastin kur metrika d është e plotë, hapësira X quhet F-hapësirë.

Vërejmë se:

•Një hapësirë p-Banah mund të trajtohet si F-hapësirë duke futur F-normën N(x) = $\|x\|_X^p$.

Vërtet

Së pari të tregojmë se N(x) e përcaktuar më lart është një F-normë.

a) N(x) = 0⇒$\|x\|_X^p = 0$⇒$\|x\|_X = 0$⇒ x = 0.

b) N(x+y) = $\|x+y\|_X^p \le \|x\|_X^p + \|y\|_X^p$ = N(x) +N(y).

c) N(λx) = $\|\lambda x\|_X^p = |\lambda|^p\|x\|_X^p \le \|x\|_X^p$ = N(x) për |λ| ≤ 1. Nga ana tjetër kemi, 0 ≤ N(λx) = $|\lambda|^p\|x\|_X^p$→0 për λ→0. Pra $\lim_{\lambda\to 0} N(\lambda x) = 0$.

Të tregojmë tani që (X,d) është e plotë.

Le të jetë $\{x\}$ një varg Koshi në X, pra $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ për n,m > p.

Meqë $d(x_n,x_m) = N(x_n - x_m) = \|x_n - x_m\|_X^p < \varepsilon$ për n,m > p, pra $\|x_n - x_m\| < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$ për n,m > p. Kështu që vargu $\{x_n\}$ është varg Koshi në X edhe sipas p-normës $\|.\|_X$. Në këto kushte, meqë $(X,\|.\|_X)$ është hapësirë p-Banah, vargu $\{x_n\}$ konvergjon në x ∈X sipas $\|.\|_X$.

Si rrjedhim $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ për n,m > p $\Rightarrow$ d(x_n,x) = $\|x_n - x\|_X^p < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$ që tregon se vargu $\{x_n\}$ konvergjon në x edhe sipas metrikës d.▫

Në klasën e F-hapësirave, qëndron teorema 1.5.2 e funksionit të hapur (me të njëjtin formulim).

Teorema 1.5.1 tani formulohet si vijon:
Le të jenë X,Y F-hapësira dhe T∈L(X,Y). Në qoftë se për çdo fqinjësi U të 0∈X bashkësia $\overline{T(U)}$ përmban një fqinjësi të 0∈Y, atëherë T(X) = Y dhe T është i hapur.
Vërtetimi është identik me vërtetimin e teoremës 1.5.1 duke bërë ndyshimet përkatëse të shënimeve. Vetia (c) e F-normës përdoret vetëm për të treguar se T(X) = Y.

Si një rast të veçantë të teoremës së funksionit të hapur, kemi përgjithësimin që vijon të teoremës 1.5.4, nga e cila fitohet menjëherë teorema e grafit të mbyllur.

Teoremë 1.6.1
Le të jenë N_1 dhe N_2 F-norma mbi një hapësirë vektoriale X, dhe le të ketë vend mosbarazimi $N_1(x) \leq N_2(x)$ për të gjithë x ∈X. Në qoftë se X është e plotë sipas të dy F-normave, atëherë çdo varg $\{x_n\} \subset$ X kënaq kushtin: $N_1(x_n) \to 0 \Rightarrow N_2(x_n) \to 0$.

KAPITULLI 2
Disa aspekte integrimi për funksionet me vlera në hapësirat kuazi-Banah

2.1 Integrali i Bochner-it në hapësirat e kuazi-normuara

Hyrje

Kuptimi i integralit të Bochner-it hyri në literaturën matematike nga matematikani amerikan me origjinë austro-hungareze Salomon Bochner. Ai ndërtoi kuptimin e këtij integrali si një përgjithësim i integralit të Lebegut duke konsideruar funksionet me vlera në hapësirat Banah. Qëllimi ynë është të shtrijmë këtë integral në rastin e funksioneve me vlera në hapësirat kuazi të normuara dhe të shohim disa veti të tij në këtë rast.

Le të nisim këtë trajtim duke prezantuar fillimisht një biografi të shkurtër të themeluesit të kësaj teorie.

Salomon Bochner lindi në 20 Gusht 1899 në një familje orthodhokse hebraike në Podgórze, atëherë në Austro-Hungari sot në Poloni. Familja e tij duke iu trembur një invazioni rus gjatë luftës së parë botërore u largua nga Podgórze dhe u vendos në Berlin, duke marrë me vete avantazhet dhe disavantazhet e kësaj lëvizje. Disa muaj më pas Salomon kaloi provimin pranues në një nga gjimnazet më cilësorë të Berlinit, gjë që i dha atij mundësinë të vazhdonte studimet. Pasi mbaroi gjimnazin, Bochner-i u pranua në Universitetin e Belinit në vitin 1918 ku në një periudhë 3 vjeçare arriti të kryente studimet dhe të mbronte doktoraturën me temë ‘‘Sistemet ortogonalë dhe funksionet analitikë kompleksë’’.Gjatë viteve 1920 si shumë familje në Gjermani edhe familja e Bochner-it po kalonte vështirësi ekonomike që e detyruan atë të linte pak mënjanë matematikën për dy tre vite dhe të ndihmonte familjen. Në vitin 1923 Harald Bohr botoi idetë e tij mbi funksionet pothuajse periodike dhe Bochner duke i lexuar arriti të gjejë disa teknika origjinale të cilat ia paraqiti edhe Bohr-it. Ky i fundit i impresionuar nga kjo e ftoi Bochner-in në Kopenhagen. Në vitin 1924 në sajë të një donacioni të bordit të një shoqërie ndërkombëtare të arsimit ai udhëtoi për në Kopenhagen për të punuar me Bohr-in mbi funksionet pothuajse periodikë. Kjo shoqëri i mundësoi Bochner-it gjithashtu të udhëtojë në Angli ku punoi me Hardy në Oxford dhe Littleëood në Cambridge. Ai ka dhënë leksione në Universitetin e Mynihut në vitet 1924-1933, ku në vitin 1927 paraqiti një tezë shumë interesante mbi funksionet thuajse periodikë. Bochner-i arriti rrezultate të mëdha në analizën harmonike. Puna e tij në Mynih arriti kulmin me botimin në vitin 1932 të ‘‘Vorlesungen über Fouriersche Integrale’’ një libër që influencoi shumë në zhvillimin e matematikës klasike. Në mesin e shumë të tjerave ky libër përmban një teoremë mbi karakterizimin e transformimit Fourier-Stieltjes të masave pozitive si funksione pozitivisht të përcaktuar.
Megjithë punën e madhe që bënte ai përballej me veshtirësi të mëdha financiare, pasi puna e tij nuk paguhej siç duhej në atë kohë. Departamenti i Matematikës në Universitetin e Mynihut, duke e kuptuar gjenialitetin e Bochner-it dëshironte t’a emëronte atë si asistent prifesor, por senati i universitetit dhe qeveria lokale shfaqën kundërshtime. Ai ishte, sigurisht një i huaj, fillimisht austriak i cili kishte fituar shtetësinë polake si pasojë e traktateve të paqes në fund të luftës së Parë Botërore. Perron-i që mbante postin e shefit të departamentit të Matematikës së Universitetit të Mynihut argumentoi se reputacioni i Universitetit ishte dëmtuar nga ky vendim politik dhe aspak shkencor i senatit. Me ndihmën e Caratheodory-t dhe një profesori tjetër në

Mynih, Perron-i u përpoq të merrte një ftesë për Bochner-in që të shkonte në Harvard, megjithatë këto përpjekje dështuan. Arritjet e përmendura më sipër konsiderohen si puna më e rëndësishme e Bochner-it në Mynih, por megjithatë ai ka bërë punime interesante të temave të ndryshme ndërsa ishte atje. Në vitin 1932 ai publikoi një përgjithësim të integralit të Lebegut, i cili tanimë njihet si integrali i Bochner-it. Gjerësia e punës së tij është ilustruar më së miri nga fakti se ai ndërrmori kërkime edhe në fushën e fizikës dhe botoi në këtë kohë edhe disa artikuj mbi rrezet x në Kristalografi. Me ardhjen në pushtet të Hitlerit, filluan probleme edhe më të mëdha për të. Në 1 Prill të vitit 1933 të ashtuquajtur si 'Dita e Bojkotit', të gjitha dyqabet e çifutëve u bojkotuan dhe lektorët hebre nuk u lejuan të hyjnë në universitetet e tyre. Për më tepër ligji i shërbimit civil i miratuar në këtë kohë i përjashtonte nga puna të gjithë mësimdhënësit hebre si në universitete dhe kudo tjetër. Meqë qëndrimi i tij në Mynih tani ishte i pamundur, Bochner-i pranoi një pozicion në Princeton në vitin 1933. Ai u emërua fillimisht si ndihmës në Princeton, por pas një viti mori titullin asistent profesor.Çdo verë Bochner-i bënte një udhëtim në Evropë për të vizituar familjen e tij e cila gjithjë e më shumë ishte në rrezik nga politika naziste anti hebre. Kështu që ai më në fund i bindi ata të lënë Gjermaninë dhe të shkojnë në Angli. Në një nga udhëtimet e tij verore në Evropë, Bochner-i u takua me Naomi Weinberg që ishte e bija e një botuesi të një gazete hebrenjsh në Nju Jork. Naomi u martua me Von Neumman-in që ishte shoku më i mirë i tij. Kështu që me ndihmën e tyre Bochner-i u natyralizua si qytetar amerikan në vitin 1938 dhe në vitin në vijim u promovua si profesor i asocuar dhe më pas si profesor në vitin 1946. Ai u emërua 'Henry Burchard Fine' Profesor në vitin 1959 dhe e mbajti këtë post prestigjioz deri në vitin 1968. Përsëri Bochner-i paraqiste interesa mjaft të gjera matematike, duke punuar edhe në fushën e probabilitetit. Punimi i tij kryesor në këtë fushë është Analiza Harmonike dhe Teoria e Probabilitetit në vitin 1955. Ai publikoi gjithashtu artikuj mbi gama funksionet, zeta funksionet dhe ekuacionet me diferencial të pjesshëm. Në vitet 1960 Bochner-i punoi në historinë dhe psikologjinë e matematikës, ku me interes është punimi ' Roli i Matematikës në ngritjen e shkencës' në vitin 1966. Megjithëse ishte 70 vjeç kur doli në pension nga Princeton, ai u emërua si Edgar Odell Lovett profesor i matematikës në Universitetin e Rajs-it dhe vazhdoi t'a mbajë këtë post deri në vdekjen e tij në vitin 1982.

Përcaktimi i integralit të Bochner-it në hapësirat kuazi të normuara

Shënojmë (X, Σ, μ) një hapësirë të matshme të plotë me masë të fundme dhe Y një hapësirë kuazi-Banah mbi fushën K të numrave realë ose kompleksë.

Përkufizim 2.1.1[16]

Një funksion f:X→Y quhet Σ i thjeshtë në qoftë se gjendet një copëtim i fundëm $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ i X-it me n elemente të Σ-ës dhe n vektorë të ndryshëm $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ në Y të tillë që $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k}(x) y_k$ për çdo x∈X.

Shënojmë me $\mathcal{E}$ bashkësinë e gjithë funksioneve të thjeshtë f:X→Y. Tregohet lehtë se kjo bashkësi formon një hapësirë vektoriale në lidhje me shumën e funksioneve dhe prodhimin e tyre me skalar.

Ndërtojmë funksionin $\|.\|_{\mathcal{E}}: \mathcal{E} \to R^+$ të tillë që për çdo f∈ $\mathcal{E}$ kemi $\|f\|_{\mathcal{E}} = \int \|f\| \, d\mu$, ku me $\|f\|$ është shënuar kuazi-norma e funksionit f në Y domethënë ndonjëra nga vlerat $\|y_i\|$ për i = 1,...,n, kurse $\int \|f\| \, d\mu$ është integral Lebegu. Ky funksion në rastin kur Y është hapësirë e normuar paraqet një semi-normë sepse nuk është e vërtetë se $\int \|f\| \, d\mu = 0$ atëherë f = 0. Kështu që edhe në rastin tonë, duke patur parasysh vetitë e integralit të Legegut, funksioni i mësipërm nuk paraqet një kuazi-normë. (Madje në ngjashmëri me emërtimin e semi-normës, meqë cënohet i njëjti kusht, mund të themi se ky funksion paraqet një ‘‘semi-kuazi-normë’’). Për të siguruar që $(\mathcal{E}, \|.\|_{\mathcal{E}})$ të jetë hapësirë e kuazi-normuar konsiderojmë klasët e ekuivalencës sipas $\|.\|_{\mathcal{E}}$, por për thjeshtësi të shkruari nuk do të ndryshojmë shënimin.

Për çdo f$\in\mathcal{E}$, meqë bashkësitë E_k për k = 1,...,n janë jo prerëse, dimë të gjejmë integralin e Bochnerit të funksionit të thjeshtë f, i cili paraqitet nga barazimi $\int f d\mu = \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(E_k)$. Për më tepër përkufizojmë për çdo E$\in\Sigma$ integralin e Bochner-it të f në E, të cilin e shënojmë $\int_E f d\mu$ ose $\int_E f(x) d\mu(x)$, si vektorin $y_E \in Y$ të përcaktuar nga barazimi $y_E = \sum_{k=1}^{n} \mu(E \cap E_k) y_k$.

Shënim 2.1.2

Njëlloj si në rastin e integralit të Lebegut të funksionit të shkallëzuar tregohet se integrali i Bochner-it të funksionit të thjeshtë nuk varet nga paraqitja standarte e tij. Për më tepër në ngjashmëri me linearitetin e integralit të Lebegut të funksionit të shkallëzuar, tregohet edhe lineariteti i integralit të Bochner-it për funksionet e thjeshtë.

Përkufizim 2.1.3[16]

Një funksion f:X→Y quhet μ-i matshëm ose fortësisht i matshëm në qoftë se gjendet një varg funksionesh të thjeshtë $f_n : X \to Y$ i tillë që $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ p.k, pra gjendet një bashkësi E$\in\Sigma$ me masë μ(E) = 0 e tillë që $\lim_{n\to+\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$ për çdo x$\in$X \ E.

Përkufizim 2.1.4[16]

Çdo funksion f:X→Y μ-i matshëm quhet i integrueshëm sipas Bochner-it në Y, në qoftë se gjendet një varg funksionesh të thjeshtë $f_n : X \to Y$ i tillë që $\lim_{n\to+\infty} \int_X \|f_n(x) - f(x)\| d\mu(x) = 0$.

Në këtë rast integrali i Bochner-it të f në E, përcaktohet nga barazimi $\int_E f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu$.

Kemi vënë re se:

Pohim 2.1.5 [9]

Për çdo funksion f:X→Y të integrueshëm sipas Bochner-it, integrali nuk varet nga zgjedhja e vargut të funksioneve të thjeshtë f_n. (Pra integrali i Bochner-it është i mirëpërcaktuar)

Vërtetim

Le të jenë $f_n : X \to Y$ dhe $g_n : X \to Y$ dy vargje funksionesh të thjeshtë të tillë që kanë vend barazimet $\lim_{n\to+\infty} \int_X \|f_n(x) - f(x)\| d\mu(x) = 0 = \int_X \|g_n(x) - f(x)\| d\mu(x)$.

Nga përkufizimi i integralit të Bochner-it të funksionit të thjeshtë duket qartë se në rastin kur funksioni i thjeshtë është me vlera reale ky integral është i njëjtë me integralin e Lebegut. Kështu që integralet $\int_X \|f_n(x) - f(x)\| d\mu(x)$ dhe $\int_X \|g_n(x) - f(x)\| d\mu(x)$ janë integrale Lebegu dhe funksionet nën këto integrale janë jonegativë, prandaj kanë vend barazimet:

$\lim_{n\to+\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$ p.k dhe $\lim_{n\to+\infty} \|g_n(x) - f(x)\| = 0$ p.k domethënë $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ p.k dhe $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = f(x)$ p.k.

Në këto kushte ka vend barazimi $\lim_{n\to+\infty}\|f_n(x)-g_n(x)\|=0$ p.k në X.
Nga ana tjetër diferenca e dy funksioneve të thjeshtë është funksion i thjeshtë (tregohet njëlloj si në rastin e funksioneve të thjeshtë me vlera reale të trajtuar në teorinë e integralit të Lebegut), dhe si rrjedhim për funksionet

$$f_n(x)=\sum_{j=1}^{k(n)}\chi_{E_j}(x)x_j \text{ dhe } g_n(x)=\sum_{i=1}^{l(n)}\chi_{E_i}(x)x_i$$

kemi që

$$f_n(x)-g_n(x)=\sum_{p=1}^{r(n)}\chi_{E_p}(x)z_p$$

ku $z_p=x_i, x_j$ ose x_j-x_i dhe $\|z_p\|=\|f_n(x)-g_n(x)\|\to 0$ kur n$\to +\infty$ p.k në X.
Prandaj kanë vend relacionet që vijojnë:

$$\left\|\int_E f_n d\mu-\int_E g_n d\mu\right\|=\left\|\sum_{p=1}^{r(n)}\mu(E\cap E_p)z_p\right\|$$
$$\leq K\left[\left\|\sum_{p=2}^{r(n)}\mu(E\cap E_p)z_p\right\|+\|\mu(E\cap E_1)z_1\|\right]$$
$$\leq K\left\|\sum_{p=2}^{r(n)}\mu(E\cap E_p)z_p\right\|+K\mu(E)\|z_1\|\leq$$
$$K^2\left\|\sum_{p=3}^{r(n)}\mu(E\cap E_p)z_p\right\|+K^2\mu(E)\|z_2\|+K\mu(E)\|z_1\|\leq\cdots\leq$$
$$\mu(E)\big(K\|z_1\|+K^2\|z_2\|+\cdots+K^{r(n)}\|z_{r(n)}\|\big)\leq$$
$$\mu(E)K^{r(n)}\sum_{p=1}^{r(n)}\|z_p\|=\mu(E)\sum_{p=1}^{r(n)}K^{r(n)}\|z_p\|.$$

Meqë $\lim_{p\to+\infty}\|z_p\|=0$ atëherë mund të zgjedhim p të tilla që $\|z_p\|<\frac{\varepsilon}{K^{r(n)}2^p}$ dhe si rrjedhim ka vend barazimi $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_E f_n d\mu=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_E g_n d\mu$, pra përkufizimi është korrekt. ▫

Pohim 2.1.6
Në qoftë se f,g:X→Y janë funksione të integrueshëm sipas Bochner-it dhe a,b∈R atëherë funksioni af+bg është Bochner i integrueshëm dhe ka vend barazimi:

$$\int_X (\mathrm{af(x)+bg(x))d\mu}=\mathrm{a}\int_X \mathrm{f(x)d\mu}+\mathrm{b}\int_X \mathrm{g(x)d\mu}$$

Vërtetim
Le të jetë f :X→Y një funksion i thjeshtë, pra $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\chi_{E_k}(x)y_k$ për çdo x∈X, ku $(E_k)_{1\leq k\leq n}$ janë bashkësi të matshme dy nga dy jo prerëse. Për çdo F∈Y' kemi që F është një formë lineare e vazhdueshme në Y dhe si rrjedhim kanë vend barazimet: $F\left(\int_X f(x)d\mu\right)=F(\sum_{k=1}^{n}(x)y_k\,\mu(E_k))=\sum_{k=1}^{n}F(y_k)\,\mu(E_k)=\int_X F(f(x))d\mu.$

Kështu që, në qoftë se $f_n(x)$ është një varg funksionesh të thjeshtë i tillë që konvergjon tek funksioni f :X→Y atëherë nga vazhdueshmëria e F dhe përkufizimi i integralit të Bochner-it kemi:

$$F\left(\int_X f(x)d\mu\right) = F\left(\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n(x)d\mu\right) = \lim_{n\to+\infty} F\left(\int_X f_n(x)d\mu\right) = \lim_{n\to+\infty}\int_X F(f_n(x))d\mu.$$

Meqë vargu $f_n(x) \to f(x)$ për çdo x∈X atëherë gjendet një $n_0 \in N$ e tillë që, për çdo $n > n_0$ ka vend mosbarazimi $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$. Kështu që nga vazhdueshmëria e funksionit F kemi:

$$\big||\mathrm{F}(\mathrm{f_n}(\mathrm{x}))| - |\mathrm{F}(\mathrm{f}(\mathrm{x}))|\big| \le |\mathrm{F}(\mathrm{f_n}(\mathrm{x})) - \mathrm{F}(\mathrm{f}(\mathrm{x}))| = |\mathrm{F}(\mathrm{f_n}(\mathrm{x}) - \mathrm{f}(\mathrm{x}))| < \varepsilon$$

Pra kemi treguar se $\mathrm{F}(\mathrm{f_n}(\mathrm{x})) \to \mathrm{F}(\mathrm{f}(\mathrm{x}))$ për $n \to +\infty$.
Vargu i funksioneve $\mathrm{F}(\mathrm{f_n}(\mathrm{x})) = \sum_{k=1}^{l(n)} \chi_{E_k}(x)F(y_k)$ është një varg funksionesh të thjeshtë me vlera reale.
Për çdo a,b∈R dhe për çdo dy funksione $f, g: X \to Y$ të integrueshëm sipas Bochner-it janë të vërteta barazimet:

$$\begin{aligned} F\left(\int_X (af(x) + bg(x))d\mu\right) &= \lim_{n\to+\infty}\int_X \left(a\mathrm{F}(\mathrm{f_n}(\mathrm{x})) + \mathrm{bF}(\mathrm{g_n}(\mathrm{x}))\right)d\mu \\ &= a\lim_{n\to+\infty}\int_X \mathrm{F}(\mathrm{f_n}(\mathrm{x}))d\mu + b\lim_{n\to+\infty}\int_X \mathrm{F}(\mathrm{g_n}(\mathrm{x}))d\mu \\ &= aF\left(\int_X f(x)d\mu\right) + bF\left(\int_X g(x)d\mu\right) \\ &= F\left(a\int_X f(x)d\mu + b\int_X g(x)d\mu\right). \end{aligned}$$

Meqë F është linear atëherë F(0) = 0 dhe si rrjedhim $\mathrm{F}(\mathrm{x_1}) = \mathrm{F}(\mathrm{x_2}) \Leftrightarrow \mathrm{x_1} = \mathrm{x_2}$. Kështu që ka vend barazimi

$$\int_X (\mathrm{af}(\mathrm{x}) + \mathrm{bg}(\mathrm{x}))\mathrm{d}\mu = \mathrm{a}\int_X \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{d}\mu + \mathrm{b}\int_X \mathrm{g}(\mathrm{x})\mathrm{d}\mu$$

Pra integrali i Bochner-it është linear. ▫

Në vijim po studiojmë hapësirën e funksioneve të integrueshëm sipas Bochner-it.
Nga përkufizimi i integralit të Bochner-it për funksionin f gjendet një funksion i thjeshtë g i tillë që $\int_X \|f(x) - g(x)\|d\mu < 1$. Meqë kanë vend mosbarazimet $\|f(x)\| \le K\|f(x) - g(x)\| + K\|g(x)\|$ dhe $\|g(x)\| = \|z_p\| < +\infty$ atëherë $\int_X \|f(x)\|d\mu < K + K\int_X \|g(x)\|d\mu < +\infty$ [9].

Shënojmë me $\mathcal{B} = \{\text{f: X}\rightarrow\text{Y: të integrueshëm sipas Bochner} - \text{it}\}$ dhe ndërtojmë funksionin $\|.\|_1 : \mathcal{B} \to R^+$ të tillë që, për çdo $f \in \mathcal{B}$ përcaktojmë $\|f\|_1 = \int_X \|f(x)\| d\mu$.
Vërejmë se funksioni $\|.\|_1 : \mathcal{B} \to R^+$ plotëson kushtet që vijojnë:
1.Në qoftë se $\|f\|_1 = 0$ atëherë f = 0 p.k sipas μ mbi X.
Le të jetë $f \in \mathcal{B}$ një funksion i tillë që $\|f\|_1 = 0$. Nga përkufizimi 2.1.4, gjendet një varg funksionesh të thjeshtë $f_n : X \to Y$ i tillë që $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X \|f_n(x) - f(x)\| d\mu(x) = 0$.
Kështu që, për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet p∈N e tillë që, për çdo n > p ka vend mosbarazimi $\int_X \|f_n(x) - f(x)\| d\mu(x) < \varepsilon$.
Nga ana tjetër,nga mosbarazimet:

$$\|f_n(x)\| \leq K\|f_n(x) - f(x)\| + K\|f(x)\|$$
dhe
$$\|f(x)\| \leq K\|f_n(x) - f(x)\| + K\|f_n(x)\|$$

arrijmë në përfundimin:

$$-K\|f_n(x) - f(x)\| - K\|f_n(x)\| \leq \|f_n(x)\| - \|f(x)\| \leq K\|f_n(x) - f(x)\| + K\|f(x)\|$$

prandaj

$$\left| \int_X \|f_n(x)\| d\mu(x) - \int_X \|f(x)\| d\mu(x) \right| \leq K\varepsilon + K \int_X \|f(x)\| d\mu(x).$$

Mosbarazimi i fundit na lejon të shkruajmë që, $\lim_{n\to+\infty} \int_X \|f_n(x)\| d\mu(x) = 0$.
Kujtojmë se integralet $\int_X \|f_n(x)\| d\mu(x)$ janë integrale Lebegu dhe meqë funksionet $\|f_n(x)\|$ janë jonegativë, pra të sipërm, në hapësirën me masë të fundme X garantohet që vargu i funksioneve $\|f_n(x)\|$ konvergjon tek funksioni zero dhe për më tepër, nga përkufizimi 2.1.4 shkruajmë: $\int_X 0 d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x) d\mu(x)$. Kështu që nga përkufizimi 2.1.3 kemi që f = 0 p.k sipas μ mbi X.
Anasjelltas, në qoftë se f = 0 p.k sipas μ mbi X atëherë $\|f(x)\| = 0$ p.k sipas μ mbi X. Kështu që, nga një veti e integralit të Lebegut kemi që $\|f\|_1 = \int_X \|f(x)\| d\mu = \int_X 0 d\mu = 0$.
Për më tepër janë evidente vetitë e mëposhtëme:
2. ∀f∈ $\mathcal{B}$ dhe ∀λ∈X, $\|\lambda f(x)\|_1 = |\lambda| \|f(x)\|$
3.∀f,g∈ $\mathcal{B}$, $\|f(x) + g(x)\|_1 \leq K(\|f(x)\|_1 + \|g(x)\|_1)$ ku K është moduli i konkavitetit të kuazi normës në Y.
Për të siguruar që $(\mathcal{B}, \|.\|_1)$ të jetë hapësirë e kuazi-normuar konsiderojmë klasët e ekuivalencës sipas $\|.\|_1$, por për thjeshtësi të shkruari nuk do të ndryshojmë shënimin. Tregohet lehtë se bashkësia e gjithë klasëve të funksioneve μ-të matshëm f : X→Y të cilët janë të integrueshëm sipas Bochner-it është një hapësirë lineare mbi fushën K nën veprimet e shumës së klasëve dhe prodhimit të një klase të funksioneve me një skalar, dhe ajo shënohet me $L^1(\mu, Y)$.
Si zakonisht nuk do të dallojmë midis një funksioni dhe klasës që ai përfaqëson.

Në anën tjetër, përkufizojmë hapësirën $L^P(\mu, Y)$ për 1≤ p < +∞ si hapësirën lineare mbi fushën K të klasëve të funksioneve μ-të matshëm f : X→Y të tillë që $\int_X \|f(x)\|^p \, d\mu < +\infty$. Vërejmë se barazimi $\|f\|_p = \left(\int_X \|f(x)\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ përcakton një kuazi-normë në të. Pra ka vend pohimi:

Pohim 2.1.7 [9]
Hapësira $L^P(\mu, Y)$ për 1≤ p < +∞ është hapësirë e kuazi-normuar.

Vërtetim
Në qoftë se $\|f\|_p = 0$ atëherë gjendet një varg funksionesh të thjeshtë $f_n: X \to Y$ i tillë që $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_X \|f_n(x) - f(x)\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0$ dhe si rrjedhim ka vend barazimi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_X \|f_n(x) - f(x)\|^p d\mu\right) = 0$. Meqë limiti kryhet sipas variablit n rrjedh se edhe $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_X \|f_n(x) - f(x)\| d\mu = 0$. Kështu që njëlloj si në rastin p = 1 më lart tregohet se $\|f\|_p = 0$ atëherë dhe vetëm atëherë kur f = 0 p.k sipas μ mbi X.
Kushti i dytë i kuazi-normës është i menjëhershëm.
Nga ana tjetër kanë vend relacionet:

$$\int_X \|f(x) + g(x)\|^p d\mu = \int_X \|f(x) + g(x)\|^{p-1}\|f(x) + g(x)\| d\mu \leq$$
$$K\left[\int_X \|f(x) + g(x)\|^{p-1}\|f(x)\| d\mu + \int_X \|f(x) + g(x)\|^{p-1}\|g(x)\| d\mu\right].$$

Duke përdorur mosbarazimin Holder-Riesz në të dy integralet e anës së djathtë kemi:

$$\int_X \|f(x) + g(x)\|^p d\mu \leq$$
$$K\left[\left(\int_X \|f(x)\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X \|g(x)\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\int_X \|f(x) + g(x)\|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} =$$
$$K\left[\left(\int_X \|f(x)\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X \|g(x)\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\int_X \|f(x) + g(x)\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Kështu nisur nga barazimi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dhe mosbarazimi më lart arrijmë në përfundimin:

$$\left(\int_X \|f(x) + g(x)\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq K\left[\left(\int_X \|f(x)\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X \|g(x)\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

Pra kemi treguar se: Për çdo dy funksione f,g në hapësirën $L^P(\mu, Y)$ është i vërtetë mosbarazimi
$\|f + g\|_p \leq K(\|f\|_p + \|g\|_p)$.
Për të siguruar që $L^P(\mu, Y)$ të jetë hapësirë e kuazi-normuar konsiderojmë klasët e ekuivalencës sipas $\|.\|_p$, por për thjeshtësi të shkruari nuk do të ndryshojmë shënimin. ▫

Së fundi, përcaktojmë hapësirën $L^{\infty}(\mu, Y)$ të klasëve të funksioneve esencialisht të kufizuar, μ-të matshëm me vlera në Y dhe me kuazi-normë supremum esencial $\|f\|_{\infty} = esssup\{\|f(x)\|: x \in X\} = inf\{a > 0: \mu\{x \in X: \|f(x)\| > a\} = 0\}$ (vërtetimi është i menjëhershëm nga përcaktimi i normës supremum esencial dhe vetitë e kuazi-normës).
Vërehet gjithashtu se hapësira $L^{p}(\mu, Y)$ ku 0 < p < 1 e klasëve të funksioneve μ-të matshëm f:X→Y të tillë që $\int_X \|f(x)\|^p \, d\mu < +\infty$, është hapësirë lineare mbi fushën K.

Gjithashtu barazimi $\|f\|_p = \left(\int_X \|f(x)\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ përcakton një kuazi-normë në hapësirën $L^{p}(\mu, Y)$ ku 0<p<1, kjo sepse hapësira e Lebegut $L^{p}(\mu)$ është e tillë dhe për më tepër, për funksionet f,g∈$L^{p}(\mu)$ ka vend mosbarazimi $\|f+g\|^p \leq \|f\|^p + \|g\|^p$ i cili njëlloj si mosbarazimi $|f+g|^p \leq |f|^p + |g|^p$ garanton se barazimi $\|f\|_p = \left(\int_X \|f(x)\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ përcakton një kuazi-normë [9].

Nga sa më sipër vërejmë se ka vend pohimi që vijon:
Pohim 2.1.8
Funksioni $F: L^{p}(\mu, Y) \to Y$ ku p > 0, i tillë që çdo funskioni $f \in L^{p}(\mu, Y)$ i vë në korrespondencë integralin e Bochner-it të tij, është një operator linear.

Vërejmë gjithashtu se ka vend pohimi i mëposhtëm:
Pohim 2.1.9
Në qoftë se $\mathrm{f} \in \mathrm{L}^1(\mu, \mathrm{Y})$, $\mathrm{L} \in \mathrm{L}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ dhe Z një hapësirë kuazi-Banah atëherë $Lf \in \mathrm{L}^1(\mu, \mathrm{Y})$ dhe ka vend barazimi $L\left(\int_X f(x)d\mu\right) = \int_X Lf(x)d\mu$.
Vërtetim
Meqë $\mathrm{f} \in \mathrm{L}^1(\mu, \mathrm{Y})$, atëherë gjendet një varg $(f_n)_{n\in N}$ funksionesh të thjeshtë i tillë që konvergjon tek funksioni f dhe $\int_X f(x)d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\mu$.
Për çdo n∈N të tillë që $n \geq n_0$ kemi që $\|\mathrm{Lf_n} - \mathrm{Lf}\|_{\mathrm{Z}} \leq \|\mathrm{L}\| \cdot \|\mathrm{f_n} - \mathrm{f}\|_{\mathrm{Y}}$ .Kështu që, meqë L është i vazhdueshëm pra edhe i kufizuar, fakti që $f_n \to f$ na lejon të arrijmë në përfundimin që $\lim_{n\to+\infty} Lf_n = Lf$ mbi Z. Në anën tjetër vargu Lf_n është një varg funksionesh të thjeshtë mbi Z sepse $Lf_n = L\left(\sum_{j=1}^{k(n)} \chi_{E_j}(x)x_j\right) = \sum_{j=1}^{k(n)} \chi_{E_j}(x)L(x_j)$ ku $L(x_j) \in Z$ për j = 1,...,k(n). Meqë f është i integrueshëm sipas Bochner-it atëherë $\|f_n - f\|$ është i integrueshëm sipas Lebegut dhe si rrjedhim ka vend mosbarazimi $\int_X \|\mathrm{Lf_n} - \mathrm{Lf}\|_{\mathrm{Z}} \mathrm{d}\mu \leq \|\mathrm{L}\| \int_X \|\mathrm{f_n} - \mathrm{f}\|_{\mathrm{Y}} \mathrm{d}\mu$. Nisur nga fakti që $f_n \to f$ arrijmë në përfundimin që $\|f_n - f\|_Y \to 0$ për n→+∞ dhe si rrjedhim $\int_{\mathrm{X}} \|\mathrm{f_n} - \mathrm{f}\|_{\mathrm{Y}} \mathrm{d}\mu \to 0$ për n→+∞. Kështu që $\lim_{n\to+\infty} \int_X \|\mathrm{Lf_n} - \mathrm{Lf}\|_{\mathrm{Z}} \mathrm{d}\mu = 0$, pra Lf është i integrueshëm sipas Bochner-it mbi Z.
Gjithashtu kemi $\int_X f(x)d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\mu$ dhe si rrjedhim është i vërtetë barazimi $\int_X Lf(x)d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X Lf_n(x)d\mu$.
Kështu që, për çdo $\frac{\varepsilon}{2K} > 0$ gjendet $n_0 \in N$ e tillë që $\left\|\int_X Lf(x)d\mu - L\int_X f_n(x)d\mu\right\|_Z < \frac{\varepsilon}{2K}$ për çdo $n \geq n_0$ (ku K është moduli i konkavitetit i kuazi-normës në Z). Pra janë të vërteta mobarazimet:

$$\left\| L\left(\int_X f(x)d\mu\right) - \int_X Lf(x)d\mu \right\|_Z$$
$$\leq K \left\| L\left(\int_X f(x)d\mu\right) - L\left(\int_X \big(f_n(x)\big)d\mu\right) \right\|_Z$$
$$+ K \left\| L\left(\int_X \big(f_n(x)\big)d\mu\right) - \int_X Lf(x)d\mu \right\|_Z$$
$$< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + K\|L\| \cdot \left\| \int_X f_n(x)d\mu - \int_X f(x)d\mu \right\|_Y .$$

Në anën tjetër, për çdo $\frac{\varepsilon}{2K\|L\|} > 0$ gjendet $n_1 \in N$ e tillë që $\left\| \int_X f_n(x)d\mu - \int_X f(x)d\mu \right\|_Y < \frac{\varepsilon}{2K\|L\|}$ për çdo $n \geq n_1$ sepse $\int_X f(x)d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\mu$. Kështu që arrijmë në përfundimin se , për çdo ε > 0 gjendet $n \geq \max(n_0, n_1)$ e tillë që $0 \leq \left\| L\left(\int_X f(x)d\,\mu\right) - \int_X Lf(x)d\,\mu \right\|_Z < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Meqë ε > 0 është sado i vogël, në qoftë se marrim limitin për $\varepsilon \to 0$ atëherë janë të vërteta relacionet:

$$0 \leq \left\| L\left(\int_X f(x)d\,\mu\right) - \int_X Lf(x)d\,\mu \right\|_Z \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\left\| L\left(\int_X f(x)d\,\mu\right) - \int_X Lf(x)d\,\mu \right\|_Z = 0 \Leftrightarrow L\left(\int_X f(x)d\,\mu\right) = \int_X Lf(x)d\,\mu. \ \square$$

2.2 Integrali i Birkhoff në hapësirat kuazi të normuara

Hyrje

Integrali i Birkhoff për funksionet me vlera në një hapësirë Banah luan një rol të rëndësishëm në teorinë moderne të integrimit ([2],[24]).
Qëllimi kryesor i këtij punimi është shtrirja e kuptimit të Integralit Birkhoff për funksionet me vlera në një hapësirë kuazi-Banah. Duke qenë se është vene re një shtrirje e kuptimit të integralit të Bochner-it për funksionet e sipërpërmendur , është me interes që edhe integrali i Birkhoff të shtrihet në këto funksione sepse kështu bëhet me e plotë integrueshmëria për funksionet me vlera në hapësirat kuazi-Banah.

Le të nisim këtë trajtim duke prezantuar fillimisht një biografi të shkurtër të themeluesit të kësaj teorie.
Garret Birkhoff lindi në 19 Janar 1911 në Princeton, New Jersey, USA. Ai është i biri i George Birkhoff, një matematikan i shquar amerikan i edukuar në Çikago dhe Harvard. Shkolla e parë që ai ndoqi Garreti ishte një shkollë publike, të cilën e ndoqi për tre vite. I pakënaqur nga kjo shkollë në moshën 12 vjeçare ai u shpërngul në shkollën private ‘‘Browne and Nichols’’. Në këtë shkollë Garreti pati një mësues matematike të shkëlqyer dhe ashtu si në shkollën fillore ai përparoi shumë shpejt. Prindërit e Garretit kishin planifikuar një udhëtim në Evropë gjatë vitit të tij të tretë të studimeve. Ai me përgatitjen që kishte arriti të kryente provimet e këtij viti që në fillim të vitit dhe më pas u nis për në Evropë me prindërit. Më pas Garreti ndoqi një shkollë me konvikt në Lake Placid për një vit, duke kaluar shumë kohë me sport,

përpara se të hynte në Universitetin e Harvard-it në vitin 1928.Në fakt përpara se ai të hynte në Harvard, babai i kërkoi Garretit të vendoste për profesionin që do të ndiqte në të ardhmen, por ai iu përgjigj ''Unë kam vendosur të bëhem matematikan, sepse më pëlqen matematika dhe meqë babai im është një matematikan nuk ka arsye për të mos qenë edhe unë i tillë''.I ati e këshilloi atë të studionte fizikë matematikore dhe Garreti
kreu disa kurse në këtë drejtim.Ai ndoqi një kurs në teorinë potenciale me Oliver Kellogg i cili i dha atij një formim të mirë në ekuacionet diferenciale. Gjithashtu ai ndoqi një kurs me Kemble për mekanikën kuantike si dhe kurse për integrimin sipas Lebegut dhe topologjinë të cilët i dhanë atij një formim të gjer në matematikë. Me lektorë të tillë si Morse dhe Whitney, Birkhoff me siguri i kishte frymëzuar mësuesit në Harvard. Ai u diplomua në Harvard në vitin 1932 dhe iu dha një bursë studimi në Universitetin e Kembrixhit në Angli. Në fillim Birkhoff u fokusua në fizikën matematike por, me një interes në rritje në algjebrën abstrakte ai ndryshoi drejtim dhe nisi të punojë me Philip Hall, me të cilin publikoi edhe një artikull. Më pas Birkhoff shkoi në Mynih për një muaj në Korrik 1933 dhe punoi në teorinë e grupeve. Ndërsa ishte atje ai vizitoi Carathéodory-n i cili e orientoi atë më tej në studimin e algjebrës. Në kohën që Birkhoff u kthye në U.S.A ishte anëtar i shoqërisë Fellow në Harvard dhe në vitin 1936 ai u caktua si instruktor në Harvard. Deri në vitin 1941 Birkoff botoi dy libra të rëndësishëm në fushën e Algjebrës, i pari ishte ''Lattice theory'' dhe i dyti ''Survey of Modern Algebra'' të cilin e punoi së bashku me Mac Lane.
Gjatë luftës së dytë botërore ai u përfshi sërish në matematikën e aplikuar.Kjo përfshirje në inxhinierinë matematike erdhi përmes një bashkëpunimi me Morse dhe Von Neumann. Ata studiuan mënyrat për të llogaritur distancën e një objekti duke përdorur gjurmën e radarit. Më vonë Birkhoff u përfshsi në luftën e dytë botërore duke drejtuar kërkimet balistike mbi efikasitetin e shpërthimeve të predhave, për të vazhduar më tej me një projekt të marinës duke udhëhequr investigimin e valëve tronditëse rreth bombave kur ato kërcenin në ujë.
Puna e shtyu atë drejt informatikës dhe miqësisë me Von Neumann me të cilin patën diskutime mjaft interesante për këtë temë.Metodat kompjuterike dolën në pah kur Birkhoff punoi si konsulent për korporatën Ëestinghouse në fillim të vitit 1954. Kjo e drejtoi interesin e tij në Algjebrën lineare numerike. Në vitin 1959 Birkhoff filloi punën si konsulent kërkimor me General Motors. Një nga problemet që iu paraqitën ishte paraqitja matematikore e sipërfaqes së automobilit në mënyrë që të arrihej një kontoll numerik i mbetjeve dhe më pas këto mbetje të shfrytëzoheshin për stampimin e paneleve të jashtëme ose të brendëshme të makinave.
Në vitin 1969 Birkhoff u emërua ''George Putnam'' Profesor i matematikës puro dhe të aplikuar në Harvard. Ai e mbajti këtë post deri sa doli në pension në vitin 1981. Atij iu dhanë diploma nderi nga gjashtë universitete në mbarë botën. Gjithashtu u zgjodh në Akademinë Kombëtare të Shkencave dhe në Akademinë Amerikane të Arteve dhe Shkencave. Gjatë gjithë karreierës së tij, nga viti 1932 deri në vitin 1996 kur u largua nga kjo jetë, Birkhoff numëron përveç teskeve akademike edhe 229 artikuj shkencorë.Në drejtimin analizë funksionale dhe topologji përmendim këto artikuj:
1.Integration of functions ëith valued in a Banach spaces, (1935)
2.Moore-Smith convergence in general topology,(1937)
3.On integration of operators, (1937)
4.O product integration, (1937)
5.Some transformations of Michell's integral (1954)
6.The establishment of functional analysis(1984) etj.

Përcaktimi i integralit të Birkhoff-it në hapësirat kuazi të normuara

Duke kujtuar ndërtimin e integralit Fréchet, konsiderojmë funksionin $f : \Sigma \to R$, ku Σ është një σ-algjebër bashkësish të matshme dhe R është sistemi i numrave reale. Le të jetë $A \in \Sigma$ dhe Δ një copëtim çfarëdo i A-së, i përbërë nga një sasi e fundme ose e numërueshme bashkësish A_i me masa $\mu(A_i)$. Në lidhje me këtë copëtim ndërtojmë shumat e sipërme dhe të poshtme integrale përkatësisht si vijon:

$$I^*(f, \Delta) = \sum_i \mu(A_i) \sup_{x \in A_i} f(x) \quad \text{dhe} \quad I_*(f, \Delta) = \sum_i \mu(A_i) \inf_{x \in A_i} f(x)$$

duke supozuar që të dyja seritë konvergjojnë në mënyrë të pakushtëzuar.

Është e qartë se, për cdo dy ndarje Δ dhe Δ' ka vend mosbarazimi $I_*(f, \Delta) \le I^*(f, \Delta')$. Prandaj gjendet një numër x i tillë që $I_*(f, \Delta) \le x \le I^*(f, \Delta')$ dhe nëse ky numër është i vetëm, atëherë funksioni f(x) është i integrueshëm sipas Fréchet dhe integrali i funksionit është numri në fjalë. Integrali Birkhoff përftohet nga integrali Fréchet duke bërë dy ndryshime. Sistemi i numrave reale R zëvendësohet me një hapësirë kuazi-Banah Ɓ dhe bashkësitë e integraleve të sipërm dhe të poshtëm përkufizohen përkatësisht si më të voglat bashkësi konvekse dhe të mbyllura që përmbajnë shumat $\sum_i \mu(A_i) f(x_i)$ ku $x_i \in A_i$, duke supozuar përsëri konvergjencën e pakushtëzuar të të gjitha serive ([4]).

2.2.1 Njohuri paraprake dhe terminologji

Nëse Ɓ është një hapësirë vektoriale çfarëdo dhe θ është origjina e saj, atëherë kanë vend vetitë:

a) $\forall\, B_1, B_2 \subset \mathcal{B},\ B_1 + B_2 = B_2 + B_1$

b) $\forall\, B_1, B_2, B_3 \subset \mathcal{B}, B_1 + (B_2 + B_3) = (B_1 + B_2) + B_3$

c) $\forall$ $b \in R$ dhe $\forall\, B_1, B_2 \subset \mathcal{B}$, $b(B_1 + B_2) = bB_1 + bB_2$

d) $\forall\, b_1, b_2 \in R$ dhe $\forall B \subset \mathcal{B}$, $b_1(b_2 B) = b_1 b_2 B$

e) $\forall$ $B \subset$Ɓ, $1 \cdot B = B$

f) $\forall$ $B \subset$Ɓ , $B + \theta = B$ dhe $0 \cdot B = 0$.

Prandaj në qoftë se përkufizojmë si hapësirë ‘vektoroid’ sistemin që kënaq kushtet a)-f), pohojmë se: Nënbashkësitë jo boshe të Ɓ janë elemente të një hapësire ‘vektoroid’.

•Duke u bazuar në vetinë d, tregohet se ka vend pohimi:

Pohim 2.2.1.1 ([4])

Për çdo nënbashkësi $B \in$Ɓ kanë vend barazimet Co(mB) = mCo(B) dhe Co(A+B) = Co(A) +Co(B) (ku Co(A) është shënuar mbështjellësja konvekse e bashkësisë A). Kështu, korrespondenca $B \to Co(B)$ është homeomorfizëm.

2.2.2 Disa rezultate mbi konveksitetin e bashkësive në hapësirat kuazi të normuara

Shtojmë se tani e tutje hapësira Ɓ është e kuazi-normuar. Kështu çdo nënbashkësie të kufizuar $B \subset$Ɓ mund t’i shoqërojmë madhësinë $||B|| = \sup \{||\beta|| : \beta \in B\}$.

Vërejmë se është i vërtetë ky pohim:

Pohim 2.2.2.1 [11]

Korrespondenca $B \to ||B||$ e përcaktuar më sipër është një kuazi-normë.

Vërtetim

a) Është e qartë se $||B|| \ge 0$. Nga ana tjetër $||B|| = 0 \Leftrightarrow \forall \beta \in B, ||\beta|| = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$ (nga vetia e parë e kuazi-normës në Ɓ).

b) Për çdo c reale dhe për $B \subset$Ɓ kemi

||cB|| = sup {||cβ|| : β∈B}= sup {|c|·||β||} = |c|·sup {||β||: β∈B} = |c|·||B||.
c) Le të jenë B_1, B_2 dy nënbashkësi çfarëdo të Ɓ dhe $\beta_1 \in B_1$ dhe $\beta_2 \in B_2$.
$\|\beta_1 + \beta_2\| \le K(\|\beta_1\| + \|\beta_2\|) \le K(\|B_1\| + \|B_2\|)$ dhe si rrjedhim $\|B_1 + B_2\| \le K(\|B_1\| + \|B_2\|)$.
Pra kemi përcaktuar kështu kuazi-normën e një nënbashkësie në Ɓ.▫

•Gjithashtu i shoqërojmë nënbashkësisë B një 'diametër' ρ(B) = ||B-B|| ≤ 2K||B||.
Vërejmë se ||B||≤||Co(B)|| dhe ρ(B)≤2Kρ(Co(B)).

Le të jetë Ɓ një hapësirë kuazi-Banah. Siç dihet, hapësira Ɓ mund të shihet si hapësirë vektoriale topologjike dhe si rrjedhim ka kuptim të flasim për mbylljen e bashkësive në të.
Ndryshe nga rasti i hapësirës së normuar, këtu mund të garantojmë vetëm se:
$\|\sum_{i=1}^{r} B_i\| \le \left\|\sum_{i=1}^{r} \overline{Co(B_i)}\right\|$ ku B_i janë nënbashkësi çfarëdo të Ɓ. Në rastin e veçantë kur bashkësitë B_i janë të mbyllura dhe konvekse, për shembull në rastin e bashkësive me një element, ka vend barazimi $\|\sum_{i=1}^{r} B_i\| = \left\|\sum_{i=1}^{r} \overline{Co(B_i)}\right\|$.

Përkufizim 2.2.2.2([4])
Një bashkësi e numërueshme Z⊂Ɓ e elementeve $\xi_1, \xi_2, ...$ (jo doemos të ndryshme) quhet e shumueshme në mënyrë të pakushtëzuar në ξ në qoftë se dhe vetëm në qoftë se për çdo mënyrë të marrjes α të elementeve të Z, seria $Z^{(\alpha)}: \xi_{\alpha(1)} + \xi_{\alpha(2)} + \cdots$ konvergjon në ξ.
Në këto kushte seritë $Z^{(\alpha)}$ janë konvergjente në mënyrë të pakushtëzuar te ξ.

•Seritë konvergjente në mënyrë të pakushtëzuar të Ɓ janë elemente të një hapësire vektoriale L
Shënojmë me B(Z) bashkësinë e shumave të pjesëshme të elementeve të Z. Me kuazi-normë të Z (shënohet ||Z||) kuptojmë ||B(Z)||. Meqë B(Z+Z') ⊂ B(Z)+B(Z') dhe B(cZ) = cB(Z), tregohet lehtë se hapësira L hapësirë e kuazi-normuar.

Do të tregojmë se kjo hapësirë është e plotë.
Teoremë 2.2.2.3 [11]
Seritë konvergjente në mënyrë të pakushtëzuar të Ɓ janë elemente të një hapësire tjetër kuazi-Banah.
Vërtetim
Le të jetë $Z_1, Z_2, Z_3, ...$ një varg çfarëdo i serive konvergjente në mënyrë të pakushtëzuar të elementeve të Ɓ, i tillë që për çdo ε>0 gjendet një N e tillë që për m,n>N të kemi $\|Z_m - Z_n\| < \frac{\varepsilon}{K}$ (pra një varg Koshi në hapësirën L).
Është e qartë se termat e i-të ξ_i^k të Z_k janë vargje Koshi uniformisht konvergjentë, me limite ξ_i. Le të shënojmë Z serinë formale $\xi_1+\xi_2+\xi_3+\ldots$. Duhet të tregojmë se Z është konvergjent në mënyrë të pakushtëzuar dhe $\lim_{n\to\infty}\|Z - Z_n\| = 0$.
Por, për çdo ε>0 gjendet një N e tillë që nëse m,n >N atëherë $\|Z_m - Z_n\| < \frac{\varepsilon}{K}$ dhe kështu mund të gjejmë M aq të madhe sa në qoftë se M < k(1) < k(2)…< k(r) atëherë $\left\|\sum_{i=1}^{r} \xi_{k(i)}^{N}\right\| < \frac{\varepsilon}{K}$. (kjo e fundit sigurohet nga konvergjenca e serive Z_n).
Nën të njëjtat hipoteza rrjedh që $\left\|\sum_{i=1}^{r} \xi_{k(i)}\right\| = \left\|\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{r} \xi_{k(i)}^{n}\right\| \le K\left\|\sum_{i=1}^{r} \xi_{k(i)}^{N}\right\|$ + $K\cdot\frac{\varepsilon}{K}$ < 2ε. Kështu që Z është konvergjente në mënyrë të pakushtëzuar.

Kujtojmë se në [1] është treguar se: në qoftë se vargu x_n tenton në x atëherë $\lim_{n\to+\infty}\|x_n\| \le K\|x\|$.
Tani në qoftë se marrim j(1) < j(2) <…< j(s) çfarëdo, atëherë për n > N kemi

$$\lim_{n\to\infty}\|Z - Z_n\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{s} \xi_{j(i)} - \xi_{j(i)}^{n}\right\| \le K\left\|\sum_{i=1}^{s} \xi_{j(i)}\right\| < 2k\varepsilon = \varepsilon'.$$

Kjo i jep fund vërtetimit.▫

Të trajtojmë tani shumimin e pakushtëzuar të nënbashkësive në Ɓ
Le të jetë θ një bashkësi e numërueshme nënbashkësish $B_1, B_2, \ldots$ në Ɓ. Bashkësia θ quhet e shumueshme në mënyrë të pakushtëzuar në bashkësinë B⊂Ɓ në qoftë se dhe vetëm në qoftë se çdo seri $\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots$ ($\beta_i \in B_i$) është konvergjente në mënyrë të pakushtëzuar dhe B është gjeometrikisht shuma e këtyre serive. (shkurtimisht $\sum_i B_i = B$).
Në mënyrë që θ të jetë e shumueshme në mënyrë të pakushtëzuar është e nevojshme dhe e mjaftueshme që për çdo ε>0 të gjendet N e tillë që për N< k(1)< k(2) < …< k(r) të kemi $\|B_{k(1)} + \cdots + B_{k(r)}\| < \varepsilon$.
Përndryshe ne mund të formojmë një seri elementesh nga një varg i bashkësive të tilla e cila nuk është konvergjente në mënyrë të pakushtëzuar, pa marrë parasysh se sa ndryshojnë nga njëri tjetri terma të ndryshme të plotësuar nga elementet e mbetjes.
Njëlloj si në rastin e hapësirës së normuar ([4]) tregohet se:

Teoremë 2.2.2.4

Në qoftë se $\sum_i B_i = B$ dhe përbërësi $\overline{Co(B_i)}$ është i shumueshëm në mënyrë të pakushtëzuar atëherë $\sum_i \overline{Co(B_i)} \subset \overline{Co(B)}$ dhe $\overline{Co(B)} = \overline{\sum_i Co(B_i)} = \overline{\sum_i \overline{Co(B_i)}}$.

2.3 Përkufizimi i integralit të Birkhoff-it

Do të përkufizojmë si fushë të përcaktimit për funksionet bashkësiorë plotësisht aditivë çdo σ-unazë Σ të bashkësive të matshme që kënaq kushtet ([4]):
1)Plotësi i çdo bashkësie është në Σ, produkti $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ dhe shuma $\sigma_1 + \sigma_2$ për çdo dy elemente σ_1, σ_2 të Σ janë në Σ.
2)Secilës bashkësie σ në Σ i korrespondon një numër μ(σ) i quajtur masë e σ.
3) μ(σ) = 0 , e fundme pozitive ose +∝.
4)Në qoftë se $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots$ është shumë e fundme ose e numërueshme bashkësish jo prerëse, atëherë σ∈Σ dhe $\mu(\sigma) = \mu(\sigma_1) + \mu(\sigma_2) + \cdots$
Do të shënojmë σ_1^k, σ_2^k,.... për bashkësitë që përbëjnë ndarjen Δ_k. Me produkt $\Delta_1\Delta_2$ të dy ndarjeve Δ_1 dhe Δ_2 kuptojmë ndarjen e σ në ato bashkësi $\sigma_i^1\sigma_j^2$ të cilat janë jo boshe.
Meqë integrimi do të përkufizohet lidhur me σ-unazën Σ, është e natyrshme të përcaktojmë një "funksion bashkësior" si një funksion F që i cakton cdo bashkësie σ të Σ një "vlerë" të vetme F(σ) në Ɓ.
Funksioni F quhet plotësisht aditiv në qoftë se dhe vetëm në qoftë se hipoteza që σ është bashkim i fundëm ose i numërueshme bashkësish jo prerëse σ_i të Σ sjell që vlerat $F(\sigma_i)$ janë të shumueshme në mënyrë të pakushtëzuar në F(σ).

Lemë 2.3.1 [11]

Në qoftë se funksioni F është plotësisht aditiv atëherë bashkësia e F(σ) (σ∈Σ) ka një kufi të sipërm të fundëm.

Përndryshe, mund të zgjedhim $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ... me induksion të tilla që $\|F(\sigma_1)\| > 1$ dhe $\|F(\sigma_{i+1})\| \geq 3\|F(\sigma_i)\|$.Seria e $F(\sigma_i - \sigma_i(\sigma_1 + \cdots + \sigma_{i-1}))$ nuk mund të jetë e shumueshme në mënyrë të pakushtëzuar.
Më i vogli kufi i sipërm (i fundëm) i $\|F(\sigma_i)\|$ do të quhet kuazi-normë e F dhe shënohet me $\|F\|$.

Teoremë 2.3.2 [11]
Funksionet bashkësiorë plotësisht aditivë të ϑ në Ɓ formojnë një hapësirë kuazi-Banah, Ƒ(σ,Ɓ).
Vërtetim
Meqë $F_n(\sigma)$ janë vargje Koshi uniformisht konvergjentë, është e dukshme që ato tentojnë uniformisht tek një funksion bashkësior limit F.
Mbetet të provojmë që F është funksion bashkësior plotësisht aditiv. Për çdo zgjedhje $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots$ kjo është rrjedhim i teoremës 2.2.2.3. ▫

Me funksion (më saktësisht me funksion pikësor) T të një bashkësie përcaktimi të pranueshme ϑ në një hapësirë Banah Ɓ do të kuptojmë tani e tutje një rregull që i vë në korrespondencë çdo pike p$\in$ ϑ një ose më shumë 'imazhe' në Ɓ. Në përgjithësi, në qoftë se σ është një nënbashkësi çfarëdo në σ do të përdorim shënimin T(σ) për të shënuar nënbashkësinë e imazhit të pikës σ.
Shuma dhe prodhimi me skalarë i këtyre funksioneve janë sërish funksione pikësorë të pranueshëm. Prandaj këto funksione janë elemente të një hapësire vektoroid, e cila bëhet hapësirë vektoriale në qoftë se kufizohemi tek funksionet me një vlerë të vetme.

Përkufizim 2.3.3([4])
Një funksion T quhet i shumueshëm nën copëtimin Δ të ϑ në qoftë se dhe vetëm në qoftë se çdo $T(\sigma_i)$ është e kufizuar, dhe shuma totale e $\mu(\sigma_i)T(\sigma_i)$ është e shumueshme në mënyrë të pakushtëzuar.

Përkufizim 2.3.4([4])
Në qoftë se T është i shumueshëm nën Δ, atëherë bashkësia $I_\Delta(T) = \overline{\mathrm{Co}(\sum_i \mu(\sigma_i)T(\sigma_i))}$ quhet rang i integralit i funksionit T sipas Δ.

Le të jenë Δ dhe Δ_1 dy copëtime dhe $\Delta\Delta_1$ copëtimi produkt. Konsiderojmë ato funksione T të cilët janë të shumueshëm nën copëtimin produkt (në rastin kur funksioni T është me një vlerë të vetme mjafton që të jetë i shumueshëm sipas copëtimeve Δ dhe Δ_1).Vërejmë se $I_{\Delta\Delta_1}(T) \subset I_\Delta(T) I_{\Delta_1}(T)$.
Prandaj çdo dy rangje të integraleve të T përputhen. Ndër këta funksione do të shohim më poshtë se cilët janë të integrueshëm sipas Birkhoff dhe disa veti të tyre.

Përkufizim 2.3.5([4])
Një funksion T quhet i integrueshëm në qoftë se dhe vetëm në qoftë se limiti inferior i diametrave të rangjeve të integralit të tij është zero.

Teoremë 2.3.6 [11]
Në qoftë se T është i integrueshëm atëherë prerja e rangjeve të integralit të T është një element i vetëm I(T) i Ɓ.

Vërtetim

Mund të zgjedhim një bashkësi të rangjeve të integralit $I_{\Delta_1}(t), I_{\Delta_2}(t), I_{\Delta_3}(t)$,... me diametra përkatësisht më të vegjël se 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$,... Meqë këto bashkësi janë të mbyllura dhe mbivendosen, prerja është një pikë e vetme. Por meqë çdo rang integrali i T është i mbyllur dhe mbivendoset me çdo $I_{\Delta_k}(t)$, kjo pikë përfshihet në çdo rang integrali të T. ▫

Përkufizim 2.3.7([4])

I(T) e përmendur në teoremën më sipër quhet integral i funksionit T mbi ϑ.

Teoremë 2.3.8 [11]

Në qoftë se T është i integrueshëm atëherë çdo $\varepsilon > 0$ i korrespondon një copëtim Δ nën të cilin shuma totale e $\mu(\sigma_i)T(\sigma_i)$ është e shumueshme në mënyrë të pakushtëzuar dhe ka diametër më të vogël se ε.

Vërtetim

Nga përkufizimi $\rho(I_\Delta(T)) < \frac{\varepsilon}{2K}$ (ku K është moduli i konkavitetit të kuazi-normës). Prandaj kanë vend mosbarazimet: $\rho(\sum_i \mu(\sigma_i)T(\sigma_i)) \leq 2K\rho\big(Co(\sum_i \mu(\sigma_i)T(\sigma_i))\big) \leq 2K\rho(I_\Delta(T)) < \varepsilon$. ▫

Në rastin tonë nuk mund të themi gjithnjë ashtu si në rastin e funksioneve me vlera në hapësirat Banah se, për funksionin e integrueshëm mbi ϑ funksioni korrespondues $I(T,\sigma)$ për $\sigma \in \Sigma$ është plotësisht aditiv, por mund të japim përkufizimin që vijon:

Përkufizim 2.3.9([4])

Kuazi-normë të një funksioni të integrueshëm quajmë numrin $\|T\| = \sup_{\sigma\in\Sigma}\|I(T,\sigma)\|$, i cili mund të jetë i fundëm ose $+\infty$.

Teoremë 2.3.10 [11]

Në qoftë se Δ është një copëtim çfarëdo i ϑ, T është i integrueshëm mbi çdo σ_i të copëtimit Δ dhe shuma totale e $I(T,\sigma_i)$ është e shumueshme në mënyrë të pakushtëzuar, atëherë T është i integrueshëm mbi ϑ dhe $I(T) = \sum_i I(T,\sigma_i)$.

Copëtojmë çdo σ_i me anë të një copëtimi Δ_i nën të cilin ka vend mosbarazimi $\|I_{\Delta_i}(T,\sigma_i) - I(T,\sigma_i)\| < \frac{\varepsilon}{(2K)^i}$. Atëherë copëtimi korrespondues i ϑ do të jetë i shumueshëm dhe rangjet e integraleve të tij do të jenë brenda një sfere me rreze ε të $\sum_i I(T,\sigma_i)$.

2.4 Disa veti të integralit Birkhoff në hapësirat kuazi-Banah

Po trajtojmë tani disa veti të integralit Birkhoff të cilat kemi vënë re se shtrihen edhe për funksionet me vlera në hapësirat kuazi Banah.

Teoremë 2.4.1 [11]

Në qoftë se T dhe U janë funksione të integrueshëm dhe m është numër real atëherë mT dhe T+U janë funksione të integrueshëm dhe kanë vend barazimet I(mT) = mI(T) dhe I(T+U) = I(T) +I(U).

Vërtetim
Përfundimi për mT është evident sepse në qoftë se $\rho(I_\Delta(T)) < \varepsilon$ atëherë $I_\Delta(mT) = \mathrm{Co}(\sum_i m\mu(\sigma_i)T(\sigma_i)) = m\mathrm{Co}(\sum_i \mu(\sigma_i)T(\sigma_i)) = m\, I_\Delta(T)$ dhe si rrjedhim $\rho(I_\Delta(mT)) = \rho(mI_\Delta(T)) = \|mI_\Delta(T) - mI_\Delta(T)\| = |m|\rho(I_\Delta(T)) < m\varepsilon$.
Shohim tani funksionin T+U =V.
Meqë T dhe U janë të integrueshëm për çdo $\varepsilon>0$ gjenden copëtimet Δ dhe Δ_1 të tillë që $\rho(I_\Delta(T)) < \varepsilon$ dhe $\rho(I_{\Delta_1}(U)) < \varepsilon$. Kështu që ([4]) $I_{\Delta\Delta_1}(V) \subset I_\Delta(T) + I_{\Delta_1}(U)$ i cili është me diametër më të vogel se $2K\varepsilon$.
Barazimet I(mT) = mI(T) dhe I(T+U) = I(T) +I(U) rrjedhin menjëherë nga vetitë e konveksitetit dhe mbylljes së bashkësive. ▫

Rrjedhim 2.4.2 [11]
Për çdo dy funksione të integrueshëm T dhe U kemi $\|mT\| = |m|\cdot\|T\|$ dhe $\|T+U\| \leq K(\|T\| + \|U\|)$.
Vërtetim
Së pari $\|I(mT,\sigma)\| = \|mI(T,\sigma)\| = |m|\cdot\|I(T,\sigma)\| \leq |m|\cdot\|T\|$ dhe si rrjedhim $\|mT\| \leq |m|\cdot\|T\|$.
Nga ana tjetër $|m|\cdot\|I(T,\sigma)\| = \|I(mT,\sigma)\| \leq \|mT\|$.
Për $m \neq 0$ shkruajmë $\|I(T,\sigma)\| \leq \frac{1}{|m|}\|mT\|$ dhe si rrjedhim $\|T\| \leq \frac{1}{|m|}\|mT\|$ që është e njëvlershme me faktin $|m|\cdot\|T\| \leq \|mT\|$. Për m = 0 është e qartë se $mT = 0 \in \mathcal{B}$ dhe si rrjedhim $\|mT\|=0$, domethënë $|m|\cdot\|T\| = 0 = \|mT\|$.
Pra vërtetuam barazimin $\|mT\| = |m|\cdot\|T\|$.
Meqë për dy funksione të integrueshëm T dhe U kemi I(V) = I(U)+I(V) (ku V=T+U), atëherë $I(V,\sigma) = I(T,\sigma) + I(V,\sigma)$. Kështu që për çdo $\sigma \in \vartheta$, $\| I(V,\sigma)\| \leq K(\|I(T,\sigma)\| + \| I(V,\sigma)\|) \leq K(\|T\| + \|U\|)$ dhe si rrjedhim $\|V\| \leq K(\|T\| + \|U\|)$.▫

Le të jetë $\alpha:\beta \to \alpha(\beta)$ një transformim linear çfarëdo i hapësirës kuazi-Banah $\mathcal{B}$ në hapësirën e kuazi-Banahut U .
Teoremë 2.4.3 [11]
Në qoftë se T është një funksion i integrueshëm atëherë (i) Funksioni $U(p) = \alpha(T(p))$ është i integrueshëm (ii) $I(U) = \alpha(I(T))$.
Vërtetim
Në qoftë se T është i shumueshëm nën një copëtim çfarëdo Δ të ϑ, atëherë i tillë është edhe funksioni U. Duke shkruar U vetëm për termat $\mu(\sigma_i)U(\sigma_i)$, meqë për shumat e fundme α është aditive, kalimi në limit na lejon të arrijmë në përfundimin se $I(U) = \alpha(I(T))$. (kjo sepse nën kalimin në limit raporti $\frac{\|\alpha(\beta)-\alpha(\beta')\|}{\|\beta-\beta'\|}$ është i kufizuar).
Për sa i takon pikës (i), është e dukshme që është e vërtetë, pasi prodhimi me skalar dhe shuma e funksioneve janë veprime që nuk na nxjerrin nga klasa e funksioneve të integrueshëm dhe vetë funksioni α është linear. ▫

Është me interes të vëmë re se është e vërtetë një teoremë të njohur në rastin e integralit të Lebegut.

Teoremë 2.4.4 [11]
Në qoftë se T_n është një varg funksionesh Birkhoff të integrueshëm të ϑ në $\mathcal{B}$, $\mu(\vartheta)$ është e fundme dhe vargu T_n konvergjon uniformisht tek funksioni i integrueshëm T atëherë $I(T) = \lim_{n\to\infty} I(T_n)$.

Vërtetim
Meqë vargu T_n konvergjon uniformisht tek funksioni T rrjedh se gjendet një n sado e madhe e tillë që për çdo pikë p dhe për çdo Δ të kemi $\|T(p) - T_n(p)\| < \frac{\varepsilon}{3K\mu(\vartheta)}$.
Nga ana tjetër funksionet T_n janë të integrueshëm dhe si rrjedhim mund të gjejmë një n (të cilën mund ta marrim të njëjtë me të mësipërmen pasi përndryshe zgjedhim më të madhen prej tyre) të tillë që $\|I_\Delta(T_n) - I(T_n)\| < \frac{\varepsilon}{3K}$.
Nga vetia e kuazi-normës shkruajmë:

$$\begin{aligned}\|I(T_n) - I(T)\| &\leq K(\|I_\Delta(T_n) - I(T_n)\| + \|I_\Delta(T_n) - I(T)\|)\\ &\leq K[\|I_\Delta(T_n) - I(T_n)\| + K(I_\Delta(T_n) - I_\Delta(T) + \|I_\Delta(T) - I(T)\|)]\end{aligned}$$

Meqë $\|T(p) - T_n(p)\| < \frac{\varepsilon}{3K\mu(\vartheta)}$ rrjedh se sup $|| \sum_i \mu(\sigma_i)\big(T(p_i) - T_n(P_i)\big)|| < \frac{\varepsilon}{3K}$ pasi termi mbetës i serisë konvergjente tenton në zeron e hapësirës.
Prandaj $\|I(T_n) - I(T)\|$ tenton në zero dhe si rrjedhim $I(T) = \lim_{n\to\infty} I(T_n)$. ▫

KAPITULLI 3
Multifunksionet dhe disa aspekte integrimi të tyre

3.1 Multifunksionet

Në këtë seksion do të trajtojmë kuptimin e multifunksionit ose, siç njihet ndryshe me emrin funksion me vlera bashkësi. Fillimisht do të shohim shtrirjen e konceptit të integralit të këtyre funksioneve duke marrë vlerat në hapësira të kuazi normuara dhe më pas edhe veti të ndryshme të tij.
Në përgjithësi në ndërtimin e një multifunksioni është supozuar që hapësirat X dhe Y janë të paktën hapësira topologjike të Hausdorff-it [1]. Praktikisht multifunksionet paraqesin veti interesante kur X dhe Y merren hapësira lineare të normuara [14]. Këtu ne do të përqendrohemi në rastin kur X dhe Y janë të kuazi normuara.

Një relacion $F:X\to Y$ është një nënbashkësi e $X\times Y$. Përndryshe , F mund të konsiderohet si një funksion i X në bashkësinë e gjithë nënbashkësive të Y. Bashkësi e përcaktimit e F quhet bashkësia Dom(F) = $\{x \in X: F(x) \neq \emptyset\}$; bashkësi e vlerave të F quhet bashkësia Rang(F) = $\bigcup_{x\in Dom\,(F)} F(x)$ dhe graf i F quhet bashkësia Graph(F) = $\{(x,t): t \in F(x), x \in Dom(F)\}$. Nëse duam të theksojmë vetitë e F si një nënbashkësi e $X\times Y$, i referohemi grafit të tij [1].

Përkufizim 3.1.1
Le të jenë X dhe Y hapësira topologjike. Në qoftë se për çdo $x\in X$ gjendet një bashkësi korresponduese jo boshe $F(x)\subset Y$, atëherë F quhet multifunksion i X në Y dhe shënohet $F:X \rightrightarrows Y$ ose $F:X\to 2^Y$. Pra një multifunksion është një relacion me bashkësi përcaktimi X.

Është e qartë se një funksion $f:X\to Y$ është një rast i veçantë i multifunksionit.

Përkufizim 3.1.2
Le të jenë X dhe Y hapësira topologjike.
(i) Një multifunksion $F:X\to 2^Y$ quhet me vlera të mbyllura, të hapura ose kompakte në qoftë se, për çdo $x\in X$, F(x) është, respektivisht, një bashkësi e mbyllur, e hapur ose kompakte në Y. Për më tepër, në qoftë se Y është hapësirë vektoriale topologjike dhe për çdo $x\in X$, F(x) është një bashkësi konvekse në Y, atëherë F quhet me vlera konvekse.
(ii) Një multifunksion $F:X\to 2^Y$ quhet i mbyllur, i hapur ose kompakt në qoftë se Graph(F) është, respektivisht, bashkësi e mbyllur, e hapur ose kompakte sipas topologjisë produkt të $X\times Y$. Për më tepër, në qoftë se X dhe Y janë hapësira vektoriale topologjike, atëherë F quhet konveks në qoftë se grafi i tij është një bashkësi konvekse sipas topologjisë produkt të $X\times Y$.

Në koleksionin e multifunksioneve (relacioneve) përcaktohen veprime të ndryshme. Le të themi se kemi veprimin $*$ i cili përcaktohet si vijon: $F_1 * F_2$: $x\to F_1(x) * F_2(x)$. Në këtë mënyrë mund të përcaktojmë $F_1\cap F_2$, $F_1\cup F_2$, $F_1+ F_2$ (në hapësirën vektoriale), $F_1 \times F_2$ etj.
Në mënyrë të ngjashme, në qoftë se funksioni α: $2^Y\to 2^Y$ përcaktojmë $\alpha(F):x\to\alpha(F(x))$. Për shembull, do të përdorim shënimin $\overline{F}$, conv(F) etj, për multifunksionet $x\to\overline{F(x)}$, $x\to$conv(F(x)) ku conv(F(x)) paraqet mbështjellësen

konvekse të bashkësisë F(x). Kuptohet që multifunksioni conv(F) ndërtohet në rastin kur Y është hapësirë vektoriale topologjike.
Për më tepër, përcaktojmë multifunksionin kompozim të multifunksioneve $F_1:X\to 2^Y$ dhe $F_2:Y\to 2^Z$ në mënyrë të tillë që, për çdo $x\in X$ marrim $(F_2 \circ F_1)(x) = \bigcup_{y\in F_1(x)} F_2(y)$.

Ka dy mënyra për të përcaktuar imazhin e anasjelltë të nënbashkësisë M me anë të një multifunksioni F.

$$\text{(i) } F^{-}(M) = \{x \in X: F(x) \cap M \neq \emptyset\}$$
$$\text{(ii) } F^{+}(M) = \{x \in X: F(x) \subset M\}$$

Nënbashkësia $F^{-}(M)$ quhet parafytyrë e M me anë të F, kurse nënbashkësia $F^{+}(M)$ quhet bërthamë e M në lidhje me F.[2]
Vërejmë që kanë vend barazimet : $F^{-}(Y\backslash M) = X\backslash F^{+}(M)$ dhe $F^{+}(Y\backslash M) = X\backslash F^{-}(M)$
Vërtet
Për çdo $x\in\{x \in X: F(x) \subset M\}^c = X\backslash F^{+}(M)$ mund të shkruajmë që $F(x)\not\subset M$, prandaj $F(x)\cap M^c \neq \Phi$. Kështu që $X\backslash F^{+}(M) \subseteq F^{-}(M^c) = F^{-}(Y\backslash M)$.
Nga ana tjetër, për çdo $x\in F^{-}(Y\backslash M)$ është e vërtetë se $F(x) \cap M^c \neq \Phi$ dhe si rrjedhim $F(x)\not\subset M$. Prandaj ka vend relacioni $F^{-}(Y\backslash M) \subseteq \{x \in X: F(x) \subset M\}^c = X\backslash F^{+}(M)$.
Pra kemi treguar barazimin e parë.
Duke marrë në barazimin e parë në vend të bashkësisë M bashkësinë Y\M, kemi $F^{-}(M) = X\backslash F^{+}(Y\backslash M)$ dhe meqë bashkësitë e barabarta kanë plotës të barabartë shkruajmë $F^{+}(Y\backslash M) = X\backslash F^{-}(M)$. ▫

•Vërehet lehtë se në qoftë se $f:X\to Y$ është një funksion atëherë për çdo $M \subset Y$ ka vend barazimi $f^{+}(M) = f^{-}(M) = f^{-1}(M)$.

Në shumë raste ne do të donim të dinim se si një ndryshim i vogël i një parametri s të një problemi të dhënë matematikor mund të ndikojë në zgjidhjen ose bashkësinë e zgjidhjeve (ose edhe në strukturën) të problemit. Aktualisht, një studim i tillë është shumë i rëndësishëm siç janë edhe shumë probleme të dobishme matematikore që janë zgjidhur zakonisht me përafrime kompjuterike. Kështu që ndjeshmëria analitike mund të garantojë pranueshmërinë e zgjidhjes së fituar me afërsi sipas (s) bazuar në një gabim të lejuar të caktuar të parametrit s të problemit. Për shembull, karakterizimi i variacionit (për shkak, të themi, të turbullimit të të dhënave) të bashkësive të zgjidhjeve të problemeve të optimizimit, ekuacioneve me diferencial të pjesshëm etj, është bërë me anë të multifunksioneve. Rrjedhimisht, multifunksionet janë mjete të domosdoshme në stabilitetin dhe analizën e ndjeshmërisë së problemeve matematikore. Përveç këtyre, gjenden edhe aplikime të tjera për multifunksionet.

Në vijim po paraqesim disa shembuj multifunksionesh.

[2] Për $F^{-}(M)$ dhe $F^{+}(M)$ Berge ka përdorur respektivisht terminologjinë invers i poshtëm dhe invers i sipërm, ndërsa Hu & Papageorgiou respektivisht invers i dobët dhe invers i fortë.

Shembuj

1 Në qoftë se funksioni f: Y→X është syrjektiv, atëherë funksioni F(x) = $f^{-1}(x)$ për x∈X është një multifunksion.(Në fakt mjafton syrjektiviteti i funksionit f për të garantuar se F(x) është një nënbashkësi jo boshe e Y)

2 Le të jetë K një bashkësi kompakte në R dhe C(K) bashkësia e funksioneve të vazhdueshëm f:K→R. Funksioni F:C(K)→2^K i tillë që çdo funksioni f∈C(K) i vë në korrespondencë bashkësinë $\{x \in K: |f(x)| = \|f\|_\infty\}$ është një multifunksion. (bashkësia $\{x \in K: |f(x)| = \|f\|_\infty\}$ është jo boshe në sajë të vazhdueshmërisë së funksionit f dhe kompaktësisë së bashkësisë K)

3 Projeksioni metrik

Le të jetë (X, || ||) një hapësirë e normuar. Bashkësia K ⊂ X quhet bashkësi Chebyshev në qoftë se bashkësia $P_K(x) = \{y \in X: \|y - x\| = d_K(x)\}$ është jo boshe, ku $d_K(x)$ është shënuar largesa e pikës x nga bashkësia K sipas metrikës së gjeneruar nga norma e X-it.

Është me interes të dimë kushte të mjaftueshme që një nënbashkësi K e hapësirës së normuar X të jetë bashkësi Chebyshev[3].

- Në qoftë se bashkësia K është një nënbashkësi e mbyllur në hapësirën me dimension të fundëm X atëherë bashkësia K është bashkësi Chebyshev. ([8])
- Meqë operatori $e_x: K \to R$ i tillë që çdo y∈K i korrespondon $e_x(y) = \|y - x\|$ është i vazhdueshëm atëherë çdo nënbashkësi kompakte e X është bashkësi Chebyshev. ([8])

Një bashkësi K ⊂ X quhet kufizueshmërisht kompakte në qoftë se K ∩ B(0,r) është kompakte në X për çdo r > 0.

- Çdo bashkësi K kufizueshmërisht kompakte në hapësirën e normuar X është bashkësi Chebyshev. ([8])

Le të përkufizojmë tani projeksionin metrik.

Projeksioni metrik është një funksion që përdoret në shumë fusha të matematikës si në teorinë e optimizimit , teorinë e përafrimit dhe atë të pikave fikse. Ai është një multifunksion $P_K: X \to 2^K$, ku K është një bashkësi **Čebyšev** e mbyllur, dhe i shoqëron çdo x∈X bashkësinë e gjithë përafrimeve më të mira të tij që shënohet $P_K(x) = \{y \in X: \|y - x\| = d_K(x)\}$.

Për më tepër në qoftë se K është bashkësi Chebyshev kufizueshmërisht kompakte atëherë projeksioni metrik P_K është një multifunksion i vazhdueshëm.

Shembulli i mësipërm është mjaft interesant, le të shtrojmë pyetjen: A mund të ndërtohet projeksioni metrik nëse hapësira (X, || ||) është e kuazi-normuar?

Nisur nga fakti që hapësira e kuazi-normuar është e metrizueshme dhe meqë X është e p-normueshme për ndonjë p>0 atëherë kuazi-norma është funksion i vazhdueshëm për topologjinë e metrikës së saj ([14]) arrijmë në përfundimin se: Nëse hapësira (X, || ||) është e kuazi-normuar, mund të përkufizojmë bashkësinë Chebyshev në ngjashmëri me atë të rastit të normuar dhe për më tepër mund të pohojmë se:

- Çdo nënbashkësi kompakte në hapësirën e kuazi-normuar (X, || ||) është bashkësi Chebyshev.
- Çdo bashkësi K kufizueshmërisht kompakte në hapësirën e kuazi- normuar (X, || ||) është bashkësi Chebyshev.

[3]Chebyshev është një matematikan i shquar Rus i cili është shumë i njohur për punimet e tij në fushat e Probabilitetit, Statistikës,Mekanikës dhe Teorisë së numrave.

Prandaj mund të përcaktojmë edhe në rastin e hapësirës së kuazi-normuar multifunksionin projeksion metrik.

3.2 Vazhdueshmëria e multifunksioneve

Koncepti i gjysmë vazhdueshmërisë së multifunksioneve është paraqitur në vitin 1932 nga G.Bouligand[4] dhe K.Kuratowski.

Le të konsiderojmë X,Y,Z hapësira metrike ku metrika në fjalë, të cilën po e shënojmë me d, është ajo e përmendur në seksionin 1.1.

Përkufizim 3.2.1 [14]

Largesë e pikës $x \in X$ nga bashkësia $A \subset X$ quhet madhësia e përcaktuar nga barazimi $d(x,A) = \inf\{d(x,y): y \in A\}$.

Bazuar në madhësinë e mësipërme futet kuptimi i fqinjësisë së një bashkësie.

Përkufizim 3.2.2 [14]

Fqinjësi e bashkësisë $A \subset X$ quhet çdo bashkësi $B(A,r)=\{x \in X: d(x,A) \leq r\}$ ku $r > 0$.

Shembuj

Po kufizohemi në hapësirën metrike (R,d) të pajisur me largesën e zakonshme

1.Bashkësia A = [1,3) ka fqinjësi B(A,1) = [0,4]. Është e qartë se në përcaktimin e B(A,1) duket pak në pikëpyetje nëse numri 4 është apo jo pjesë e saj. Le të arsyetojmë më hollësisht: Numri 4 do të bëjë pjesë në fqinjësinë B(A,1) vetëm nëse $d(4,A) \leq 1$.
Nga përkufizimi 3.2.1 kemi që $d(4,A) = \inf\{d(4,x): x \in A\}=\inf \{|4-x|: x \in A\}$. Vërejmë se:për $x \in A$, $1 \leq x<3 \Leftrightarrow -3<-x \leq -1 \Leftrightarrow 1< 4-x \leq 3$; prandaj $\{d(4,x): x \in A\} =]1,3]$ dhe si rrjedhim d(4,A) = 1.

2.Bashkësia $A= (0,2) \cup \{3\}$ ka fqinjësi B(A,1)=[-1,4].

3.Bashkësia $A= (0,1) \cup \{4\}$ ka fqinjësi $B(A,1)=[-1,2] \cup [3,5]$.

4.Bashkësia e numrave të plotë Z ka fqinjësi B(Z,1)=R. ▫

Vërejtje 3.2.3

•Është e qartë se në rastin kur bashkësia A ka vetëm një element fqinjësisë B(A,r) i korrespondon rruzulli i mbyllur me qendër në pikën në fjalë dhe rreze r njësi.

•Në rastin kur bashkësia A ka më shumë se një element, siç vihet re edhe në shembujt më sipër B(A,r) mund të mos jetë bashkësi e kufizuar(madje mund të përputhet me X).

•Për çdo bashkësi $A \subset X$ fqinjësia B(A,r) është bashkësi e mbyllur.

Vërtet

Mjafton të tregojmë se për çdo $z \in \overline{B(A,r)}$ kemi që $z \in B(A,r)$.

Le të jetë $z \in \overline{B(A,r)}$ i çfarëdoshëm. Nga përkufizimi i pikës së takimit të një bashkësie shkruajmë: $\forall r'>0$, $B(z,r') \cap B(A,r) \neq \phi$. Prandaj gjendet $v \in X$ e tillë që $d(z,v)<r'$ dhe $d(v,A) \leq r$.

[4] Georges Louis Bouligand (1889-1979) është një matematikan Francez punimet e të cilit janë orientuar kryesisht në fushën e gjeometrisë.

Dallojmë rastet:
Rasti 1: $d(v,A)<r$
Në këtë rast gjendet $y'\in A$ i tillë që $d(v,y')<r$ dhe si rrjedhim $d(z,y')\leq d(z,v)+d(v,y')<r'+d(v,y')$.Duke marrë inferiorin e të dy anëve të mosbarazimit të mësipërm për $y'\in A$ arrijmë në përfundimin se $d(z,A)\leq r'+d(v,A)$. Pra për r' që tenton drejt zeros arrijmë në përfundimin $d(z,A)\leq r$, gjë që i jep fund vërtetimit.
Rasti 2: $d(v,A) = r$
Nga vetia e inferiorit shkruajmë se: për çdo $\varepsilon>0$ gjendet $y'\in A$ i tillë që $r\leq d(v,y')<r+\varepsilon$.
Kanë vend mosbarazimet:

$$d(v,y')\leq d(v,z)+d(z,y')\Leftrightarrow r- d(v,z)\leq d(v,y')- d(v,z)\leq d(z,y')<r'+r+\varepsilon.$$

Kështu që ka vend mosbarazimi $r-r'\leq d(z,y')<r'+r+\varepsilon$. Nisur nga fakti që r' mund të merret pambarimisht i vogël kemi që $d(z,A)\leq r$, gjë që i jep fund vërtetimit.
•Çdo fqinjësi e një bashkësie e përmban këtë bashkësi së bashku me kufirin e saj. Kështu që çdo fqinjësi e një bashkësie është edhe fqinjësi e mbylljes së saj. ▫

Tani të fokusohemi tek koncepti i gjysmë vazhdueshmërisë:

Përkufizim 3.2.4 [14]
Një multifunksion $F: X\to 2^Y$ quhet gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në pikën $x\in X$ në qoftë se për çdo fqinjësi $\mathcal{U}$ të F(x) gjendet një $r > 0$ e tillë që për çdo $x' \in B(x,r)$ të kemi $F(x')\subset \mathcal{U}$.

Multifunksioni quhet gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në qoftë se dhe vetëm në qoftë se ai është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në çdo pikë të bashkësisë së tij të përcaktimit.

Në rastin kur F(x) është kompakte atëherë F është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në x në qoftë se dhe vetëm në qoftë se, për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet një $r > 0$ e tillë që për çdo $x' \in B_X(x,r)$ ka vend relacioni $F(x') \subset B_Y(F(x),\varepsilon)$.

Përkufizimi i mësipërm mund të shkruhet si vijon, nëse X dhe Y janë hapësira topologjike.
Përkufizim 3.2.4' [1]
Një multifunksion $F: X\to 2^Y$ quhet gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në pikën $x\in X$ në qoftë se për çdo bashkësi të hapur $V\subset Y$ të tillë që $F(x)\subset V$ gjendet një fqinjësi $U\subset X$ e x e tillë që:

$$\forall x'\in U: F(x')\subset V \text{ pra } U \subset F^{+}(V).$$

Vërejtje 3.2.5
Përkufizimi i mësipërm është një adaptim i natyrshëm i përkufizimit të një funksioni të vazhdueshëm. Lind pyetja: Pse kemi përdorur termin gjysmë vazhdueshmëri nga sipër në vend të atij vazhdueshmëri? Një nga arsyet është që karakteristika e funksioneve të vazhdueshëm : një funksion f është i vazhdueshëm në x në qoftë se dhe vetëm në qoftë se, për çdo varg pikash që konvergjon në x vargu korrespondues i vlerave të funksionit konvergjon në f(x); nuk mbetet e vërtetë në rastin e multifunksioneve.

Në rastin e multifunksioneve, një version i kësaj karakteristike formulohet në përkufizimin që vijon.

Përkufizim 3.2.6 [14]

Një multifunksion F: $X\rightarrow 2^Y$ quhet gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në pikën $x\in X$ në qoftë se për çdo $y\in F(x)$ dhe për çdo varg elementesh x_n në X që konvergjon në pikën x, gjendet një varg elementesh $y_n \in F(x_n)$ që konvergjon në y.

Multifunksioni quhet gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në qoftë se dhe vetëm në qoftë se ai është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në çdo pikë të bashkësisë së tij të përcaktimit.

Përkufizimi i mësipërm mund të shkruhet si vijon, nëse X dhe Y janë hapësira topologjike.

Përkufizim 3.2.6' [1]

Një multifunksion F: $X\rightarrow 2^Y$ quhet gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në pikën $x\in X$ në qoftë se për çdo bashkësi të hapur $V\subset Y$ të tillë që $F(x) \cap V \neq \emptyset$ gjendet një fqinjësi $U\subset X$ e x e tillë që :

$$\forall x\in U,\ F(x) \cap V \neq \emptyset \text{ pra } U\subset F^{-}(V).$$

Vërejtje 3.2.7 [12]

Duke patur parasysh se çdo hapësirë metrike është hapësirë topologjike (topologjia është e gjeneruar nga metrika e saj) është e qartë se në rastin kur X dhe Y janë hapësira metrike përkufizimet 3.2.4 dhe 3.2.4' janë të njëvlershëm, e njëjta gjë thuhet edhe për përkufizimet 3.2.6 dhe 3.2.6'. Patjetër që kjo mbetet e vërtetë edhe në rastin e hapësirave të kuazi-normuara që siç kemi theksuar janë hapësira vektoriale topologjike të metrizueshme.

Po tregojmë njërën nga ekuivalencat e mësipërme. Le të tregojmë ekuivalencën e përkufizimeve 3.2.6 dhe 3.2.6'.

Supozojmë se multifunksioni F është gjysmë i vashdueshëm nga poshtë në pikën x sipas përkufizimit 3.2.6. Për çdo bashkësi të hapur $V\subset Y$ të tillë që $F(x)\cap V\neq\phi$ gjendet një pikë $y\in F(x)$ dhe $y\in V$. Kështu që ekziston $r>0$ e tillë që $B(y,r)\subset V$.

Supozojmë se, për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet $x'\in B(x,\varepsilon)$ i tillë që $F(x')\cap V=\phi$. Marrim një varg ε_n konvergjent në zero dhe për çdo $n\in N$ shënojmë me x_n një nga elementet e $B(x,\varepsilon_n)$ që nuk bën pjesë në $F^{-}(V)$. Vargu x_n është një varg konvergjent në x dhe nga përkufizimi 3.2.6 gjendet vargu $y_n\in F(x_n)$ i tillë që konvergjon në y. Kështu që $y_n\in B(y,r)\subset V$ për çdo $n\geq n_1$, prandaj $F(x_n)\cap V\neq\phi$ që kundërshton zgjedhjen e vargut x_n. Pra treguam se multifunksioni F(x) është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë edhe sipas përkufizimit 3.2.6'.

Anasjelltas, le të jetë multifunksioni F(x) gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në x sipas përkufizimit 3.2.6'.

Për çdo $y\in F(x)$ marrim si bashkësi hapur që përmban y rruzullin $V=B(y,\varepsilon)$. Nga përkufizimi 3.2.6' gjendet një fqinjësi U e x e tillë që për çdo $x\in U$ kemi $F(x)\cap V\neq\phi$. Kështu që ekziston $r>0$ e tillë që $B(x,r)\subset U$ dhe çdo $x'\in B(x,r)$ bën pjesë në $F^{-}(V)$. Le të jetë x_n një varg çfarëdo në X që konvergjon në x. Termat e këtij vargu bëjnë pjesë në B(x,r) duke filluar nga një indeks natyror n_0 dhe si rrjedhim bëjnë pjesë edhe në $F^{-}(V)$. Kështu që për çdo $n\geq n_0$ shkruajmë $F(x_n)\cap V\neq\phi$ dhe si rrjedhim gjenden $y_n\in F(x_n)$ dhe $y_n\in V$. Pra është e qartë se vargu y_n konvergjon në y. Treguam në këtë mënyrë që multifunksioni F(x) është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë edhe sipas përkufizimit 3.2.6. ▫

Gjenden multifunksione të cilët kënaqin njërën nga gjysmëvazhdueshmëritë por nuk kënaqin gjysmëvazhdueshmërinë tjetër.
Për shembull multifunksioni $F_1:R\rightarrow 2^R$ i përcaktuar nga barazimi:

$$F_1(x) = \begin{cases} [-1,1] & për\ x \neq 0 \\ \{0\} & për\ x = 0 \end{cases}$$

Është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në zero, por nuk është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në të.
Për të treguar se multifunksioni $F_1(x)$ është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë, bazuar në përkufizimin 3.2.6 duhet që, për y = 0 dhe për çdo varg x_n që konvergjon në zero të gjendet vargu y_n i tillë që $y_n \in F_1(x_n)$ dhe konvergjon në y = 0. Në këtë rast, për çdo varg x_n që konvergjon në zero kemi që $F_1(x_n) = [-1,1]$ dhe si rrjedhim mjafton të marrim $y_n = x_n \in F_1(x_n)$.
Arsyetimi është mjaft i thjeshtë edhe në rastin kur nisemi nga përkufizimi 3.2.6'. Në këtë rast, çdo bashkësi e hapur që pret F(0)={0} është fqinjësi e zeros. Kështu që mjafton të marrim U=V.

Të tregojmë se multifunksioni F_1 nuk është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në 0.
Duke marrë $\mathcal{U} = \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ si fqinjësi të $F_1(0) = \{0\}$, vërejmë se për çdo r > 0 dhe për çdo $x' \in B(0,r)$ të ndryshëm nga zeroja, bashkësia $F_1(x') = [-1,1] \not\subset \mathcal{U}$. Pra nuk plotësohet përkufizimi 3.2.4.
Nëse nisemi nga përkufizimi 3.2.4', mjafton të theksojmë se jo çdo e hapur në R që përmban zeron përmban edhe $[-1,1]$. ▫

Multifunksioni $F_2:R\rightarrow 2^R$ i përcaktuar nga barazimi:

$$F_2(x) = \begin{cases} \{0\} & për\ x \neq 0 \\ [-1,1] & për\ x = 0 \end{cases}$$

Është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në zero, por nuk është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në të. Për të treguar se multifunksioni $F_2(x)$ është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër, bazuar në përkufizimin 3.2.4 duhet që, për çdo $\mathcal{U}$ fqinjësi të $F_2(0) = [-1,1]$ të gjendet një r > 0 e tillë që për çdo $x' \in B(0,r)$ bashkësia $F_2(x') \subset \mathcal{U}$.
Nga përkufizimi 3.2.2 është e qartë se çdo $\mathcal{U}$ fqinjësi e $F_2(0) = [-1,1]$ përmban [-1,1]. Kështu që duke u nisur nga vlerat e mundëshme të multifunksionit F_2 është e qartë që kushti plotësohet, pra ky multifunksion është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në zero.
Meqë çdo bashkësi e hapur në R që përmban $F_2(0) = [-1,1]$, përmban të gjitha vlerat e mundëshme të F_2, rrjedh se ky multifunksion është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në zero edhe sipas përkufizimit 3.2.4'.

Nga ana tjetër, për y ≠ 0 gjendet vargu $x_n = \frac{1}{n}$ që konvergjon në zero i tillë që, për çdo varg $y_n \in F_2(x_n) = \{0\}$ kemi që vargu y_n konvergjon në zero dhe jo në pikën y. Pra gjendet një $y \in F_2(0)$ i tillë që, gjendet vargu x_n në R konvergjent në zero për të cilin

çdo varg $y_n \in F_2(x_n)$ nuk konvergjon në y. Kështu treguam se multifunksioni $F_2(x)$ nuk është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në zero.
Duke u nisur nga përkufizimi 3.2.6', pra duke e menduar R si hapësirë topologjike të pajisur të themi me topologjinë e zakonshme, shkruajmë: Gjendet bashkësia $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e cila është e hapur dhe pret $F_2(0) = [-1,1]$ por, për çdo fqinjësi të zeros gjenden pikat jo zero për të cilat vlera e F_2 është bashkësia $\{0\}$ që nuk e pret bashkësinë $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Kështu që cënohet përkufizimi.▫

Prandaj paraqesim përkufizimin që vijon:

Përkufizim 3.2.8
Multifunksioni F quhet i vazhdueshëm në pikën $x \in X$ në qoftë se ai është njëkohësisht gjysmë i vazhdueshëm nga sipër dhe gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në x, dhe ai quhet i vazhdueshëm në qoftë se dhe vetëm në qoftë se është i vazhdueshëm në çdo pikë të bashkësisë së përcaktimit të tij.

Le të ndalemi tani disa veti të multifunksioneve gjysmë të vazhdueshëm nga sipër.

Ka vend pohimi i mëposhtëm:

Pohim 3.2.9 [1]
Le të jetë $F:X \rightarrow 2^Y$ një multifunksion dhe X,Y hapësira topologjike. Pohimet e mëposhtëme janë të njëvlershme.

(i) F është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër.

(ii)Në qoftë se bashkësia $V \subset Y$ është e hapur atëherë edhe bashkësia $F^+(V)$ është e hapur në X.

(iii)Në qoftë se bashkësia $W \subset Y$ është e mbyllur atëherë edhe bashkësia $F^-(W)$ është e mbyllur në X.

Është e qartë se njëvlershmëria e përkufizimeve të gjysmëvazhdueshmërisë dhe fakti që (ii) rrjedh menjëherë nga përkufizimi na lejojnë të themi se (ii) mbetet e vërtetë edhe në rastin kur X dhe Y janë hapësira metrike. Nga ana tjetër (iii) mbetet e vërtetë sepse për të treguar (iii) bazohemi thjesht në barazimet $F^-(M) = X \setminus F^+(Y \setminus M)$; $F^+(Y \setminus M) = X \setminus F^-(M)$. Kështu që pohimi 3.2.9 është i vërtetë edhe në rastin e hapësirave metrike.

Pohimi i mëposhtëm është me interes sepse ai paraqet një karakterizim të gjysmëvazhdueshmërisë nga sipër me gjuhën e vargjeve.
Pohim 3.2.10 [1]
Le të jenë X dhe Y hapësira metrike, $F:X \rightarrow 2^Y$ dhe $x_0 \in X$. Pohimet e mëposhtëm janë ekuivalente.
(i) F është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në x_0.
(ii)Për çdo varg x_n që konvergjon në x_0 dhe $V \subset Y$ bashkësi të hapur të tillë që $F(x_0) \subset V$ gjendet $n_0 \in N$ i tillë që $F(x_n) \subset V$ për çdo $n \geq n_0$.

Në rastin kur X dhe Y janë hapësira të normuara apo të kuazi normuara mund të adaptojmë konceptin e funksionit Lipschitz-ien në atë të multifunksionit Lipschitz-ien.

Përkufizim 3.2.11
Multifunksioni F:X$\rightarrow 2^Y$ është Lipschitz-ien rreth pikës x$\in$X në qoftë se gjenden $l > 0$ dhe fqinjësia $\mathcal{U}_x$ e pikës x të tilla që, për çdo dy pika $x_1, x_2 \in \mathcal{U}_x$ ka vend relacioni $F(x_1) \subset F(x_2) + l\|x_1 - x_2\|B_Y$ku B_Y është shënuar rruzulli njësi në Y.

Kemi vënë re se ka vend pohimi që vijon.
Pohim 3.2.12 [12]
Çdo multifunksion F:X$\rightarrow 2^Y$ Lipschitz-ien rreth pikës x$\in$X është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në pikën x.
Vërtetim
Konsiderojmë rastin e hapësirave të kuazi normuara të cilat janë hapësira metrike sipas metrikës d të përcaktuar në 1.1 (në mënyrë analoge trajtohet edhe rasti i hapësirave të normuara).
Meqë $\mathcal{U}_x$, ekzistenca e të cilit garantohet në përkufizimin 3.2.11, është fqinjësi e pikës x, atëherë gjendet një r > 0 e tillë që B(x,r) $\subset \mathcal{U}_x$.
Kështu që për çdo $\varepsilon_1 = min\left\{r, \left(\frac{\varepsilon}{l}\right)^p\right\}$ ku p i korrespondon p-normës ekuivalente me kuazi normën në X dhe ε është një numër pozitiv sado i vogël, kemi që $B(x, \varepsilon_1) \subset \mathcal{U}_x$.
Nga ana tjetër F(x) është Lipschitz-ien rreth pikës x dhe si rrjedhim për çdo $x^{'} \in B(x, \varepsilon_1)$ shkruajmë $F(x^{'}) \subset F(x) + l\|x^{'} - x\|B_Y$. Nga relacioni i fundit vërejmë se: për çdo y$\in F(x^{'})$ gjenden $y_1 \in F(x)$ dhe $y_2 \in l\|x^{'} - x\|B_Y$ të tilla që $y = y_1 + y_2$.Kështu që $d(y_1, y) = \|y_1 - y\|^p = \|y_2\|^p \leq l\frac{\varepsilon}{l} = \varepsilon$ na lejon të shkruajmë d(F(x),y)≤ ε.
Pra kemi treguar se $F(x^{'}) \subset B(F(x), \varepsilon)$, që i jep fund vërtetimit.▫

Shënim 3.2.13 [12]
Vërtetimi i pohimit të mësipërm mund të bëhet edhe duke u bazuar në faktin që hapësira e kuazi normuar është një hapësirë vektoriale topologjike. Bashkësia $l\|x^{'} - x\|B_Y$ është një fqinjësi e zeros dhe duke marrë brendësisnë e saj, nëse ajo nuk është e hapur, arrijmë në përfundimin se: Bashkësia $F(x) + l\|x^{'} - x\|B_Y$ është një bashkësi e hapur në Y që përmban $F(x^{'})$ (kemi parasysh që shuma e një bashkësie çfarëdo me një bashkësi të hapur është bashkësi e hapur [6]). Zgjedhja e pikave x dhe $x^{'}$ sado afër na lejon të themi që çdo bashkësi e hapur në Y që përmban F(x) e përmban atë bashkë me një bashkësi të tipit $F(x) + l\|x^{'} - x\|B_Y$.
Kështu që nga përkufizimi 3.2.11 rrjedh menjëherë gjysmëvazhdueshmëria nga sipër e F(x) në pikën x. ▫

Vërejtje 3.2.14 [12]
Meqë relacioni në përkufizimin 3.2.11 ka vend për çdo dy pika $x_1, x_2 \in \mathcal{U}_x$ dhe vërtetimi i pohimit 3.2.12 përdor këtë relacion duke fiksuar njërën pikë si x dhe tjetrën si pikë çfarëdo në një rruzull me qendër në x arrijmë në përfundimin se: Në qoftë se multifunksioni F:X$\rightarrow 2^Y$ Lipschitz-ien rreth pikës x$\in$X atëherë gjendet një fqinjësi e x-it, konkretisht $B(x, \varepsilon_1)$ i përmendur në vërtetim, ku F(x) është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër. ▫

Vërejtje 3.2.15 [12]
E anasjellta e pohimi 3.2.12 nuk është e vërtetë.
Le t'i rikthehemi shembullit të multifunksionit F_2:R→2^R të përcaktuar nga barazimi:

$$F_2(x) = \begin{cases} \{0\} & për\ x \neq 0 \\ [-1,1] & për\ x = 0 \end{cases}$$

Më lart kemi treguar se ky multifunksion është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në pikën zero. Nga ana tjetër, nëse marrim një fqinjësi çfarëdo të zeros dhe pikën x' në këtë fqinjësi sado afër zeros, vërejmë se F(0) = [-1,1] $\not\subset$ {0}+ $l|x' - 0|B_Y$ = B(0,ε) ku ε = $l\varepsilon'$<1, për numrin pozitiv sado i vogël ε' që është largesa e pikës x' nga zeroja. Prandaj përkufizimi 3.2.11 nuk plotësohet dhe multifunksioni nuk është Lipschitz-ien rreth pikës zero. ▫

Duke u bazuar në karakterizimin me anë të të hapurave të paraqitur në pohimin 3.2.9 (ii) vërejmë se ka vend pohimi që vijon:
Pohim 3.2.16 [1]
Le të jenë X,Y,Z hapësira topologjike (metrike), F_1:X→2^Y dhe F_2:Y→2^Z multifunksione gjysmë të vazhdueshëm nga sipër atëherë $F_2 \circ F_1$:X→2^Z është gjithashtu gjysmë i vazhdueshëm nga sipër.
Vërtetim
Po paraqesim një vërtetim për të qartësuar pohimin e përmendur në [1] dhe të formuluar aty në rastin e hapësirave topologjike.
Nga ndërtimi i kompozimit ($F_2 \circ F_1$)(x) = $\bigcup_{y \in F_1(x)} F_2(y)$ për çdo x∈X.
Le të jetë V⊂ Z një bashkësi e hapur çfarëdo.
Duhet treguar se bërthama $(F_2 \circ F_1)^+(V) = \{x \in X : (F_2 \circ F_1)(x) \subset V\}$ është bashkësi e hapur në X.
Për çdo x∈$(F_2 \circ F_1)^+(V)$ kemi që për çdo y∈F_1(x) ka vend relacioni F_2(y)⊂V. Kështu që F_1(x)⊂ $F_2^+(V)$, e cila nga pohimi 3.2.9 (ii) është bashkësi e hapur në Y. Si rrjedhim nga përkufizmi 3.2.4' gjendet një fqinjësi U (në rastin e hapësirave metrike gjendet rruzulli B(x,r)) e x e tillë që U⊂ $F_1^+(F_2^+(V))$ (në rastin e hapësirave metrike B(x,r)⊂ $F_1^+(F_2^+(V))$). Nga ana tjetër vihet re lehtë se është i vërtetë barazimi $F_1^+\left(F_2^+(V)\right) = (F_2 \circ F_1)^+(V)$ dhe kjo i jep fund vërtetimit. ▫

Pohim 3.2.17 [1]
Në qoftë se X ,Y janë hapësira topologjike (metrike) dhe multifunksionet F_1:X→2^Y , F_2:X→2^Y janë gjysmë të vazhdueshëm nga sipër atëherë edhe multifunksioni $F_1 \cup F_2$ është gjithashtu gjysmë i vazhdueshëm nga sipër.

Vërtetim
Po paraqesim një vërtetim për të qartësuar pohimin e përmendur në [1] dhe të formuluar aty në rastin e hapësirave topologjike.
Mjafton të tregojmë se për çdo bashkësi të hapur V⊂Y bërthama $(F_1 \cup F_2)^+(V)$ është bashkësi e hapur në X.
Vërejmë fillimisht se ka vend barazimi $(F_1 \cup F_2)^+(V) = {F_1}^+(V) \cap {F_2}^+(V)$.
Le të jetë x∈$(F_1 \cup F_2)^+(V)$= $\{x \in X : F_1(x) \cup F_2(x) \subset V\}$, atëherë janë të vërteta njëkohësisht relacionet $F_1(x) \subset V$ dhe $F_2(x) \subset V$. Kështu që arrijmë në përfundimin se $(F_1 \cup F_2)^+(V) \subset {F_1}^+(V) \cap {F_2}^+(V)$.

Nga ana tjetër, nëse x∈ ${F_1}^+(V) \cap {F_2}^+(V)$ atëherë të vërteta njëkohësisht relacionet $F_1(x) \subset V$ dhe $F_2(x) \subset V$ dhe si rrjedhim $F_1(x) \cup F_2(x) \subset V$. Pra kemi treguar se ka vend relacioni ${F_1}^+(V) \cap {F_2}^+(V) \subset (F_1 \cup F_2)^+(V)$.
Meqë multifunksionet F_1 dhe F_2 janë gjysmë të vazhdueshëm nga sipër, nga pohimi 3.2.9, bashkësitë ${F_1}^+(V)$ dhe ${F_2}^+(V)$ janë të hapura në X. Kështu që edhe bashkësia $(F_1 \cup F_2)^+(V) = {F_1}^+(V) \cap {F_2}^+(V)$ është e hapur në X. ▫

Duke u bazuar në vetinë: Për çdo bashkësi të mbyllur F dhe për çdo bashkësi të hapur G të tillë që F⊂G në një hapësirë topologjike normale, gjendet një bashkësi e hapur U që F⊂U⊂ $\overline{U}$⊂G; tregohet lehtë se ka vend pohimi i mëposhtëm.
Pohim 3.2.18 [1]
Në qoftë se F:X→2^Y është një multifunksion gjysmë i vazhdueshëm nga sipër dhe Y është një hapësirë topologjike normale atëherë $\bar{F}$: X→2^Y,i tillë që për çdo x∈X, $\bar{F}(x) = \overline{F(x)}$ është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër.

Vërejtje 3.2.19 [12]
Meqë në një hapësirë metrike çdo fqinjësi e një bashkësie është edhe fqinjësi e mbylljes së saj, nga përkufizimi 3.2.4 arrijmë në përfundimin se multifunksionet F:X→2^Y dhe $\bar{F}$: X→2^Y ku X,Y janë hapësira metrike, janë (ose nuk janë) njëkohësisht gjysmë të vazhdueshëm nga sipër.

Siç u theksua më lart bashkimi i dy multifunksioneve gjysmë të vazhdueshëm nga sipër është multifunksion gjysmë i vazhdueshëm nga sipër. Shtrohet pyetja: Ç'mund të thuhet për prerjen e dy multifunksioneve gjysmë të vazhdueshëm nga sipër ?
Supozojmë se F_1:X→2^Y , F_2:X→2^Y janë multifunksione të tillë që $F_1(x) \cap F_2(x) \neq \phi$ për çdo x∈X.

Po ashtu kemi vënë se ka vend pohimi që vijon:

Pohim 3.2.20 [12]
Në qoftë se F_1:X→2^Y , F_2:X→2^Y janë multifunksione me vlera të mbyllura gjysmë të vazhdueshëm nga sipër dhe Y është hapësirë topologjike normale atëherë edhe multifunksioni $F_1 \cap F_2$ është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër.
Vërtetim
Le të jetë V⊂Y një bashkësi e hapur e tillë që $F_1(x) \cap F_2(x) \subset V$. Bashkësitë $F_1(x) \setminus V$ dhe $F_2(x) \setminus V$ janë të mbyllura jo prerëse, sepse $(F_1(x) \setminus V) \cap (F_2(x) \setminus V) = F_1(x) \cap V^c \cap F_2(x) \subset V \cap V^c = \emptyset$. Meqë hapësira Y është hapësirë topologjike normale, gjenden të hapurat jo prerëse G_1 dhe G_2 të tilla që $F_1(x) \setminus V \subset G_1$ dhe $F_2(x) \setminus V \subset G_2$. Kështu që $F_1(x) \subset G_1 \cup V$ dhe $F_2(x) \subset G_2 \cup V$. Si përfundim: çdo e bashkësi e hapur V ⊂Y që përmban $F_1(x) \cap F_2(x)$ shprehet si prerje e dy bashkësive të hapura, në këtë rast $G_1 \cup V$ dhe $G_2 \cup V$, që përmbajnë përkatësisht $F_1(x)$ dhe $F_2(x)$.
Meqë $F_1(x)$ dhe $F_2(x)$ janë gjysmë të vazhdueshëm nga sipër në pikën x∈X, gjenden fqinjësitë $\mathcal{U}_x, \mathcal{V}_x$ të pikës x të tilla që: Për çdo $x' \in \mathcal{U}_x$ dhe për çdo $x'' \in \mathcal{V}_x$ të jenë të vërteta relacionet $F_1(x') \subset G_1 \cup V$ dhe $F_2(x'') \subset G_2 \cup V$.
Prandaj për çdo x∈$\mathcal{U}_x \cap \mathcal{V}_x = \mathcal{W}_x$ kemi $F_1(x) \cap F_2(x) \subset V$. ▫

Duke patur parasysh se hapësira e kuazi normuar është hapësirë vektoriale topologjike e metrizueshme dhe që çdo hapësirë metrike është hapësirë topologjike normale, arrijmë në përfundimin se ka vend përfundimi që vijon.

Rrjedhim 3.2.21 [12]
Në qoftë se F_1:X→2^Y , F_2:X→2^Y janë multifunksione me vlera të mbyllura, gjysmë të vazhdueshëm nga sipër dhe X,Y janë hapësira të kuazi normuara atëherë edhe multifunksioni $F_1 \cap F_2$ është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër.

Siç vërehet në [14], prerja e dy multifunksioneve është gjysmë e vazhdueshme nga sipër edhe nëse ndonjëri prej tyre nuk e gëzon këtë veti.

Pohim 3.2.22 [14]
Le të jenë F,G: X→2^Y dy multifunksione . Në qoftë se F është i mbyllur dhe G është kompakt dhe gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në x∈X atëherë F∩G është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër në x.

Të trajtojmë rastin e shumës së dy multifunksioneve.
Pohim 3.2.23 [1]
Në qoftë se F_1:X→2^Y , F_2:X→2^Y janë multifunksione me vlera kompakte, gjysmë të vazhdueshëm nga sipër dhe Y është hapësirë vektoriale topologjike atëherë F_1 + F_2 është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër.
Vërtetim[5]
Meqë në një hapësirë vektoriale topologjike, shuma algjebrike e dy bashkësive kompakte është bashkësi kompakte [6], arrijmë në përfundimin se: për çdo x∈X, $F_1(x) + F_2(x)$ është bashkësi kompakte në Y.
Prandaj për çdo bashkësi të hapur G në Y të tillë që $F_1(x) + F_2(x) \subset G$, gjendet një fqinjësi e hapur W e zeros dhe një nënbashkësi e fundme $\phi \subset F_1(x) + F_2(x)$ të tilla që $F_1(x) + F_2(x) \subset \phi + W \subset F_1(x) + F_2(x) + W \subset G$ (teorema 5.9 në [6]).
Për çdo fqinjësi W të zeros gjendet një fqinjësi U e zeros e tillë që $U+U \subset W$. Nga ana tjetër për çdo x∈X, $F_1(x) \subset F_1(x) + U$ dhe $F_2(x) \subset F_2(x) + U$. Kështu që ka vend relacioni $F_1(x) + F_2(x) \subset F_1(x) + U + F_2(x) + U \subset F_1(x) + F_2(x) + W \subset G$.
Meqë bashkimi i një bashkësie çfarëdo me një bashkësi të hapur është bashkësi e hapur [6], bashkësitë $F_1(x) + U$ dhe $F_2(x) + U$ janë dy bashkësi të hapura që përmbajnë përkatësisht $F_1(x)$ dhe $F_2(x)$.
Nisur nga fakti që multifunksionet $F_1(x)$ dhe $F_2(x)$ janë gjysmë të vazhdueshëm nga sipër, gjenden fqinjësitë $\mathcal{U}_x^1$ dhe $\mathcal{U}_x^2$ të tilla që: për çdo $x' \in \mathcal{U}_x^1$ (përkatësisht për çdo $x' \in \mathcal{U}_x^2$) ka vend relacioni $F_1(x') \subset F_1(x) + U$ (përkatësisht $F_2(x') \subset F_2(x) + U$). Prandaj për çdo $x' \in \mathcal{U}_x = \mathcal{U}_x^1 \cap \mathcal{U}_x^2$ kemi $F_1(x') + F_2(x') \subset F_1(x) + U + F_2(x) + U \subset G$.
Kështu kemi treguar se multifunksioni $F_1(x) + F_2(x)$ është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër. ▫

Trajtojmë tani disa veti të multifunksioneve gjysmë të vazhdueshëm nga poshtë.
Pohim 3.2.24 [1]
Çdo multifunksion F:X→2^Y i hapur është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë.
Vërtetim
Po paraqesim një vërtetim të pohimit, i cili vlen për rastin kur X dhe Y janë hapësira topologjike, pra edhe kur ato janë hapësira të kuazi normuara.

[5] E shohim me interes të paraqesim një vërtetim të këtij pohimi që është formuluar në [1].

Nisur nga fakti që multifunksioni F:X→2^Y është i hapur, pra grafi i tij është bashkësi e hapur në topologjinë produkt X×Y, shkruajmë se graph(F) = $\{(x,y): y \in F(x)\} = G_1 \times G_2$ ku G_1, G_2 janë bashkësi të hapura përkatësisht në hapësirat X dhe Y.
Për çdo x∈X dhe për çdo bashkësi të hapur V ⊂ Y të tillë që $F(x) \cap V \neq \emptyset$ kemi që $(G_1 \times G_2) \cap (G_1 \times V) \neq \emptyset$. Nga ana tjetër bashkësia $(G_1 \times G_2) \cap (G_1 \times V)$ është e hapur në topologjinë produkt X×Y dhe si rrjedhim gjendet një fqinjësi $\mathcal{U}_x \subset X$ e tillë që $\mathcal{U}_x \times (G_2 \cap V) \subset (G_1 \times G_2) \cap (G_1 \times V)$. Kështu që për çdo x∈$\mathcal{U}_x$ dhe y∈$G_2 \cap V$ kemi që (x,y)∈ $(G_1 \times G_2) \cap (G_1 \times V)$. Si rrjedhim (x,y) është një pikë e grafit te F, domethënë y∈F(x), dhe njëkohësisht y∈V. Prandaj për çdo x∈$\mathcal{U}_x$ ka vend relacioni x∈$F^-(V)$. Kështu treguam se multifunksioni F(x) plotëson përkufizimin 3.2.6'. ▫

Rrjedhim 3.2.25[12]
Çdo multifunksion F:X→2^Y me vlera të hapura është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë.
Vërtetim
Meqë bashkësia e përcaktimit të një multifunksioni është X atëherë ka vend barazimi GraphF = X × $(\bigcup_{x\in X} F(x))$. Bashkësia $\bigcup_{x\in X} F(x)$ është e hapur në Y dhe si rrjedhim bashkësia GraphF është e hapur në hapësirën X ×Y, pra F është i hapur. ▫

Vërejtje 3.2.26 [12]
Gjenden multifunksione gjysmë të vazhdueshëm nga poshtë që nuk janë të hapur.
Vërtet
Ndërtojmë multifunksionin F:[0,1]→$2^{[0,1]}$ të tillë që

$$F(x) = \begin{cases} \{0,1\} \ për\ x = 0 \\ (0,1) \ për\ x \neq 0 \end{cases}$$

ku nënhapësirat X=Y=[0,1] të R janë pajisur me topologjinë e zakonshme në R.
Të tregojmë fillimisht se ky multifunksion është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë.
Le të jetë V një bashkësi e hapur në Y e tillë që F(0)$\cap V \neq \emptyset$. Në këto kushte të paktën njëra nga pikat 0 ose 1 është pikë e bashkësisë së hapur V.
Kështu që gjendet një $\delta > 0$ e tillë që $[0, \delta) \subset V$ ose $]1-\delta, 1] \subset V$ dhe si rrjedhim për çdo x≠0 ka vend relacioni F(x)$\cap V \neq \emptyset$, gjë që garanton gjysmë vazhdueshmërinë e multifunksionit F(x) në pikën x = 0.
Marrim x≠0 dhe V një bashkësi e hapur në Y e tillë që F(x)$\cap V \neq \emptyset$. Në këto kushte gjendet një pikë x∈(0,1) e tillë që x∈V. Kështu që për çdo x≠0 ka vend relacioni F(x)$\cap V \neq \emptyset$, gjë që garanton gjysmë vazhdueshmërinë e multifunksionit F(x) në pikën x ≠ 0.
Nga ana tjetër vërejmë se GraphF = $\{(0,0),(0,1),(0,1] \times (0,1)\}$ që nuk është bashkësi e hapur në hapësirën produkt [0,1] ×[0,1].
Duket qartë që pikat (0,0) dhe (0,1) nuk janë pika të brendëshme të GraphF, pasi çdo fqinjësi e tyre në hapësirën produkt [0,1] ×[0,1] përmban edhe pika nga segmenti që bashkon këto dy pika i cili përveç skajeve nuk shtrihet në GraphF. ▫

Në ngjashmëri me pohimin 3.2.9, në rastin e gjysmëvazhdueshmërisë nga poshtë ka vend ky pohim:
Pohim 3.2.27 [1]
Le të jetë F:X→2^Y një multifunksion dhe X,Y hapësira topologjike. Pohimet e mëposhtëme janë të njëvlershme.

(i) F është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë.

(ii)Në qoftë se bashkësia $V \subset Y$ është e hapur atëherë edhe bashkësia $F^{-}(V)$ është e hapur në X.

(iii)Në qoftë se bashkësia $W \subset Y$ është e mbyllur atëherë edhe bashkësia $F^{+}(W)$ është e mbyllur në X.

Pohimi i mëposhtëm është me interes sepse ai paraqet një karakterizim të gjysmëvazhdueshmërisë nga poshtë me gjuhën e vargjeve.

Pohim 3.2.28 [1]

Le të jenë X dhe Y hapësira metrike, $F: X \to 2^{Y}$ dhe $x_0 \in X$. Pohimet e mëposhtëm janë të njëvlershme.

(i) Në qoftë se x_n është një varg i tillë që $x_n \to x_0$ dhe $V \subset Y$ një nënbashkësi e hapur e tillë që $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$,atëherë gjendet $n_0 \geq 1$ e tillë që $F(x_n) \cap V \neq \emptyset$ për çdo $n \geq n_0$.

(ii) Në qoftë se x_n është një varg i tillë që $x_n \to x_0$ dhe $y_0 \in F(x_0)$ e çfarëdoshme, atëherë gjendet një varg y_n i tillë që $y_n \in F(x_n)$ dhe $y_n \to y_0$.

(iii) F është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në x_0.

Pohimet që vijojnë na lejojnë të shohim se çfarë veprimesh mund të kryhen me multifunksionet gjysmë të vazhdueshëm nga poshtë pa cënuar këtë veti.

Pohim 3.2.29 [1]

Në qoftë se $F: X \to 2^{Y}$ është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë atëherë edhe $\bar{F}: X \to 2^{Y}$ është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë.

Vërtetim[6]

Le të jetë $x \in X$ e çfarëdoshme.

Për çdo bashkësi $V \subset Y$ të hapur të tillë që $\overline{F(x)} \cap V \neq \emptyset$ gjendet $y \in \overline{F(x)}$ dhe njëkohësisht $y \in V$. Kështu që y është pikë takimi e F(x) dhe meqë V është e hapur arrijmë në përfundimin se $F(x) \cap V \neq \emptyset$. Nga ana tjetër F(x) është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në x dhe si rrjedhim gjendet një fqinjësi $\mathcal{U}_x \subset X$ e tillë që, për çdo $x \in \mathcal{U}_x$ ka vend relacioni $F(x) \cap V \neq \emptyset$. Prandaj për çdo $x \in \mathcal{U}_x$ ka vend edhe relacioni $\overline{F(x)} \cap V \neq \emptyset$.

Treguam kështu se multifunksioni $\overline{F(x)}$ plotëson përkufizimin 3.2.6’. ▫

Tregohet lehtë se ka vend edhe e anasjellta e pohimit të mësipërm.

Pohim 3.2.30 [12]

Në qoftë se $\bar{F}: X \to 2^{Y}$ është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë atëherë edhe $F: X \to 2^{Y}$ është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë.

Vërtetim

Le të jetë $x \in X$ e çfarëdoshme dhe $V \subset Y$ një bashkësi e hapur e tillë që $F(x) \cap V \neq \emptyset$.

Meqë $F(x) \subset \overline{F(x)}$ atëherë ka vend relacioni $\overline{F(x)} \cap V \neq \emptyset$.

Nga përkufizimi i gjysmëvazhdueshmërisë nga poshtë për multifunksionin $\overline{F(x)}$ shkruajmë:

Gjendet një fqinjësi $\mathcal{U}_x \subset X$ e pikës x e tillë që për çdo $x \in \mathcal{U}_x$ ka vend relacioni $\overline{F(x)} \cap V \neq \emptyset$.

Kështu që gjenden pika takimi të bashkësisë F(x) që bëjnë pjesë në bashkësinë e hapur V dhe si rrjedhim nga përkufizimi i pikës së takimit arrijmë në përfundimin se $F(x) \cap V \neq \emptyset$.

[6]E shohim me interes të paraqesim një vërtetim të këtij pohimi që është formuluar në [1].

Treguam kështu se multifunksioni F(x) plotëson përkufizimin 3.2.6'. ▫

Kështu që arrijmë në përfundimin:

• Multifunksioni F:X→2^Y është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë atëherë dhe vetëm atëherë kur multifunksioni $\bar{F}$: X→2^Y është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë.

Pohim 3.2.31 [1]
Le të jenë X,Y,Z hapësira topologjike (metrike), F_1:X→2^Y dhe F_2:Y→2^Z multifunksione gjysmë të vazhdueshëm nga poshtë atëherë $F_2 \circ F_1$:X→2^Z është gjithashtu gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë.
Vërtetim
Po paraqesim këtu një vërtetim të bazuar në pohimin 3.2.27 (ii).
Le të jetë V një bashkësi e hapur në Z. Të tregojmë se bashkësia $(F_2 \circ F_1)^-(V) = \{x \in X: (F_2 \circ F_1)(x) \cap V \neq \emptyset\}$ është e hapur në X.
Le të jetë x∈$(F_2 \circ F_1)^-(V)$ e çfarëdoshme. Nga relacioni $(F_2 \circ F_1)(x) \cap V = \left[\bigcup_{y \in F_1(x)} F_2(y)\right] \cap V \neq \emptyset$ arrijmë në përfundimin se gjendet një $y_0 \in F_1(x)$ i tillë që $F_2(y_0) \cap V \neq \emptyset$.
Multifunksioni F_2 është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në pikën $y_0 \in Y$ dhe si rrjedhim gjendet një fqinjësi $\mathcal{U}_{y_0}$ e tillë që për çdo y∈$\mathcal{U}_{y_0}$ kemi $F_2(y) \cap V \neq \emptyset$.
Marrim një bashkësi të hapur U që përmban y_0 dhe përfshihet në $\mathcal{U}_{y_0}$ (një bashkësi e tillë gjendet gjithnjë sepse në rastin e hapësirës topologjike fqinjësia e përmban pikën së bashku me një të hapur, në rastin e hapësirës metrike si të hapur mund të marrim një rruzull të hapur me qendër në y_0 e rreze sado të vogël). Është i vërtetë relacioni $F_1(x) \cap U \neq \emptyset$ dhe duke patur parasysh se multifunksioni $F_1(x)$ është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë arrijmë në përfundimin se, gjendet një fqinjësi $\mathcal{U}_x \subset X$ e tillë që, për çdo x∈$\mathcal{U}_x$ ka vend relacioni $F_1(x) \cap U \neq \emptyset$.

Kështu treguam se gjendet një fqinjësi $\mathcal{U}_x$ e tillë që, për çdo x∈$\mathcal{U}_x$ kemi që gjendet $y_0 \in F_1(x) \cap U$ dhe për çdo y∈U kemi $F_2(y) \cap V \neq \emptyset$ dhe kështu që $(F_2 \circ F_1)(x) \cap V \neq \emptyset$.▫

Pohim 3.2.32 [1]
Në qoftë se X ,Y janë hapësira topologjike (metrike) dhe multifunksionet F_1:X→2^Y , F_2:X→2^Y janë gjysmë të vazhdueshëm nga poshtë atëherë edhe multifunksioni $F_1 \cup F_2$ është gjithashtu gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë.
Vërtetim
E shohim me interes të paraqesim një vërtetim të këtij pohimi që është formuluar në [1].

Mjafton të tregojmë se për çdo bashkësi të hapur V⊂Y bashkësia $(F_1 \cup F_2)^-(V)$ është e hapur në X.
Le të jetë x∈$(F_1 \cup F_2)^-(V) = \{x \in X: [F_1(x) \cup F_2(x)] \cap V \neq \emptyset\}$.
Nga barazimi $[F_1(x) \cup F_2(x)] \cap V = (F_1(x) \cap V) \cup (F_2(x) \cap V)$ rrjedh se ka vend relacioni $(F_1 \cup F_2)^-(V) \subseteq F_1^-(V) \cup F_2^-(V)$.
Për çdo x∈$F_1^-(V) \cup F_2^-(V)$ ka vend relacioni $F_1(x) \cap V \neq \emptyset$ ose $F_2(x) \cap V \neq \emptyset$ dhe si rrjedhim $[F_1(x) \cup F_2(x)] \cap V \neq \emptyset$. Kështu treguam se $F_1^-(V) \cup F_2^-(V) \subseteq (F_1 \cup F_2)^-(V)$.
Vërtetësia e relacioneve të mësipërm na lejon të shkruajmë se ka vend barazimi $(F_1 \cup F_2)^-(V) = F_1^-(V) \cup F_2^-(V)$. Meqë multifunksionet F_1, F_2 janë gjysmë të

vazhdueshëm nga poshtë atëherë bashkësitë $F_1^-(V)$ dhe $F_2^-(V)$ janë të hapura në X dhe si rrjedhim edhe bashkësia $(F_1 \cup F_2)^-(V)$ është e hapur në X.

Lemë 3.2.33

Në qoftë se F_1:X$\rightarrow 2^Y$, F_2:X$\rightarrow 2^Y$ janë multifunksione të hapur dhe për çdo x$\in$X ka vend relacioni $F_1(x) \cap F_2(x) \neq \emptyset$ atëherë edhe multifunksioni $F_1 \cap F_2$ është i hapur dhe si rrjedhim është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë.

Vërtetim

Së pari vihet re lehtë vërtetësia e barazimit që vijon:

$$\text{Graph}(F_1 \cap F_2) = \{(x,y): x \in X, y \in F_1(x) \cap F_2(x)\} =$$
$$\{(x,y): x \in X, y \in F_1(x)\} \cap \{(x,y): x \in X, y \in F_2(x)\} =$$
$$= \text{Graph}F_1 \cap \text{Graph } F_2.$$

Meqë multifunksionet F_1 dhe F_2 janë të hapur grafet e tyre janë bashkësi të hapura në hapësirën topologjike X×Y dhe si rrjedhim edhe grafi i multifunksionit $F_1 \cap F_2$ është i hapur në X×Y. ▫

Pohim 3.2.34 [1]

Le të jenë F_1:X$\rightarrow 2^Y$ multifunksion gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë dhe F_2:X$\rightarrow 2^Y$ multifunksion i hapur të tillë që për çdo x$\in$X ka vend relacioni $F_1(x) \cap F_2(x) \neq \emptyset$. Atëherë multifunksioni $F_1 \cap F_2$ është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë.

Vërtetim

E shohim me interes të paraqesim një vërtetim të këtij pohimi më sipër të formuluar në [1].

Trajtojmë rastin kur multifunksioni F_1:X$\rightarrow 2^Y$ është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë por jo i hapur (rasti kur ky multifunksion është i hapur është trajtuar në lemën 3.2.33).

Grafi i multifunksionit F_1:X$\rightarrow 2^Y$ nuk është bashkësi e hapur në hapësirën produkt X×Y dhe si rrjedhim gjendet $(x_0, y_0)\in$Graph F_1 e tillë që për çdo fqinjësi $\mathcal{U}_{(x_0,y_0)}$ të pikës (x_0, y_0) ka vend relacioni $\mathcal{U}_{(x_0,y_0)} \not\subset$ Graph F_1.

Meqë bashkësia e përcaktimit të çdo multifunksioni është X atëherë nga relacioni më sipër rrjedh se për çdo x$\in$X dhe për çdo fqinjësi V_{y_0} gjendet $y' \in V_{y_0}$ i tillë që $y' \notin F_1(x)$. Kështu që bashkësia $F_1(x_0)$ nuk e përmban pikën y_0 së bashku me një fqinjësi të saj, domethënë kjo bashkësi nuk është e hapur në Y.

Marrim një bashkësi të hapur çfarëdo V$\subset$Y dhe shohim bashkësinë $(F_1 \cap F_2)^-(V) = \{x \in X: F_1(x) \cap F_2(x) \cap V \neq \emptyset\}$.

Shënojmë A = $\{(x,y) \in \text{X} \times \text{Y}: \forall \mathcal{U}_{(x,y)}, \mathcal{U}_{(x,y)} \not\subset \text{Graph F1}\}$.

Dallojmë rastet:

Rasti 1. Në bashkësinë $(F_1 \cap F_2)^-(V)$ bën pjesë ndonjë pikë x_0 e tillë që $(x_0, y_0)\in$A.

Të tregojmë se gjendet një bashkësi e hapur V_{x_0} në X e tillë që $x_0 \in V_{x_0} \subset (F_1 \cap F_2)^-(V)$.

Meqë $y_0 \in F_1(x_0)$ por nuk është pikë e brendëshme e saj arrijmë në përfundimin se $y_0 \in Fr(F_1(x_0))$, ku $Fr(F_1(x_0))$ është shënuar kufiri i bashkësisë $F_1(x_0)$.

Barazimi bashkësior $F_1(x_0) = F_1^0(x_0) \cup Fr(F_1(x_0))$ ku $F_1^0(x_0)$ është shënuar brendësia e bashkësisë $F_1(x_0)$, sjell që $x_0 \in (F_1^0 \cap F_2)^-(V) \cup (Fr(F_1) \cap F_2)^-(V)$.

Multifunksioni $F_1^0: X \to 2^Y$ i të tillë që çdo x$\in$X i ve në korrespondencë $F_1^0(x)$, është me vlera të hapura dhe si rrjedhim është i hapur. Kështu që nga lema 3.2.32 arrijmë në përfundimin se bashkësia $(F_1^0 \cap F_2)^-(V)$ është e hapur në X. Nga ana tjetër është e qartë se ka vend relacioni $(F_1^0 \cap F_2)^-(V) \subset (F_1 \cap F_2)^-(V)$. Kështu që, në qoftë se bashkësia $F_2(x_0) \cap V$ përmban pika të brendëshme të $F_1(x_0)$ atëherë pika x_0 përfshihet në bashkësisë $(F_1 \cap F_2)^-(V)$ së bashku me një bashkësi të hapur.

Na mbetet të trajtojmë rastin kur $x_0 \in (Fr(F_1) \cap F_2)^-(V)$ dhe bashkësia $F_2(x_0) \cap V$ nuk përmban pika të brendëshme të $F_1(x_0)$.

Supozojmë se për çdo të hapur V_{x_0} në X që përmban pikën x_0, gjendet një pikë $x' \in V_{x_0}$ e tillë që $Fr(F_1(x')) \cap F_2(x^{'}) \cap V = \emptyset$.

Në qoftë se ka vend relacioni $x' \in (F_1^0 \cap F_2)^-(V)$ atëherë gjysmëvazhdueshmëria nga poshtë në pikën x' e multifunksionit $F_1^0 \cap F_2$ na lejon të themi se gjendet një fqinjësi $V_{x'}$ e pikës x' e tillë që për çdo $x'' \in V_{x'}$ kemi $F_1^0(x'') \cap F_2(x^{'}{'}) \cap V \neq \emptyset$.

Në qoftë se pika x_0 nuk bën pjesë në $V_{x'}$ atëherë largojmë nga bashkësia e hapur V_{x_0} pikat që bëjnë pjesë njëkohësisht edhe në $V_{x'}$ (një gjë e tillë është e mundur pasi pika x' është pikë e brendëshme e V_{x_0}). Nëse bashkësia e mbetur nuk është e hapur atëherë pikat e kufirit që ajo përmban i rrethojmë me një të hapur që përmbahet në V_{x_0}. Kështu ndërtojmë një të hapur që përmban pikën x_0 , të cilën po e shënojmë sërisht me V_{x_0}, më të ngushtë se ajo e mëparshmja.

Duke patur parasysh se edhe për këtë të hapur gjendet një pikë $x' \in V_{x_0}$ e tillë që $Fr(F_1(x')) \cap F_2(x^{'}) \cap V = \emptyset$ dhe nëse ka vend relacioni $x' \in (F_1^0 \cap F_2)^-(V)$ themi se : Ndërtohet një bashkësi e hapur që përmban pikën x_0 akoma më e ngushtë e cila plotëson të njëjtin kusht si më lart.

Në këtë mënyrë duke vazhduar këtë procedurë të ngushtimit të bashkësisë V_{x_0}verejmë se patjetër do të arrijmë në një hap të caktuar kur procedura përfundon pra, gjendet një fqinjësi $V_{x'}$ e pikës x' që përban edhe pikën x_0. Në të kundërt do të ekzistonte një e hapur V_{x_0} që përmban pikën x_0 e tillë që $Fr(F_1(x')) \cap F_2(x^{'}) \cap V \neq \emptyset$ për çdo $x^{'} \in V_{x_0}$, që kundërshton supozimin.

Nga ana tjetër, meqë $x_0 \in V_{x'}$ ka vend relacioni $F_1^0(x_0) \cap F_2(x_0) \cap V \neq \emptyset$ i cili nuk është i vërtetë në rastin që po shqyrtojmë.

Kështu që mbetet të pranojmë se supozimi që: për çdo të hapur V_{x_0} në X që përmban pikën x_0, gjendet një pikë $x' \in V_{x_0}$ e tillë që $Fr(F_1(x')) \cap F_2(x^{'}) \cap V = \emptyset$, është i gabuar. Pra pika x_0 përfshihet në bashkësinë $F^-(Fr(F_1) \cap F_2)$ së bashku me një bashkësi të hapur.

Treguam kështu që multifunksioni $F_1 \cap F_2$ është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në pikën x_0 e tillë që $(x_0, y_0) \in$A.

Të tregojmë tani se ky multifunksion është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë edhe në pikat x të tilla që (x,y) $\notin$A për çdo y$\in F_1(x)$. Kështu që gjendet një fqinjësi $V_{(x,y)}$ e pikës (x,y) e tillë që $V_{(x,y)} \subset Graph(F_1)$.

Meqë multifunksioni F_2 është i hapur gjendet një fqinjësi $V_{(x,y)}^{'}$ e pikës (x,y) e tillë që $V_{(x,y)}^{'} \subset Graph(F_2)$.

Në këto kushte $V_{(x,y)}^{''} = V_{(x,y)} \cap V_{(x,y)}^{'}$ është një fqinjësi e pikës (x,y) e tillë që $V_{(x,y)}^{''} \subset Graph(F_1 \cap F_2)$.

Siç dihet në topologjinë produkt $V_{(x,y)}^{''} = V_x^{''} \times V_y^{''}$ ku $V_x^{''}$ dhe $V_y^{''}$ janë fqinjësi përkatësisht të pikave x në X dhe y në Y.

Le të jetë V një bashkësi e hapur në Y e tillë që $F_1(x) \cap F_2(x) \cap V \neq \emptyset$.

Meqë V është bashkësi e hapur në Y gjendet një fqinjësi $V_y \subset V$ dhe në kushtet e supozimit që (x,y) $\notin$A për çdo y$\in F_1(x)$ arrijmë në përfundimin se $V_y \cap V_y^{''} \neq \emptyset$.

Kështu që gjendet një fqinjësi $\tilde{V}_y = V_y \cap V_y^{''} \subset V$ e pikë y në Y e tillë që $V_x^{''} \times \tilde{V}_y \subset V_{(x,y)}^{''} \subset Graph(F_1 \cap F_2)$.
Pra arrijmë në përfundimin se gjendet një fqinjësi $V_x^{''}$ e pikës x në X e tillë që, për çdo $x^{'} \in V_x^{''}$ ka vend relacioni $\tilde{V}_y \subset F_1(x^{'}) \cap F_2(x^{'}) \cap V$. Ky relacion i fundit tregon se multifunksioni $F_1 \cap F_2$ është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë në pikën x.
Rasti 2. Në bashkësinë $(F_1 \cap F_2)^{-}(V)$ nuk bën pjesë asnjë pikë x_0 e tillë që $(x_0, y_0) \in$A.
Ky rast trajtohet njëlloj si ai i gjysmëvazhdueshmërisë në pikën x të tillë që (x,y) $\notin$A për çdo y$\in F_1(x)$, i cili u trajtua më lart. ▫

Të trajtojmë tani shumën e dy multifunksioneve me vlera në një hapësirë vektoriale topologjike.

Pohim 3.2.35 [1]
Në qoftë se $F_1 : X \to 2^Y$ dhe $F_2 : X \to 2^Y$ janë multifunksione gjysmë të vazhdueshëm nga poshtë dhe Y është një hapësirë vektoriale topologjike atëherë edhe multifunksioni $F_1 + F_2 : X \to 2^Y$ është gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë.
Vërtetim[7]
Le të jetë V një bashkësi e hapur në Y e tillë që $[F_1(x_0) + F_2(x_0)] \cap V \neq \emptyset$ dhe $y_0 \in [F_1(x_0) + F_2(x_0)] \cap V$.
Në këto kushte gjenden y_1, y_2 përkatësisht në $F_1(x_0)$ dhe $F_2(x_0)$ të tilla që $y_0 = y_1 + y_2 \in V$.
Meqë V është bashkësi e hapur, gjendet një fqinjësi $V_{y_0} \subset V$. Nga ana tjetër në një hapësirë vektoriale topologjike $V_{y_0} = y_0 + V_0$ ku V_0 është një fqinjësi e zeros.
Duke ditur se, për çdo fqinjësi të zeros V_0 gjendet një fqinjësi e zeros $\mathcal{U}$ e tillë që $\mathcal{U} + \mathcal{U} \subset V_0$ ka vend relacioni $y_0 + \mathcal{U} + \mathcal{U} \subset V$.
Kështu që janë të vërtetë relacionet:

$$\begin{cases} (1)\ F_1(x_0) \cap (y_1 + \mathcal{U}) \neq \emptyset \\ (2)\ F_2(x_0) \cap (y_2 + \mathcal{U}) \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow (3)\ [F_1(x_0) + F_2(x_0)] \cap (y_0 + \mathcal{U} + \mathcal{U}) \neq \emptyset$$

Gjysmëvazhdueshmëria nga poshtë e multifunksioneve F_1, F_2 dhe relacionet (1), (2) na lejojnë të shkruajmë se: Gjenden fqinjësitë $V_{x_0}^{'}$ dhe $V_{x_0}^{''}$ të pikës x_0 të tilla që

$$F_1(x^{'}) \cap (y_1 + \mathcal{U}) \neq \emptyset \text{ dhe } F_2(x^{'}) \cap (y_2 + \mathcal{U}) \neq \emptyset$$

për çdo $x^{'}$ që bën pjesë përkatësisht në fqinjësinë $V_{x_0}^{'}$ dhe $V_{x_0}^{''}$.
Relacionet e mësipërm mbeten të vërteta edhe për çdo $x^{'} \in V_{x_0}$, ku $V_{x_0} = V_{x_0}^{'} \cap V_{x_0}^{''}$.
Kështu që, gjenden $y_1^{'}$, $y_2^{'}$ përkatësisht në $F_1(x^{'}) \cap (y_1 + \mathcal{U})$ dhe $F_2(x^{'}) \cap (y_2 + \mathcal{U})$ dhe si rrjedhim, $y_1^{'} + y_2^{'}$ bën pjesë njëkohësisht në bashkësitë $F_1(x^{'}) + F_2(x^{'})$ dhe $(y_1 + \mathcal{U}) + (y_2 + \mathcal{U}) = y_0 + \mathcal{U} + \mathcal{U}$. Prandaj arrijmë në përfundimin se për çdo $x^{'} \in V_{x_0}$ka vend relacioni $[F_1(x^{'}) + F_2(x^{'})] \cap (y_0 + \mathcal{U} + \mathcal{U}) \neq \emptyset \implies [F_1(x^{'}) + F2x'\cap V \neq \emptyset$. Treguam kështu se multifunksioni $F1+F2$ plotëson përkufizimin 3.2.6' në pikën e çfarëdoshme $x_0 \in X$. ▫

[7] E shohim me interes të paraqesim një vërtetim të këtij pohimi që është formuluar në [1].

Siç dihet (përkufizimi 3.2.8), multifunksioni $F: X \to 2^Y$ është i vazhdueshëm në qoftë se ai është njëkohësisht gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë dhe nga sipër. Kështu që, nga sa thamë më lart, kemi vënë re se janë të vërteta pohimet:

Pohim 3.2.36 [12]
Në qoftë se $F_1: X \to 2^Y$ dhe $F_2: X \to 2^Y$ janë multifunksione të vazhdueshëm dhe X,Y janë hapësira të kuazi normuara atëherë multifunksionet $F_2 \circ F_1$ dhe $F_1 \cup F_2$ janë të vazhdueshëm.

Pohim 3.2.37 [12]
Le të jenë X,Y hapësira të kuazi normuara. Multifunksioni $F: X \to 2^Y$ është i vazhdueshëm atëherë dhe vetëm atëherë kur multifunksioni $\bar{F}: X \to 2^Y$ është i vazhdueshëm.

Pohim 3.2.38 [12]
Le të jenë X,Y hapësira të kuazi normuara dhe $F_1: X \to 2^Y$, $F_2: X \to 2^Y$ dy multifunksione të tillë që çdo $x \in X$ ka vend relacioni $F_1(x) \cap F_2(x) \neq \emptyset$. Janë të vërteta pohimet:
(a) Në qoftë se F_1, F_2 janë të hapur, me vlera të mbyllura dhe gjysmë të vazhdueshëm nga sipër atëherë multifunksioni $F_1 \cap F_2$ është i vazhdueshëm.
(b) Në qoftë se F_1 është multifunksion i vazhdueshëm, me vlera të mbyllura dhe F_2 është multifunksion i hapur, me vlera të mbyllura dhe gjysmë i vazhdueshëm nga sipër atëherë multifunksioni $F_1 \cap F_2$ është i vazhdueshëm.

Pohim 3.2.39 [12]
Në qoftë se $F_1: X \to 2^Y$ dhe $F_2: X \to 2^Y$ janë multifunksione të vazhdueshëm me vlera kompakte dhe X,Y janë hapësira të kuazi normuara atëherë multifunksioni $F_1 + F_2$ është i vazhdueshëm.

3.3 Matshmëria

Le të jetë (X,Σ) një hapësirë e matshme. Në rastin kur masa në Σ është σ- e fundme do të themi se X është σ- e fundme, në rastin kur masa në Σ është e plotë do të themi se X është e plotë. Në qoftë se X është një hapësirë topologjike, atëherë σ-algjebra më e vogël që përmban të gjithë bashkësitë e hapura quhet σ-algjebër e Borelit dhe shënohet $\mathcal{B}(X)$.
Y përgjithësisht është një hapësirë e metrizueshme separabël.

Një relacion (multifunksion) quhet i matshëm (dobësisht i matshëm, B- i matshëm , K- i matshëm) vetëm kur $F^{-}(B)$ është nënbashkësi e matshme për çdo bashkësi të mbyllur (respektivisht, të hapur, të Borelit dhe kompakte) B të Y.

Natyrshëm lind pyetja: A ekziston ndonjë ‘‘lidhje’’ ndërmjet kuptimeve të mësipërm të matshmërive të relacioneve (multifunksioneve)?

Kemi vënë re se:

Vërejtje 3.3.1
(i) Çdo multifunksion B- i matshëm është i matshëm (dobësisht i matshëm).

(ii)Le të jetë (X,Σ) një hapësirë e matshme. Në qoftë se multifunksioni $F: X \to 2^Y$ është me vlera të mbyllura dhe Y është hapësirë metrike separabël atëherë F është i matshëm atëherë dhe vetëm atëherë kur ai është dobësisht i matshëm, atëherë dhe vetëm atëherë kur ai është K-i matshëm, (pra në këtë rast konceptet e mësipërme të matshmërisë janë të njëvlershëm).
(iii) Në qoftë se multifunksioni $F: X \to 2^Y$ është i matshëm dhe Y është hapësirë topologjike e Hausdorfit atëherë ai është K- i matshëm.
(iv) Në qoftë se multifunksioni $F: X \to 2^Y$ është K- i matshëm dhe Y është hapësirë topologjike kompakte atëherë ai është i matshëm.
(v)Le të jetë (X,Σ) një hapësirë e matshme e Lebegut. Në qoftë se multifunksioni $F: X \to 2^Y$ është i vazhdueshëm atëherë ai është i matshëm (dobësisht i matshëm).
Vërtetim
(i) Meqë për çdo bashkësi të Borelit B kemi që $F^{-}(B)$ është nënbashkësi e matshme e X, atëherë për çdo bashkësi B të hapur (të mbyllur, si plotës i një bashkësie të hapur) bashkësia $F^{-}(B)$ është gjithashtu nënbashkësi e matshme e X.
(ii)Njëvlershmëria e koncepteve të matshmërisë, dobësisht matshmërisë dhe K-matshmërisë është trajtuar në [1].
(iii) Meqë në një hapësirë topologjike të Hausdorfit çdo bashkësi kompakte është e mbyllur, atëherë çdo multifunksion $F: X \to 2^Y$ i matshëm është edhe K- i matshëm.
(iv) Ky pohim rrjedh menjëherë nga fakti që, çdo bashkësi e mbyllur në një hapësirë topologjike kompakte është kompakte.
(v) Në qoftë se multifunksioni $F: X \to 2^Y$ është i vazhdueshëm atëherë ai është njëkohësisht gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë dhe nga sipër.
Gjysmëvazhdueshmëria nga poshtë garanton që, për çdo bashkësi të hapur G ⊂ Y bashkësia $F^{-}(G)$është e hapur në X, pra Lebeg e matshme.
Gjysmëvazhdueshmëria nga sipër garanton që, për çdo bashkësi të mbyllur M⊂ Y bashkësia $F^{-}(M)$ është e mbyllur në X, pra Lebeg e matshme. ▫

Vërejtje 3.3.2 [14]
Në qoftë se (X,Σ) një hapësirë e matshme σ-e fundme e plotë atëherë multifunksioni $F: X \to 2^Y$ është i matshëm atëherë dhe vetëm atëherë kur është dobësisht i matshëm.

Gjithashtu në rastin e hapësirës së matshme σ-e fundme ka vend pohimi që vijon:

Pohim 3.3.3 [14]
Le të jenë (X,Σ) një hapësirë e matshme σ-e fundme e plotë ku Σ përmban gjithë nënbashkësitë e hapura të X, Y është hapësirë metrike e plotë separabël dhe multifunksioni $F: X \to 2^Y$me vlera të mbyllura. Në qoftë se F është gjysmë i vazhdueshëm nga sipër (nga poshtë) atëherë F është i matshëm.

Është e qartë se një pohim i ngjashëm formulohet edhe kur Y është hapësirë kuazi-Banah saparabël.

Po paraqesim tani shembullin e një multifunksioni që është njëkohësisht i matshëm, dobësisht i matshëm, B-matshëm, K-i matshëm.
Shembull 3.3.4
Ndërtojmë multifunksionin $F: X \to 2^Y$ si vijon:
Marrim një bashkësi B⊂ Y të çfarëdoshme dhe për çdo x∈X shënojmë F(x) = B (ky multifunksion njihet si multifunksion konstant).

Vihet se lehtë [1] se, çdo multifunksion konstant është i matshëm (dobësisht i matshëm, B- i matshëm , K- i matshëm).

Pohimi i mëposhtëm paraqet një lidhje ndërmjet koncepteve të gjysmëvazhdueshmërisë nga poshtë dhe B-matshmërisë.

Pohim 3.3.5 [1]
Në qoftë se X është hapësirë metrike e plotë atëherë çdo multifunksion $F: X \rightarrow 2^Y$ gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë është B- i matshëm.

Nisur nga fakti që çdo hapësirë e kuazi-normuar është hapësirë vektoriale topologjike e metrizueshme arrijmë në përfundimin:
•Në qoftë se X është hapësirë kuazi Banah atëherë çdo multifunksion $F: X \rightarrow 2^Y$ gjysmë i vazhdueshëm nga poshtë është B- i matshëm.

Tani po paraqesim disa veprime me multifunksionet e matshëm.
Nisur nga fakti që, për çdo bashkësi B dhe për çdo bashkësi të hapur G ka vend relacioni $B \cap G \neq \emptyset \Leftrightarrow \bar{B} \cap G \neq \emptyset$, mund të pohojmë se:

Pohim 3.3.6[1]
Multifunksioni F: $X \rightarrow 2^Y$ është dobësisht i matshëm vetëm kur $\bar{F}: X \rightarrow 2^Y$ është dobësisht i matshëm.

Duke arsyetuar në mënyrë të ngjashme tregohet se ka vend pohimi i mëposhtëm.
Pohim 3.3.7 [1]
Në qoftë se F: $X \rightarrow 2^Y$ dhe G: $X \rightarrow 2^Y$ janë multifunksione të tillë që F është dobësisht i matshëm dhe F(x)⊂G(x)⊂ $\overline{F(x)}$ për çdo x∈X atëherë G është dobësisht i matshëm.

Le të jetë $F_n: X \rightarrow 2^Y$ një varg multifunksionesh. Tregohet lehtë se, për çdo bashkësi A⊂Y ka vend barazimi $(\bigcup_n F_n)^-(A) = \bigcup_n F_n^-(A)$. Kështu që është i vërtetë pohimi që vijon:

Pohim 3.3.8
Në qoftë se $F_n: X \rightarrow 2^Y$ janë multifunksione të matshëm (dobësisht të matshëm, B-të matshëm, K-të matshëm) atëherë edhe $\bigcup_n F_n : X \rightarrow 2^Y$ është i matshëm (dobësisht i matshëm, B-i matshëm, K-i matshëm).

Vërejmë gjithashtu se një pohim pothuajse i ngjashëm vlen edhe për prerjen e multifunksioneve.
Pohim 3.3.9
Në qoftë se $F_n: X \rightarrow 2^Y$ janë multifunksione të matshëm (dobësisht të matshëm, B-të matshëm) atëherë edhe $\bigcap_n F_n : X \rightarrow 2^Y$ është i matshëm (dobësisht i matshëm, B-i matshëm).
Vërtetim
Tregohet lehtë se, për çdo A⊂Y ka vend barazimi (1) $(\bigcap_n F_n)^+(A) = \bigcap_n F_n^+(A)$.
Nga ana tjetër, për çdo n∈N ka vend barazimi (2) $F_n^-(A) = X \backslash F_n^+(Y \backslash A)$.
Kështu që, meqë F_n është multifunksion i matshëm (dobësisht të matshëm, B-të matshëm) atëherë për çdo bashkësi M⊂Y të mbyllur (të hapur, të Borelit) bashkësia $F_n^-(M)$ është e matshme.

Nga barazimi (2) rrjedh se bashkësia $F_n^+(Y \backslash M)$ është e matshme për çdo n∈N.
Bashkësia $Y \backslash M$ është e hapur (e mbyllur, e Borelit) dhe barazimi (1) na lejon të themi se bashkësia $(\bigcap_n F_n)^+(A)$ është e matshme për çdo bashkësi A⊂Y të hapur (të mbyllur, të Borelit).
Duke zbatuar barazimin (2) për multifunksionin $\bigcap_n F_n$ arrijmë në përfundimin se, bashkësia $(\bigcap_n F_n)^-(A)$ është e matshme për çdo bashkësi A⊂Y të mbyllur (të hapur, të Borelit). ▫

Gjithashtu janë të vërtetë pohimet e mëposhtëm:

Pohim 3.3.10 [1]
Në qoftë se hapësira Y është hapësirë vektoriale topologjike dhe F_1, F_2: X→2^Y janë multifunksione dobësisht të matshëm atëherë multifunksioni $F_1 + F_2$: X→2^Y është gjithashtu dobësisht i matshëm.
Vërtetim
E shohim me interes të paraqesim një vërtetim të këtij pohimi që është formuluar në [1].
Le të jetë G një bashkësi e hapur në hapësirën Y.
Për çdo $x \in A = \{x \in X: (F_1(x) + F_2(x)) \cap G \neq \emptyset\}$ gjenden $y_1 \in F_1(x), y_2 \in F_2(x)$ të tillë që $y_1 + y_2 = z \in G$.
Kështu që janë të vërteta barazimet $y_1 = z - y_2 \in G - F_2(x)$ dhe $y_2 = z - y_1 \in G - F_1(x)$. Le të shënojmë $B = \{x \in X: F_1(x) \cap [\bigcup_{x\in A}(G - F_2(x))] \neq \emptyset\}$ dhe $C = \{x \in X: F_2(x) \cap [\bigcup_{x\in A}(G - F_1(x))] \neq \emptyset\}$, vërejmë se është i vërtetë barazimi $A = B \cap C$. Meqë diferenca e një bashkësie të hapur me një bashkësi çfarëdo është bashkësi e hapur dhe bashkimi i çfarëdoshëm i bashkësive të hapura është bashkësi e hapur, rrjedh se bashkësitë $\bigcup_{x\in A}(G - F_2(x))$ dhe $\bigcup_{x\in A}(G - F_1(x))$ janë të hapura në Y. Kështu që, matshmëria e dobët e multifunksioneve F_1, F_2 garanton që bashkësitë B dhe C janë të matshme dhe si rrjedhim edhe bashkësia A është e matshme. ▫

Pohim 3.3.11
Në qoftë se multifunksioni F: X→2^Y është i matshëm (dobësisht i matshëm, B- i matshëm , K- i matshëm) dhe λ∈R atëherë edhe multifunksioni λF është gjithashtu (dobësisht i matshëm, B- i matshëm , K- i matshëm).
Vërtetim
Nga vazhdueshmëria e prodhimit me skalar në një hapësirën vektoriale topologjike Y garantohet se për çdo λ∈R^* dhe për çdo bashkësi A të mbyllur (të hapur dhe si rrjedhim edhe për bashkësitë e Borelit dhe ato kompakte) në Y edhe bashkësia λA është po ashtu e mbyllur (e hapur dhe si rrjedhim e Borelit dhe apo kompakte) në Y.
Le të jetë λ∈R^* dhe A një bashkësi çfarëdo në Y. Vërejmë se është i vërtetë barazimi $(\lambda F)^-(A) = \lambda F^-(A)$. Kështu që, rrjedh vërtetësia e pohimit për këtë rast.
Në qoftë se λ = 0 atëherë $F^-(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{në } qofte \text{ se } 0 \in A \\ X & \text{në } qofte \text{ se } 0 \notin A \end{cases}$ dhe meqë bashkësitë ∅ dhe X janë të matshme arrijmë në përfundimin e dëshiruar. ▫

Koncepti i matshmërisë së multifunksioneve është i lidhur ngushtë me konceptin e matshmërisë së selektorëve të tij, për më tepër, një nga mënyrat e përcaktimit të integralit të një multifunksioni është që ta konsiderojmë atë si bashkësinë e integraleve të të gjithë selektorëve të tij. Prandaj është me mjaft interes të studiojmë më hollësisht selektorët e multifunksioneve.

Përkufizim 3.3.12
Për një multifunksion të dhënë $F:X \to 2^Y$, selektor quhet një funksion $f: X \to Y$ i tillë që $f(x) \in F(x)$ p.k sipas masës μ në X.

Le të jetë P një projeksion syrjektiv i $Y \times X$ në Y, $B \subset Y \times X$ dhe $\Omega = P(B)$. Një uniformizim i B është një funksion $f : \Omega \to X$ i tillë që $(t, f(t)) \in B$ për çdo $t \in \Omega$.
Me ndihmën e aksiomës së zgjedhjes një uniformizim i tillë f ekziston gjithnjë. Problemi është ç'mund të themi për cilësitë e f-së kur njihet bashkësia B?
Për shembull, në qoftë se B është bashkësi e Borelit a mund të zgjedhim funksionin f Borel (ose analitik) të matshëm?
Rasti $X = Y = \Omega = [0,1]$, që në fillim të shekullit XX, ka tërhequr vëmendjen e matematikanëve të njohur si Baire, Borel, Hadamard, Lebesgue, Von Neumann, Yankov, Luzin etj.
Është e qartë se për ndonjë B të marrë natyrisht mund të përcaktojmë multifunksionin $F: \Omega \to X$ të tillë që $F(t) = \{x \in X: (t, x) \in B\}$ për çdo $t \in \Omega$. Kështu që vetitë e B janë edhe vetitë e grafit të F dhe uniformizimi i B është një selektor i F.

Multifunksionet e matshëm me vlera të mbyllura kanë selektorë të matshëm. Ky rezultat njihet si Lema e Von Neumann e vërtetuar në vitin1949.
Teoremat bazë mbi ekzistencën e selektorëve të matshëm janë teorema Kuratowski-Ryll Nardzewski (1965) dhe teorema Aumann.

Teoremë 3.**3.13** (Kuratowski-Ryll Nardzewski) [15]
Në qoftë se (X,Σ) është një hapësirë e matshme, Y është një hapësirë metrike separabël, $F:X \to 2^Y$ një multifunksion dobësisht i matshëm , me vlera të mbyllura në Y atëherë multifunksioni F ka një selektor të matshëm f.

Teoremë 3.**3.14** (Aumann)[22]
Në qoftë se (X,Σ) është një hapësirë e matshme σ e fundme, Y një nënbashkësi e Borelit e një hapësire Polish dhe $F:X \to 2^Y$ një multifunksion me graf separabël atëherë gjendet një funksion i matshëm $f:X \to Y$ i tillë që $f(x) \in F(x)$ për $x \in X$ p.k sipas μ.

Nisur nga fakti që ekzistojnë hapësirat e kuazi-normuara separabël, për më tepër çdo hapësirë kuazi-Banah separabël (X,q) me konstante të kuazi-normës C është linearisht homeomorfe me hapësirën herës të $\ell^p[0,1]$ ku $C = 2^{\frac{1}{p-1}}$ ([20]), arrijmë në përfundimin se teorema e Kuratowski-Ryll Nardzewski mbetet e vërtetë edhe kur hapësira Y është hapësirë kuazi-Banah separabël.
Hapësira Polish është një hapësirë separabël e metrizueshme me metrikë të plotë. Nga ana tjetër çdo hapësirë kuazi-Banah separabël është e metrizueshme e plotë dhe separabël. Kështu që teorema Aumann mbetet e vërtetë edhe në rastin kur multifunksioni është me vlera në një hapësirë kuazi-Banah separabël.
Bazuar në përfundimin e arritur më sipër mbi vërtetësinë e teoremave Kuratowski-Ryll Nardzewski dhe Aumann në rastin e multifunksioneve me vlera në një hapësirë kuazi-Banah separabël, mund të studiojmë më thellë matshmërinë e selektorëve në rastin e hapësirave të kuazi normuara separabël.

Vërejmë se është e vërtetë ([7]) kjo lemë:

Lemë 3.3.15
Le të jetë Y një hapësirë e kuazi normuar separabël, F: $X \to 2^Y$ një multifunksion i matshëm me vlera të fundme dhe f :$X \to Y$ një selektor i matshëm i F. Atëherë $x \to F(x)-\{f(x)\}$ përcakton një relacion të matshëm.

Nisur nga lema e mësipërme është e vërtetë teorema:

Teoremë 3.3.16
Le të jetë Y një hapësirë e kuazi normuar separabël dhe F: $X \to 2^Y$ një multifunksion i matshëm me vlera të fundme. Atëherë gjendet një familje të shumtën e numërueshme $\{f_1,f_2,...,f_n,...\}$ e selektorëve të matshëm të F e tillë që $F(x) =\{f_1(x),f_2(x),...,f_n(x),...\}$ për çdo $x \in X$. Për më tepër, në qoftë se çdo F(x) ka të shumtën n elemente atëherë nevojiten të shumtën n prej funksioneve f_i.
Vërtetim
Bazuar në faktin që bashkësitë e fundme në një hapësirë metrike janë të mbyllura, metrizueshmërinë e hapësirës së kuazi normuar, dhe që nëse hapësira është separabël ([7]) dhe multifunksioni është me vlera të mbyllura atëherë matshmëria sjell matshmërinë e dobët, arrijmë në përfundimin se multifunksioni F është dobësisht i matshëm. Kështu që nga teorema Kuratowski-Ryll Nardzewski, gjendet një selektor i matshëm i F. Kjo mundëson hapin e parë të procedurës së ndjekur në teoremën 5.4 të [7], i cili mundëson vërtetimin e teoremës. ▫

Mund të përgjithësojmë teoremën e mësipërme si vijon (vërtetohet njëlloj si teorema 5.6 në [7]):
Teoremë 3.3.17
Le të jetë Y një hapësirë e kuazi normuar separabël dhe F: $X \to 2^Y$ një multifunksion me vlera të plota. Atëherë F është dobësisht i matshëm vetëm kur gjendet një familje e numërueshme U e selektorëve të matshëm të F e tillë që $F(t) = \overline{U(x)}$ për çdo $x \in X$.

Duke u bazuar në teoremën e mësipërme tregohet se ([7]) ka vend kjo teoremë:

Teoremë 3.3.18
Le të jetë Y një hapësirë Fréchet separabël dhe F: $X \to 2^Y$ një relacion dobësisht i matshëm me vlera të mbyllura atëherë multifunksionet coF dhe $\overline{co}F$ (përkatësisht mbështjellësja konvekse dhe mbështjellësja konvekse e mbyllur e F), të përcaktuara nga $x \to$ coF(x) dhe $x \to \overline{co}F(x)$, janë gjithashtu dobësisht të matshëm.

•Kujtojmë se hapësira Fréchet është një F-hapësirë lokalisht konvekse. Kështu që duke iu referuar seksionit 1.6 dhe teoremës Aoki-Rolewicz arrijmë në përfundimin se teorema më sipër është e vërtetë edhe nëse Y është një hapësirë Banah separabël.

•Siç dihet, një funksion $f:X \to Y$ quhet fortësisht i matshëm (ose thjesht i matshëm) në qoftë se ai është limit i një vargu funksionesh Σ- të thjeshtë f_n: $X \to Y$ p.k sipas μ.

Në vijim (X,Σ,μ) do të jetë një hapësirë e matshme e fundme e plotë dhe $(Y, \|.\|)$ një hapësirë kuazi-Banah. Le të jetë $D \subset X$, përkufizojmë si diametër të bashkësisë D madhësinë $diam(D) = sup_{x,y \in D} \|x-y\|^p$.
Le të jetë Σ^+ familja e bashkësive $A \in \Sigma$ me masë pozitive dhe Σ_A^+ koleksioni i nënbashkësive të A që bëjnë pjesë në Σ^+.

Përkufizim 3.3.19 [5]
Multifunksioni F: $X \to 2^Y$ kënaq vetinë (P) në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$ dhe për çdo $A \in \Sigma^+$ gjendet një $B \in \Sigma_A^+$ dhe $D \subset X$ me diametër diam(D)$\leq \varepsilon$ e tillë që $F(x) \cap D \neq \emptyset$ për çdo $x \in B$ (pra $B \subset F^-$(D)).

Vërejmë se ka vend ky pohim, i cili është i ngjashëm me rastin kur Y është hapësirë Banah [5]:

Pohim 3.3.20
Për funksionin f:$X \to Y$ pohimet e mëposhtëme janë ekuivalente:
(i) f kënaq vetinë (P).
(ii) Për çdo $\varepsilon > 0$ dhe për çdo $A \in \Sigma^+$ gjendet $B \in \Sigma_A^+$ e tillë që diam(f(B))$\leq \varepsilon$.
(iii) f është fortësisht i matshëm.

Vërtetim
Pohimi (ii) është një mënyrë tjetër e të shkruarit të pohimit (i). Kështu që mjafton të tregojmë ekuivalencën e pohimeve (ii) dhe (iii).
(iii) $\Rightarrow$ (ii)
Çdo funksion i thjeshtë ka paraqitjen $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, \chi_{A_k}$ ku a_k janë numra realë jo zero dhe A_k janë bashkësi të matshme dy nga dy jo prerëse. Kështu që për çdo $\varepsilon > 0$ dhe për çdo $A \in \Sigma^+$ gjendet bashkësia $B = A \cap A_k$ për ndonjë k = 1,...,n ku funksioni $\varphi(x) = a_k$ për çdo $x \in B$ dhe si rrjedhim diam(φ(B)) = 0 $\leq \varepsilon$. Nëse $A \cap A_k = \emptyset$ për çdo k = 1,...,n atëherë $\varphi(x) = 0$ për çdo $x \in A$ dhe si bashkësi B mund të zgjedhim çdo nënbashkësi të A pasi $\varphi(B) = \{0\}$. Pra arrijmë në përfundimin që çdo funksion i thjeshtë kënaq (ii).
Meqë f është funksion fortësisht i matshëm, ai është limit i një vargu funksionesh të thjeshtë $(\varphi_n)_{n\in N}$ p.k sipas masës μ. Për çdo $A \in \Sigma^+$ meqë $\mu(A)$ është një numër i fundëm, nga teorema e Egoroff – it garantohet që vargu $(\varphi_n)_{n\in N}$ konvergjon uniformisht p.k tek funksioni f.
Prandaj mund të shkruajmë se, për çdo $\varepsilon > 0$ dhe për çdo $x \in A \in \Sigma^+$ gjendet $n_0 \in N$ e tillë që për çdo $n \geq n_0$ është i vërtetë mosbarazimi $\|\varphi_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$.
Fiksojmë një $n \geq n_0$ të çfarëdoshme dhe marrim $x,y \in f(B)$ ku B korrespondon funksionit të thjeshtë φ_n. Meqë $\|x - y\|^p \leq \|x - x'\|^p + \|x' - y\|^p$ ku $x' \in \varphi_n(B)$ kemi që $\|x - y\|^p < \varepsilon^p + \varepsilon^p = 2\varepsilon^p = \varepsilon'$. Kështu që edhe funksioni f e kënaq pohimin (ii).
(ii) $\Rightarrow$ (iii)
Le të tregojmë fillimisht se për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet një varg bashkësish dy nga dy jo prerëse $(A_n)_{n\in N}$ në Σ dhe një varg $(y_n)_{n\in N}$ në Y i tillë që funksioni g: $X \to Y$ i formës $g = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \chi_{A_n}$ kënaq mosbarazimin $\|f - g\| \leq \varepsilon$ p.k sipas μ.
Për ε pozitiv të çfarëdoshëm duke marrë A = X gjendet $B_1 \subset X$ i tillë që $\mu(B_1)>0$ dhe diam(f(B_1))$\leq\varepsilon$. Zgjedhim një pikë çfarëdo në f(B_1) dhe e shënojmë me x_1 dhe shënojmë po ashtu $A_1 = X \backslash B_1$. Për bashkësinë me masë pozitive A_1 gjendet $B_2 \subset A_1$ e tillë që $\mu(B_2)>0$ dhe diam(f(B_2))$\leq\varepsilon$. Zgjedhim një pikë çfarëdo në f(B_2) dhe e shënojmë me x_2, shënojmë po ashtu $A_2 = A_1 \backslash B_2$. Kështu e vazhdojmë këtë procedurë dhe përftohet një varg $(x_n)_{n\in N}$ në X dhe një varg bashkësish $(A_n)_{n\in N}$ në Σ dy nga dy jo prerëse të tillë që diam(f(B_n))$\leq\varepsilon$ për çdo n natyrore.Nëse në ndonjë hap të procedurës bashkësia $A_n = A_{n-1} \backslash B_n$ e ka masën zero atëherë të gjitha bashkësitë e tjera të vargut bashkësior i marrim boshe dhe elementet e tjerë të vargut të elementeve të X i marrim të njëjta me elementin x_{n-1}.Kështu që kushtet e mësipërme për vargun e bashkësive dhe diametrin e f(B_n) mbeten të plotësuara.

Ndërtojmë funksionin g: X→Y të formës g = $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \chi_{A_n}$ dhe vërejmë se:
Meqë vargu i bashkësive $(A_n)_{n\in N}$ është i tillë që vargu i masave të tyre tenton pambarimisht drejt zeros (duket qartë nga procedura), atëherë për x∈X p.k sipas μ kemi $\|x_n - f(x)\|^p \leq \varepsilon$ për çdo n natyrore. Pra $\|f - g\|^p \leq \varepsilon \Leftrightarrow \|f - g\| \leq \varepsilon'$ p.k sipas μ.
Shënojmë me g_n = $\sum_{k=1}^{n} y_k \chi_{A_k}$ vargun e funksioneve, në këtë rast të shkallëzuar, i cili konvergjon tek funksioni g p.k sipas μ. Kështu që nga teorema e Aoki-Rolewicz dhe nga pohimi 1.2.2 mund të garantojmë se f është limit i vargut të funksioneve të thjeshtë g_n p.k sipas μ, pra është funksion fortësisht i matshëm.▫

Njëlloj si në rastin e hapësirës së normuar ([5]) tregohet se ka vend pohimi:

Pohim 3.3.21
Le të jetë F: X→2^Y një multifunksion. Janë të vërteta pohimet:
(i) Në qoftë se gjendet një multifunksion G: X→2^Y që kënaq vetinë (P) i tillë që G(x) ⊂ F(x) p.k sipas μ për x∈X, atëherë F kënaq vetinë (P).
(ii) Në qoftë se F ka selektor fortësisht të matshëm atëherë F kënaq vetinë (P).

3.4 Integrimi i multifunksioneve
Hyrje
Disa autorë kanë përcaktuar integralin e multifunksioneve. Përmendim këtu Aumann, Debreu dhe Artstein-Burns. Integrali i Aumann-it është përcaktuar duke përdorur selektorët e integrueshëm, ndërsa Debreu konsideroi multifunksionet me vlera konvekse dhe kompakte dhe paraqiti bashkësinë e vlerave të integraleve si një integral Bochner-i. Së fundi Artstein dhe Burns ndoqën idenë e Kurzëeil duke përdorur një përkufizim të tipit të Rimann-it. Kohët e fundit Jarnik dhe Kurzweil përmirësuan përkufizimin e Artstein dhe Burns duke përftuar aplikime në fushën e diferencueshmërisë.
Këtu do të ndalemi në integralin e Aumann-it dhe të Bochner-it në rastin kur vlerat e multifunksionit janë nënbashkësi të një hapësire kuazi-Banah separabël dhe do të bëhet një krahasim ndërmjet këtyre tipeve të integraleve. Po paraqesim fillimisht një biografi të shkurtër të Robert Aumann, njërit prej themeluesve të kësaj teorie.
Robert Aumann lindi më 8 Qershor 1930 në Frankfurt të Gjermanisë. Ai është një matematikan izraelit, i cili ndau Çmimin Nobel për Ekonomi në 2005 me Thomas C. Schelling.Kontributi i tij kryesor në ekonomi përfshin analizën e takimeve të përsëritura jo bashkëvepruese, një lëndë në disiplinën matematike të teorisë së lojrave. Aumann emigroi me familjen e tij në Shtetet e Bashkuara në 1938. Ai u arsimua në kolegjin e qytetit të New York (1950) dhe në institutin e teknologjisë të Massachusetts (1952 ku mori titullin doktor në 1955) duke vijuar me punën post doktorale në Universitetin e Princeton. Në vitin 1956 Aumann u zhvendos në Israel ku ishte anëtar i fakultetit të matematikës të Universitetit Hebre të Jerusalemit deri sa doli në pension në vitin 2000. Ai gjithashtu shërbeu si këshilltar në bordet editoriale të disa revistave akademike, sidomos në International Journal of games theory, revistë e matematikës ekonomike dhe teorisë së lojrave dhe sjelljes ekonomike.

3.4.1 Integrali i Aumann-it dhe disa veti të tij
Le të jetë (X,Σ,μ) një hapësirë e matshme σ-e fundme e plotë dhe Y një hapësirë kuazi-Banah separabël.

Shënojmë me $\mathcal{F}$ bashkësinë e gjithë selektorëve të multifunksionit $F:X\to 2^Y$ të integrueshëm sipas masës μ, pra $\mathcal{F} = \{f \in L^1(X,Y,\mu): f(x) \in F(x) \text{ p.k sipas } \mu \text{ mbi } X\}$.

Përkufizim 3.4.1.1 [14]
Një multifunksion $F:X\to 2^Y$quhet integrueshmërisht i kufizuar në qoftë se gjendet një funksion me vlera jonegative $f(x) \in L^1(X,R,\mu)$ i tillë që $F(x) \subset f(x)B$ p.k sipas μ mbi X, ku B është shënuar rruzulli njësi i Y ([14]).

Në qoftë se $F:X \to 2^{cb(Y)}$ është një multifunksion me vlera konvekse, të mbyllura dhe të kufizuara atëherë përkufizimi i mësipërm mund të jepet edhe si më poshtë.

Përkufizim 3.4.1.2 [3]
Një multifunksion $F:X \to 2^{cb(Y)}$ është integrueshmërisht i kufizuar në qoftë se gjendet një funksion me vlera jo negative $g\in L^1(X,\Sigma,\mu,R^+)$ i tillë që $h(F(x),\{0\}) \le g(x)$ p.k sipas μ mbi X (ku $h(F(x),\{0\}) = \max\{e(F(x),\{0\}), e(\{0\},F(x))\}$ është kuazi-distanca e përmendur në pohimin 1.1.5).
Tregohet lehtë se këto përkufizime janë të njëvlershëm.

Aumann sugjeroi një tjetër përkufizim për intergralin e një multifunksioni, si vijon:
Përkufizim 3.4.1.3 [23]
Integral i multifunksionit $F:X\to 2^Y$ quhet bashkësia e integraleve të selektorëve të integrueshëm të F, pra $\int_X F d\mu = \left\{\int_X f d\mu : f \in \mathcal{F}\right\}$.
Në vijim do të themi se multifunksioni F është i integrueshëm sipas Aumann-it në qoftë se bashkësia $\left\{\int_X f d\mu : f \in \mathcal{F}\right\}$ është jo boshe.

Menjëherë nga përkufizimi i mësipërm vërejmë se:

- Në rastin e funksionit $f: X\to Y$, pra kur multifunksioni ka vlera bashkësi njëelementëshe, integrali i Aumann-it i f-së përputhet me integralin e Bochner-it të tij.Kështu që çdo funksion $f: X\to Y$ i integrueshëm sipas Aumann-it është μ-i matshëm.
- Çdo multifunksion i integrueshëm sipas Aumann-it ka selektorë të integrueshëm sipas Bochner-rit, pra ka selektorë të μ-matshëm.
- Le të jetë (X,Σ,μ) një hapësirë e matshme e fundme e plotë dhe multifunksioni $F:X\to 2^Y$ i integrueshëm sipas Aumann-it. Nga pohimi 3.3.21(ii) arrijmë në përfundimin se multifunksioni F kënaq vetinë (P) të përkufizimit 3.3.19.

Le të japim një shembull të një multifunksioni të integrueshëm sipas Aumann-it.
Shembull 3.4.1.4 [13]
Çdo multifunksion konstant $F:X\to 2^Y$ është i integrueshëm sipas Aumann-it.
Vërtet
Meqë multifunksioni F është konstant, pra për çdo $x\in X$ ka vend barazimi $F(x) = B$ ku $B\subset Y$ e fiksuar, mjafton të marrim selektorët konstantë $f:X\to Y$ të tillë që për çdo $x\in X$ kemi $f(x) = y_0 \in B$. Këta selektorë mund të shihen si funksione të thjeshtë të formës $f(x) = y_0\chi_A$ ku A është një nënbashkësi e matshme e X që përmban x-in së bashku me një fqinjësi, pra funksioni f është Bochner i integrueshëm. ▫

Po t'i referohemi Aumann ([23]), është i vërtetë pohimi:

Pohim 3.4.1.5 [23]
Në qoftë se $F: T \to 2^{E^n}$, ku T = [0,1] dhe E^n është një hapësirë Euklidiane n-dimensionale, është Borel i matshëm dhe integrueshmërisht i kufizuar atëherë ai është i integrueshëm sipas Aumann-it.

Të shohim tani se si mund të formulojmë ndonjë pohim të ngjashëm me të mësipërmin në rastin tonë. Fillimisht vërejmë se ka vend kjo lemë:
Lemë 3.4.1.6 [13]
Le të jetë (X,Σ,μ) një hapësirë e matshme me masë të fundme. Në qoftë se F:X→2^Y është një multifunksion që ka selektorë të matshëm dhe integrueshmërisht i kufizuar atëherë ky multifunksion është i integrueshëm sipas Aumann-it.
Vërtetim
Meqë multifunksioni F është integrueshmërisht i kufizuar atëherë gjendet një funksion me vlera jonegative $f(x) \in L^1(X, R, \mu)$ i tillë që $F(x) \subset f(x)B$ p.k sipas μ mbi X, ku B është shënuar rruzulli njësi i Y. Nga ana tjetër sipas supozimit të lemës, gjendet një selektor i matshëm g i F-së. Kështu që g(x)∈f(x)B p.k sipas μ mbi X. Ky fakt na tregon se ||g(x)|| ≤ f(x) p.k sipas μ mbi X dhe si rrjedhim funksioni me vlera reale ||g(x)|| është i integrueshëm sipas Lebegut.
Meqë g është funksion i matshëm gjendet një varg funksionesh të thjeshtë $(g_n)_{n\in N}$ i tillë që $\lim_{n\to+\infty} g_n = g$ p.k sipas μ mbi X. Kështu që, për çdo ε > 0 gjendet një $n_0 \in N$ i tillë që për çdo $n \geq n_0$ ka vend mosbarazimi $\|g_n(x) - g(x)\| < \varepsilon$.
Nga vetia e tretë e kuazi normës kemi që: $\|g_n(x)\| \leq K\|g_n(x) - g(x)\| + K\|g(x)\| < K\varepsilon + Kf(x)$ p.k sipas μ mbi X. Funksioni K(ε + f(x)) është gjithashtu i integrueshëm jo negativ dhe meqë vargu $(\|g_n(x)\|)_{n\in N}$ është varg funksionesh me vlera reale, nga teoria e integralit të Lebegut në R, arrijmë në përfundimin se vargu $(\|g_n(x)\|)_{n\in N}$ është varg funksionesh të integrueshëm sipas Lebegut.
Nga ana tjetër mosbarazimi $\|g_n(x) - g(x)\| \leq K\|g_n(x)\| + K\|\mathrm{g(x)}\|$ dhe integrueshmëria sipas Lebegut e funksioneve $\|g_n(x)\|$ dhe ||g(x)|| garantojnë integrueshmërinë sipas Lebegut të funksioneve $\|g_n(x) - g(x)\|$ për çdo n∈N. Kështu që ka vend mosbarazimi $\int_X \|g_n(x) - g(x)\| d\mu < \varepsilon\mu(X) = \varepsilon'$ ku ε' mund të jetë një numër sado i vogël pozitiv përderisa masa e X është e fundme. Prandaj nga përkufizimi 2.1.4 arrijmë në përfundimin se funksioni g është i integrueshëm sipas Bochner-it gjë që i jep fund vërtetimit.▫

Nga lema e mësipërme dhe teorema Kuratowski-Ryll Nardzewski rrjedh se ka vend pohimi:

Pohim 3.4.1.7 [13]
Le të jetë (X,Σ,μ) një hapësirë e matshme me masë të fundme. Në qoftë se F:X→2^Y është një multifunksion dobësisht i matshëm , me vlera të mbyllura në Y dhe integrueshmërisht i kufizuar atëherë ky multifunksion është i integrueshëm sipas Aumann-it.

Gjithashtu lema 3.4.1.6 dhe teorema e Aumann mbi ekzistencën e selektorëve të matshëm të një multifunksioni na lejojnë të pohojmë se:

Pohim 3.4.1.8 [13]
Le të jetë (X,Σ,μ) një hapësirë e matshme me masë të fundme dhe Y një nënbashkësi e Borelit e një hapësire Polish.Në qoftë se F:X→2^Y është një multifunksion me graf separabël dhe integrueshmërisht i kufizuar atëherë ky multifunksion është i integrueshëm sipas Aumann-it.

Ka vend pohimi që vijon:

Pohim 3.4.1.9 [13]
Në qoftë se G: X→2^Y është i integrueshëm sipas Aumann-it dhe G(x) ⊂ F(x) p.k sipas μ atëherë edhe multifunksioni F është i integrueshëm sipas Aumann-it.
Vërtetimi është i menjëhershëm nga fakti që multifunksionet e integrueshëm sipas Aumann-it janë multifunksionet që kanë selektorë të integrueshëm sipas Bochner-it dhe ndërtimi i koleksionit $\mathcal{F}$.
Rrjedhim 3.4.1.10[13]
a) Në qoftë se multifunksioni F:X→2^Y është i integrueshëm sipas Aumann-it atëherë edhe multifunksioni $\bar{F}$:X→2^Y është i tillë.
b) Në qoftë se multifunksionet F_n:X→2^Y janë të integrueshëm sipas Aumann-it atëherë edhe $\bigcup_{n\in N} F_n$ është i integrueshëm sipas Aumann-it.

Vërejmë se prerja e dy multifunksioneve të integrueshëm sipas Aumann-it mund të jetë ose jo multifunksion i integrueshëm sipas Aumann-it.

Shembull 3.4.1.11[13]
Le të jenë multifunksionet F_1, F_2: $[0,1] \to 2^R$ të tillë që:

$F_1(x) = \begin{cases} \{3\} & x \in A \cap C \\ [3,5[& x \in [0,1] \setminus A \cap C \end{cases}$ dhe $F_2(x) = \begin{cases} \{3\} & x \in [0,1] \setminus A \\ ]2,3] & x \in A \end{cases}$ ku A është një bashkësi e pamatshme sipas masës së Lebegut dhe C është bashkësia e Kantorit.
Vërejmë se $(F_1 \cap F_2)(x) = \{3\}$ për çdo x∈[0,1] dhe funksioni f(x) = 3 për çdo x∈[0,1] shërben si një selektor i integrueshëm i secilit prej tyre, prandaj të tre këta multifunksione janë të integrueshëm sipas Aumann-it në [0,1].

Le të jenë $F_1(x) = \begin{cases} \{3\} & x \in A \cap C \\ (0,2) & x \in [0,1] \setminus (A \cap C) \end{cases}$ dhe $F_2(x) = \begin{cases} \{2\} & x \in [0,1] \setminus A \\ ]1,4] & x \in A \end{cases}$ ku A është një bashkësi e pamatshme sipas masës së Lebegut dhe C është bashkësia e Kantorit. Për këta multifunksione, funksionet f(x) = 3 dhe g(x) = 2 për çdo x∈[0,1] shërbejnë përkatësisht si selektorë të integrueshëm sipas Bochner-it, dhe si rrjedhim janë të integrueshëm Aumann-it.
Vërejmë se $(F_1 \cap F_2)(x) = \begin{cases} \{3\} & x \in A \cap C \\ (1,2) & x \in A \setminus A \cap C \\ \emptyset & x \in [0,1] \setminus A \end{cases}$ dhe sido që të ndërtohet një funksion f :[0,1]→R i tillë që f(x)∈ $(F_1 \cap F_2)(x)$ p.k sipas masës së Lebegut në R ka vend barazimi $f^{-1}(-\infty, 2) = A \setminus (A \cap C)$ e cila është e pamatshme, domethënë f s'mund të jetë i integrueshëm sipas Bochner-it. Kështu që multifunksioni $F_1 \cap F_2$ nuk është i integrueshëm sipas Aumann-it.▫

Duke u bazuar në vetitë e integralit të Bochner-it të funksionit sipas një mase μ tregohet lehtë se janë të vërteta pohimet:

Pohim 3.4.1.12 [14]
Në qoftë se multifunksioni F:X$\rightarrow 2^Y$ është me vlera konvekse atëherë edhe integrali $\int_X Fd\mu$ është konveks.

Pohim 3.4.1.13 [14]
Në qoftë se multifunksioni F:X$\rightarrow 2^Y$ është i integrueshëm dhe $\lambda \in$R çfarëdo atëherë λF:X$\rightarrow 2^Y$ është gjithashtu i integrueshëm dhe $\int_X \lambda F d\mu = \lambda \int_X Fd\mu$.

Duke patur parasysh se hapësira e kuazi-normuar është hapësirë vektoriale topologjike mund të pohojmë se:

Pohim 3.4.1.14 [13]
Në qoftë se $F_1, F_2: X \to 2^Y$ janë të integrueshëm sipas Aumann-it atëherë edhe multifunksioni $F_1 + F_2$ është i tillë, madje ka vend barazimi $\int_X (F_1 + F_2)(\mathrm{x})\mathrm{d}\mu = \int_\mathrm{X} \mathrm{F}_1(\mathrm{x})\, \mathrm{d}\mu + \int_\mathrm{X} \mathrm{F}_2(\mathrm{x})\, \mathrm{d}\mu$.
Vërtetim
Meqë multifunksionet F_1 dhe F_2 janë të integrueshëm sipas Aumann-it gjenden funksionet $f_1, f_2: X \to Y$ që janë selektorë Bochner të integrueshëm përkatësisht të F_1 dhe F_2. Shënojmë $A = \{x \in X: f_1(x) \in F_1(x)\}$ dhe $B = \{x \in X: f_2(x) \in F_2(x)\}$.Nga mënyra e zgjedhjes së funksioneve f_1 dhe f_2 vërejmë se $\mu(X \setminus f_1^{-1}(A)) = 0$ dhe $\mu(X \setminus f_2^{-1}(B)) = 0$.
Kështu që, nga barazimet

$$\left(X \setminus f_1^{-1}(A)\right) \cup \left(X \setminus f_2^{-1}(B)\right) = (X \cap (f_1^{-1}(A))^C) \cup (X \cap (f_2^{-1}(B))^C) =$$
$$= X \cap ((f_1^{-1}(A))^C \cup (f_2^{-1}(B))^C) = X \cap \left(f_1^{-1}(A) \cap f_2^{-1}(B)\right)^c$$
$$= X \setminus \left(f_1^{-1}(A) \cap f_2^{-1}(B)\right)$$

arrijmë në përfundimin se $\mu\left(X \setminus (f_1^{-1}(A) \cap f_2^{-1}(B))\right) = 0$.
Nga ana tjetër,për çdo x$\in f_1^{-1}(A) \cap f_2^{-1}(B)$ kemi $(f_1(x) + f_2(x)) \in (F_1 + F_2)(\mathrm{x})$. Kështu që funksioni g:X$\rightarrow$Y i tillë që, g(x) = $f_1(x) + f_2(x)$ është një selektor i multifunksionit $F_1 + F_2$ dhe për më tepër g është i integrueshëm sipas Bochner-it si shumë e dy funksioneve të tillë. Pra kemi treguar se multifunksioni $F_1 + F_2$ është i intergueshëm sipas Aumann-it.
Nga arsyetimi i mësipërm duket qartë se ka vend barazimi $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_{12}$, ku $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_{12}$ janë shënuar përkatësisht bashkësitë e selektorëve të integrueshëm sipas Bochner-it të $F_1, F_2, F_1 + F_2$. Në këto kushte nga përkufizimi 4.4.2.1 dhe fakti që integrali i Bochner-it për funksionet është linear arrijmë në përfundimin se ka vend barazimi $\int_X (F_1 + F_2)(\mathrm{x})\mathrm{d}\mu = \int_\mathrm{X} \mathrm{F}_1(\mathrm{x})\, \mathrm{d}\mu + \int_\mathrm{X} \mathrm{F}_2(\mathrm{x})\, \mathrm{d}\mu$.▫

Aumann (Pohimi 4.1 [23]) ka treguar se, në qoftë se multifunksionet $F_n: T \to 2^{E^n}$ ku T = [0,1] dhe E^n është një hapësirë Euklidiane n-dimensionale janë të kufizuar nga i njëjti funksion i integrueshëm atëherë ka vend relacioni $\int limsup F_n d\mu \supset limsup \int F_n d\mu$.

Në rastin tonë vërejmë se është i vërtetë ky pohim:

Pohim 3.4.1.15 [13]
Në qoftë se $F_n: X \to 2^Y$ është varg multifunksionesh të integrueshëm sipas Aumann-it dhe ekziston integrali i Aumann-it i $limsupF_n$ atëherë ka vend relacioni $\int limsupF_n d\mu \supseteq limsup \int F_n d\mu$.
Vërtetim
Duke patur parasysh barazimin bashkësior $limsupF_n(x) = \bigcap_{n \in N}(\bigcup_{k \geq n} F_k(x))$ dhe faktin se jo gjithnjë prerja e dy multifunksioneve të integrueshëm sipas Aumann-it është përsëri i integrueshëm sipas Aumann-it është e qartë se jo gjithnjë ekziston integrali i Aumann-it i $limsupF_n$. Kështu që, së pari po tregojmë se nëse $\int limsupF_n d\mu = \emptyset$ atëherë edhe $limsup \int F_n d\mu = \emptyset$.
Suppozojmë se $\int limsupF_n d\mu = \emptyset$,pra nuk gjendet asnjë funksion f:X→Y i integrueshëm sipas Bochner-it i tillë që $f(x) \in limsupF_n(x)$ p.k sipas μ mbi X. Prandaj për çdo funksion f:X→Y të integrueshëm sipas Bochner-it gjendet një nënbashkësi A⊂X me masë pozitive në pikat e të cilës $f(x) \notin limsupF_n(x)$. Kështu që, për çdo x∈A kemi që: gjendet $n_0 \in N$ e tillë që për çdo k ≥ n_0 ka vend relacioni $f(x) \notin F_k(x)$.
Duke supozuar se $limsup \int F_n d\mu \neq \emptyset$ kemi që gjendet një funksion f_0:X→Y i integrueshëm sipas Bochner-it i tillë që, për çdo n∈N gjendet $k_0 \in N$ i tillë që $k_0 \geq n$ dhe $\int f_0 d\mu \in \int F_{k_0} d\mu$. Kështu që, funksioni i integrueshëm f_0 kënaq relacionin $f_0(x) \in F_{k_0}(x)$ për $k_0 \geq n$ p.k sipas μ mbi X. Pra për $n_0 \in N$ gjendet $k_0 \geq n_0$ e tillë që $f_0(x) \in F_{k_0}(x)$ p.k sipas μ mbi X ose thënë ndryshe, gjenden pika në bashkësinë A për të cilat $f_0(x) \in F_{k_0}(x)$. Kjo e fundit, nga sa më sipër, kundërshton faktin që $\int limsupF_n d\mu = \emptyset$. Kështu kemi treguar se, nëse $\int limsupF_n d\mu = \emptyset$ atëherë edhe $limsup \int F_n d\mu = \emptyset$.
Le të ndalemi tani në rastin kur $\int limsupF_n d\mu \neq \emptyset$. Marrim funksionin f:X→Y të tillë që $\int f \, d\mu \in limsup \int F_n d\mu$ dhe të tregojmë se $\int f \, d\mu \in \int limsupF_n d\mu$.
Nga arsyetimi i bërë në paragrafin më sipër arrijmë në përfundimin se për funksionin e integrueshëm sipas Bochner-it f:X→Y kemi që për çdo n∈N gjendet $k_0 \in N$ i tillë që $k_0 \geq n$ dhe $f(x) \in F_{k_0}(x)$ p.k sipas μ mbi X.
Në këto kushte $f(x) \in limsupF_n(x) = \bigcap_{n \in N}(\bigcup_{k \geq n} F_k(x))$ p.k sipas μ mbi X dhe është i integrueshëm sipas Bochnerit, domethënë $\int f \, d\mu \in \int limsupF_n d\mu$.▫

Në mënyrë të ngjashme me vërtetimin e pohimit më sipër tregojmë një pohim të ngjashëm më Teoremën Fatou.

Pohim 3.4.1.16 [13]
Në qoftë se $F_n: X \to 2^Y$ është varg multifunksionesh të integrueshëm sipas Aumann-it dhe ekziston integrali i Aumann-it i $liminfF_n$ atëherë ka vend relacioni $\int liminfF_n d\mu \subseteq liminf \int F_n d\mu$.

Vërejtje 3.4.1.17 [13]
Gjenden vargje $F_n: X \to 2^Y$ multifunksionesh të integrueshëm sipas Aumann-it për të cilët ekziston integrali i Aumann-it i $liminfF_n$ dhe $limsupF_n$ por relacionet $\int limsupF_n d\mu \subseteq limsup \int F_n d\mu$ dhe $\int liminfF_n d\mu \subseteq liminf \int F_n d\mu$ nuk janë të vërtetë.
Për këtë po marrim kundërshembullin në vijim:

Marrim vargun e multifunksioneve $F_n: [0,1] \to R$ të tillë që:

$$F_n(x) = \begin{cases} \{1\} & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ \left[0, \frac{1}{n}\right[\cup \{1\} & x \in \left]\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

ku R-në e mendojmë të pajisur me masën e Lebegut.
Funksioni f(x) = 1 për çdo x∈[0,1] shërben si selektor i integrueshëm sipas Bochner-it i çdo multifunksioni F_n, pra për çdo n∈N multifunksioni F_n është i integrueshëm sipas Aumann-it. Të gjejmë tani $limsupF_n(x) = \bigcap_{n\in N}(\bigcup_{k\geq n} F_k(x))$ dhe $liminfF_n(x) = \bigcup_{n\in N}(\bigcap_{k\geq n} F_k(x))$.
Për x = 0 vërejmë se për çdo k∈N bashkësia $F_k(x) = \{1\}$ dhe si rrjedhim $limsupF_n(x) = \{1\}$ po ashtu edhe $liminfF_n(x) = \{1\}$.
Për x = 1 vërejmë se për çdo k∈N bashkësia $F_k(x) = \left[0, \frac{1}{k}\right[\cup \{1\}$ dhe si rrjedhim janë të vërteta barazimet $\bigcup_{k\geq n} F_k(x) = \left[0, \frac{1}{n}\right[\cup \{1\}$ dhe $\bigcap_{k\geq n} F_k(x) = \{0,1\}$. Kështu që janë të vërteta barazimet $limsupF_n(x) = liminfF_n(x) = \{0,1\}$.
Për çdo x∈(0,1) gjendet një $n_0(x) \in N$ e tillë që për çdo $n \geq n_0(x)$ është i vërtetë mosbarazimi $\frac{1}{n} < x$.Kështu që janë të vërteta barazimet $\bigcup_{k\geq n} F_k(x) = \left[0, \frac{1}{n_0(x)}\right[\cup \{1\}$ dhe $\bigcap_{k\geq n} F_k(x) = \{0,1\}$. Kështu që janë të vërteta barazimet $limsupF_n(x) = \left[0, \frac{1}{n_0(x)}\right[\cup \{1\}$ pasi $n_0(x)$ është një konstante dhe $liminfF_n(x) = \{0,1\}$.
Pra përfundimisht kanë vend barazimet:

$$limsupF_n(x) = \begin{cases} \{1\} & x = 0 \\ \left[0, \frac{1}{n_0(x)}\right[\cup \{1\} & x \in \left]0,1\right[\\ \{0,1\} & x = 1 \end{cases} \quad \text{dhe}$$

$$liminfF_n(x) = \begin{cases} \{1\} & x = 0 \\ \{0,1\} & x \in \left]0,1\right] \end{cases}$$

Kështu që funksioni f(x) = 0 për çdo x∈[0,1] është një selektor i integrueshëm sipas Bochner-it i $limsupF_n(x)$ dhe $liminfF_n(x)$. Nga ana tjetër $\int f d\mu \notin limsup \int F_n d\mu$ sepse ky funksion nuk është selektor i asnjë multifunksioni F_n meqë masa e Lebegut e segmentit $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, në pikat e të cilit f(x) nuk bën pjesë në bashkësinë $F_n(x)$, është pozitive.▫

Rrjedhim 3.4.1.18 [13]
Le të jetë (X,Σ,μ) një hapësirë e matshme me masë të fundme. Në qoftë se F_n:X→2^Y është një varg multifunksionesh dobësisht të matshëm , me vlera të mbyllura në Y dhe integrueshmërisht të kufizuar nga i njëjti funksion f:X→R, i tillë që konvergjon tek multifunksioni F:X→2^Y p.k sipas μ mbi X atëherë multifunksioni F është i integrueshëm sipas Aumann-it dhe $\int F d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int F_n d\mu$.

Vërtetim
Nga pohimi 3.4.1.7 vërejmë se multifunksionet F_n janë të integrueshëm sipas Aumann-it. Gjithashtu nga Pohimet 3.3.8 dhe 3.3.9 rrjedh se $liminf F_n$ dhe $limsup F_n$ janë po ashtu dobësisht të matshëm dhe meqë multifunksionet F_n janë integrueshmërisht të kufizuar nga i njëjti funksion f:X→R barazimet bashkësiore $limsup F_n(x) = \bigcap_{n\in N}(\bigcup_{k\geq n} F_k(x))$ dhe $liminf F_n(x) = \bigcup_{n\in N}(\bigcap_{k\geq n} F_k(x))$ na tregojnë se edhe multifunksionet $liminf F_n$ dhe $limsup F_n$ janë integrueshmërisht të kufizuar nga funksioni f:X→R. Meqë vargu i multifunksioneve F_n konvergjon tek multifunksioni F:X→2^Y p.k sipas μ mbi X është i vërtetë barazimi bashkësior $limsup F_n(x) = liminf F_n(x) = F(x)$ p.k sipas μ mbi X. Nga ana tjetër për çdo n∈N, $\bigcap_{k\geq n} F_k(x)$ është një multifunksion dobësisht i matshëm dhe me vlera të mbyllura i cili është po ashtu integrueshmërisht i kufizuar nga funksioni f. Kështu që nga Pohimi 3.4.1.7 arrijmë në përfundimin se multifunksioni $\bigcap_{k\geq n} F_k(x)$ është i integrueshëm sipas Aumann-it. Gjithashtu nga Rrjedhimi 3.4.1.10 rrjedh se edhe multifunksioni $liminf F_n(x) = \bigcup_{n\in N}(\bigcap_{k\geq n} F_k(x))$ është i integrueshëm sipas Aumann-it. Kështu që multifunksioni F(x) tek i cili konvergjon vargu i multifunksioneve F_n është gjithashtu i integrueshëm sipas Aumann-it. Me një arsyetim të ngjashëm si në teoremën 5 të [23] tregohet se në këto kushte është i vërtetë barazimi $\int F d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int F_n d\mu$.
Më konkretisht,nga Pohimet 3.4.1.15 dhe 3.4.1.16 shkruajmë

$$limsup \int F_n(x)d\mu \subseteq \int limsup\, F_n(x)d\mu = \int F d\mu = \int liminf F_n(x)d\mu$$
$$\subseteq liminf \int F_n(x)d\mu$$

Prandaj është e qartë se kemi treguar barazimin $liminf \int F_n(x)d\mu = limsup \int F_n(x)d\mu$ i cili na garanton ekzistencën e limitit të vargut të integraleve $\int F_n(x)d\mu$ dhe për më tepër $\int F d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int F_n d\mu$.▫

Le të shohim tani një rast të veçantë:

Përkufizim 3.4.1.19 [3]
Një funksion f:X→Y quhet plotësisht i matshëm në qoftë se gjendet një varg i funksioneve të thjeshtë $(f_n)_{n\in N}$ që konvergjon tek funksioni f sipas masës.

Koleksioni i funksioneve plotësisht të matshëm formon një hapësirë vektoriale në lidhje me veprimet e zakonshme aritmetike të shumës së funksioneve dhe prodhimit me skalar.
Shënojmë TM(X,Σ,μ,Y) hapësirën e funksioneve f:X→Y plotësisht të matshëm.(Dihet se çdo funksion f∈TM(X,Σ, μ,Y) është gjithashtu Σ-i matshëm).

Përkufizim 3.4.1.20 [3]
Një multifunksion F:X→$2^{ck(Y)}$ (ku ck(Y) është shënuar koleksioni i nënbashkësive jo boshe, konvekse kompakte të Y) quhet plotësisht i matshëm në qoftë se gjendet një varg i multifunksioneve të matshëm të thjeshtë $(F_n)_{n\in N}$ me vlera në ck(Y) i tillë që, për çdo α>0 është i vërtetë barazimi $\lim_{n\to+\infty} \mu\big(x \in X: h\big(F_n(x), F(x)\big) > \alpha\big) = 0$ ku h është kuazi-distanca e përmendur në pohimin 1.1.5.

Shënojmë $\mathcal{TM}$ (X,Σ,μ,ck(Y)) hapësirën e mutifunksioneve plotësisht të matshëm me vlera jo boshe, konvekse kompakte (ky koleksion formon hapësirë vektoriale [3]).

Le të jetë F:X $\rightarrow 2^{cb(Y)}$ një multifunksion me vlera konvekse, të mbyllura dhe të kufizuara. Kemi vënë re se ka vend kjo teoremë:

Teoremë 3.**4.1.21** [10]
Në qoftë se F:X$\rightarrow 2^{cb(Y)}$ është një multifunksion i matshëm i tillë që $\overline{F(X)} = \overline{\{\bigcup_{x\in X} F(x)\}}$ është një nënbashkësi kompakte e Y atëherë F është i integrueshëm sipas Aumann-it.
Vërtetim
Meqë Y është hapësirë separabël gjendet bashkësia D=$\{y_n\}_{n\in N}$ e tillë që $\overline{D} = Y$. Ne duam të ndërtojmë një varg funksionesh të thjeshtë $(f_n)_{n\in N}$ të tillë që, për çdo n∈N dhe për çdo x∈X janë të vërteta mosbarazimet $d(f_n(x), F(x)) \leq \frac{1}{2^n}$ $(*)$ dhe $\|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ (**).
Konsiderojmë bashkësinë $\{y_n + Y_1, y_n \in D\}$ ku Y_1është shënuar rruzulli njësi i mbyllur në Y. Meqë $\overline{F(X)}$ është bashkësi plotësisht e kufizuar gjendet bashkësia $\{y_1^0, \dots, y_{n_0}^0\} \subset D$ e tillë që $\overline{F(X)} \subset \bigcup_{j=1}^{n_0}\{y_j^0 + Y_1\}$.
Për çdo x∈X shënojmë $j_0(x) = min\{j: j \leq n_0, F(x) \cap \{y_j^0 + Y_1\} \neq \emptyset\}$.
Marrim $f_0(x) = y_{j_0(x)}^0$ dhe vërejmë se ky është një funksion i matshëm i thjeshtë:
Në fakt, për çdo $j = 1, \dots, n_0$ kemi $f_0^{-1}(y_j^0) = \{x \in X: F(x) \cap \{y_j^0 + Y_1\} \neq \emptyset\} \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1}\{x \in X: F(x) \cap B(y_k^0 + Y_1) \neq \emptyset\}$ ku $B(y_k^0 + Y_1)$ është kufiri i bashkësisë $y_k^0 + Y_1$.
Konsiderojmë tani bashkësinë $\left\{y_n + \frac{1}{2}Y_1 : y_n \in D\right\}$. Në analogji me hapin më lart, gjendet bashkësia $\{y_1^1, \dots, y_{n_1}^1\} \subset D$ e tillë që $\overline{F(X)} \subset \bigcup_{j=1}^{n_1}\left\{y_j^1 + \frac{1}{2}Y_1\right\}$.
Le të marrim bashkësitë $X_i = f_0^{-1}(y_i^0)$ për $i = 1,2, \dots, n_0$. Për çdo x∈X gjendet $i \leq n_0$ e tillë që x∈X_i, kështu që $F(x) \cap (y_i^0 + Y_1) \neq \emptyset$.
Le të marrim $j_1(x) = min\left\{j: j \leq n_0, F(x) \cap (y_i^0 + Y_1) \cap B(y_j^1 + \frac{1}{2}Y_1) \neq \emptyset\right\}$ ku $B(y_j^1 + \frac{1}{2}Y_1)$ është kufiri i bashkësisë $y_j^1 + \frac{1}{2}Y_1$. Kështu, për çdo x∈X_i ndërtojmë $f_1(x) = y_{j_1(x)}^1$. Me arsyetime të ngjashme si më lart arrijmë në përfundimin se funksioni f_1 është i matshëm i thjeshtë.
Në mënyrë rekurente mund të ndërtojmë funksionin f_n i cili kënaq mosbarazimet (*) dhe (**).
Le të tregojmë këtë që sapo thamë: Meqë $B(y_j^p + \frac{1}{2^p}Y_1)$ është kufiri i bashkësisë $y_j^p + \frac{1}{2^p}Y_1$ dhe duke u bazuar në ndërtimin e $j_p(x)$ kemi që, për çdo $\varepsilon > 0$ dhe për çdo $y \in y_j^p + \frac{1}{2^p}Y_1$ (kujtojmë se bashkësia $y_j^p + \frac{1}{2^p}Y_1$ është fqinjësi e y_j^p) është i vërtetë mosbarazimi $d(y, F(x)) < \varepsilon$. Kështu që janë gjithashtu të vërteta mosbarazimet $d\left(y_{j(x)}^p, F(x)\right) < \varepsilon$ për çdo $\varepsilon > 0$, që nga arrijmë në përfundimin se $d(f_p(x), F(x)) \leq \frac{1}{2^{p+2}K} \leq \frac{1}{2^p}$ (*) (ku K është moduli i konkavitetit të kuazi-normës në Y).
Vërejmë gjithashtu se janë të vërteta mosbarazimet

$$\|f_{p+1}(x) - f_p(x)\| = \left\|y_{j_{p+1}(x)}^{p+1} - y_{j_p(x)}^p\right\| \leq$$
$$K\left\|y_{j_{p+1}(x)}^{p+1} - F(x)\right\| + K\left\|y_{j_p(x)}^p - F(x)\right\| \leq$$

$$\frac{1}{2^{p+2}} + \frac{1}{2^{p+2}} = \frac{1}{2^{p+1}} \quad (**).$$

Kështu që vargu $(f_n)_{n\in N}$ është uniformisht Koshi në Y.
Kujtojmë se F(x) është një bashkësi e mbyllur, sepse ajo është kompakte dhe Y është një hapësirë e plotë (vërtetimi i këtij fakti në rastin tonë është i ngjashëm me rastin e hapësirës metrike). Kështu kemi treguar se gjendet funksioni f që është limit i vargut të funksioneve f_n dhe meqë F(x) është bashkësi e mbyllur dhe ka vend mosbarazimi (*) gjithashtu kemi që f(x)∈F(x). Kjo tregon se funksioni f është plotësisht i matshëm dhe f është selektor i F(x).
Meqë f është limit uniform i një vargu funksionesh të Σ-të matshëm rrjedh se edhe funksioni f është Σ i matshëm.Gjithashtu funksioni f është Bochner i integrueshëm sepse vargu f_n është varg funksionesh të thjeshtë dhe konvergjon uniformisht tek funksioni f gjë që garanton plotësimin e përkufizimit 2.1.4.▫

3.4.2 Integrali i Bochner-it dhe krahasimi i tij me integralin e Aumann-it gjatë izomorfizmit të Stone

Le të jetë (X,Σ,μ) një hapësirë e matshme e plotë e tillë që masa μ është e kufizuar dhe aditiv e fundme. Y është një hapësirë kuazi-Banah separabël.

Përkufizim 3.4.2.1 [3]
Një multifunksion F:X→$2^{ck(Y)}$ quhet Bochner i integrueshëm në qoftë se gjendet një varg $(F_n)_{n\in N}$ i multifunksioneve të thjeshtë me vlera në ck(Y) i tillë që h(F_n,F) konvergjon në zero sipas masës μ dhe për më tepër $\lim_{k,n\to+\infty}\int_X h(F_n,F_k)d\mu = 0$.

Në këtë rast themi se vargu $(F_n)_{n\in N}$ përcakton multifunksionin F dhe përcaktojmë integralin e Bochner-it të F-së mbi E me anë të barazimit

$$(B)\int_E F\,d\mu = \lim_{n\to+\infty}(B)\int_E F_n d\mu.$$

Shënojmë L^1(X,Σ,μ,ck(Y)) hapësirën e gjithë multifunksioneve Bochner të integrueshëm (ky koleksion formon hapësirë vektoriale [3]).

Po tregojmë tani një pohim mjaft me interes:
Pohim 3.4.2.2 [10]
Hapësira e multifunksioneve Bochner të integrueshëm L^1(X,Σ,μ,ck(Y)) e pajisur me $\|.\|_1: L^1 \to R^+$ të tillë që $\|F\|_1 = (L)\int_X |F(x)|d\mu = (L)\int_X sup\{\|x'\|: x' \in F(x)\}\,d\mu$ është një hapësirë e kuazi- normuar.

Vërtetim
1. Është e qartë se $\|F\|_1 \geq 0$. Nga ana tjetër $\|F\|_1 = 0$ atëherë dhe vetëm atëherë kur është i vërtetë barazimi $(L)\int_X sup\{\|x'\|: x' \in F(x)\}\,d\mu = 0$.
Meqë funksioni nën integral është me vlera jo negative atëherë është i vërtetë barazimi $sup\{\|x'\|: x' \in F(x)\} = 0$. Kjo garanton që për çdo $x' \in F(x)$ kemi që $\|x'\| = 0$ pasi në të kundërt do të gjendet ndonjë $x' \in F(x)$ e tillë që $\|x'\| > 0$ dhe kështu zero nuk është kufi i sipërm i bashkësisë $\{\|x'\|: x' \in F(x)\}$ gjë që na çon në përfundimin se $sup\{\|x'\|: x' \in F(x)\} > 0$.
Prandaj për çdo $x' \in F(x)$ kemi që $x^{'} = 0$ dhe si rrjedhim F(x) ={0}⊂ Y.
Ky përfundim është i vërtetë për çdo x∈X dhe si rrjedhim F(x) = {0}, pra është multifunksioni konstant zero.

Anasjelltas, në qoftë se F(x) = {0} për çdo $x \in X$ atëherë për çdo $x' \in F(x)$ kemi që $x' = 0$. Kështu që $sup\{\|x'\|: x' \in F(x)\} = 0$ sjell që $\|F\|_1 = (L)\int_X sup\{\|x'\|: x' \in F(x)\}\, d\mu = 0$.
2.Vërejmë se:
Për çdo skalar λ është i vërtetë barazimi $\|\lambda F\|_1 = (L)\int_X sup\{\|x'\|: x' \in \lambda F(x)\} d\mu$ ku $x' = \lambda x''$ dhe $x'' \in F(x)$.
Kështu që mund të shkruajmë se:

$$(L)\int_X sup\{\|\lambda x''\|: x'' \in F(x)\} d\mu = (L)\int_X sup\{|\lambda| \cdot \|x''\|: x'' \in F(x)\} d\mu =$$

$$|\lambda|(L)\int_X sup\{\|x''\|: x'' \in F(x)\} d\mu = |\lambda| \cdot \|F\|_1.$$

3.Për çdo dy multifunksione F_1 dhe F_2 kemi:

$$\|F_1 + F_2\|_1$$

$$= (L)\int_X sup\{\|x' + x''\|: x' \in F_1(x), x'' \in F_2(x)\} d\mu$$

$$\leq (L)\int_X sup\{K\|x'\| + K\|x''\|: x' \in F_1(x), x'' \in F_2(x)\} d\mu$$

$$= K(L)\int_X sup\{\|x'\|: x' \in F_1(x)\} d\mu + K(L)\int_X sup\{\|x''\|: x'' \in F_2(x)\} d\mu =$$

$$= K(\|F_1\|_1 + \|F_2\|_1). \square$$

Le të ndalemi tani shkurtimisht tek transformimi i Stone.
Këtu do të paraqesim transformimin e Stone [21] dhe do të shohim disa veti të këtij transformimi në hapësirat kuazi të normuara.
Le të jetë (X,∑) një hapësirë e matshme dhe $\mu: \Sigma \to R^+$ një masë aditiv e fundme dhe e kufizuar. Dihet që një unazë K me vetine e shoqërimit elementet e së cilës janë të gjithë idempotentë, pra plotësohet barazimi $x^2 = x$ për çdo $x \in K$, është një unazë Boolean-e dhe çdo unazë Boolean-e me element njësi nën veprimet e mbledhjes dhe shumëzimit është algjebër Boolean-e [25].

• Një algjebër Boolean-e A quhet e plotë në qoftë se çdo bashkësi $E \subset A$ ka kufi të sipërm dhe kufi të poshtëm të cilët po i shënojmë respektivisht sup E dhe inf E.

• Një algjebër e plotë Boolean-e quhet e normuar në qoftë se në të përcaktohet një funksion me vlera reale (një masë) μ që gëzon vetitë që vijojnë:
1) në qoftë se $x \neq 0$ atëherë $\mu(x) > 0$
2) në qoftë se $E \subset A$ dhe $x \wedge y = 0$ ku $x, y \in E$, $x \neq y$ atëherë $\mu(supE) = \sum_{x \in E} \mu(x)$.

Jo të gjitha algjebrat Boolean-e mund të normohen.
Një Algjebër Boolean-e mund të pajiset me topologji të ndryshme [25]. Më e rëndësishmja prej tyre është (O)-topologjia sipas së cilës një algjebër Boolean-e e

normuar është e metrizueshme. Metrika korresponduese në këtë rast përcaktohet nga barazimi $\rho(x,y)=\mu[(x\wedge Cy)\vee(Cx\wedge y)]$. (ku Cx është shënuar plotësi i bashksisë me elementin x, $\vee$ simbolizon veprimin e mbledhjes dhe $\wedge$ simbolizon veprimin e shumëzimit.)

Shpeshherë aksiomat e algjebrës Boolean-e refleftojnë analogji me konceptet e veprimeve me bashkësitë. Në këtë rast elementet e algjebrës Boolean-e janë bashkësi, Cx shënohet plotësi i bashkësisë x, veprimi $\vee$ përdoret për bashkimin e bashkësive dhe veprimi $\wedge$ përdoret për prerjen e bashkësive.

Le të jetë (S,τ) një hapësirë kompakte totalisht e palidhur e tillë që, fusha e gjithë bashkësive clopen është izomorfe e algjebrës Boolean-e $\mathcal{B}$. Kjo hapësirë quhet hapësirë e Stone.
Le të jetë $\mathcal{G}$ algjebra e bashkësive clopen (që janë njëkohësisht bashkësi të hapura dhe mbyllura) të S dhe $\tau:\Sigma\to\mathcal{G}$ izomorfizmi i Stone. Shënojmë $\mathcal{G}_\sigma$ σ-algebrën e gjeneruar nga $\mathcal{G}$.
Gjendet shtrirja e Stone $\bar{\mu}:\mathcal{G}_\sigma\to R^+$ e μ dhe kalojmë nga hapësira e matshme (X,Σ,μ) në hapësirën e matshme $(S,\mathcal{G}_\sigma,\bar{\mu})$.

Injeksioni natyral (identiku) i Σ në $\mathcal{G}_\sigma$ indukton një izomorfizëm izometrik nga $\overline{TM(X,\Sigma,\mu,Y)}$ (mbyllja e $TM(X,\Sigma,\mu,Y)$) në $TM(S,\mathcal{G}_\sigma,\bar{\mu},Y)$ dhe nga $\overline{L_1(X,\Sigma,\mu,Y)}$ (mbyllja e $L_1(X,\Sigma,\mu,Y)$) në $L^1(S,\mathcal{G}_\sigma,\bar{\mu},Y)$. Ky izomorfizëm ruan rendin dhe strukturat e tjera mbi $L_1(X,\Sigma,\mu,Y)$. Vërejmë që:

a) $\|\bar{f}\|=\overline{\|f\|}$ pothuajse kudo sipas $\bar{\mu}$; (është i qartë nga izomorfizmi)
b) $\bar{\mu}(\{s:|\bar{f}(s)|>\alpha\})\le\mu(\{x:|f(x)|\ge\alpha\})\le\bar{\mu}(\{s:|\bar{f}(s)|\ge\alpha\})$; (është e pavarur nga fakti nëse hapësira është e normuar apo e kuazi normuar)
c) Në qoftë se $f\in L^1(\mu)$, atëherë $\bar{f}\in L^1(\bar{\mu})$ dhe për çdo $E\in\Sigma$ është i vërtetë barazimi $\int_E f d\mu=\int_E \bar{f} d\bar{\mu}$. (është i qartë nga izomorfizmi)

Meqë kompaktësia dhe konveksiteti janë karakteristika topologjike, njëlloj si në rastin e hapësirave të normuara, mund të tregojmë se për çdo multifunksion $F:X\to 2^{ck(Y)}$ edhe multifunksioni $\bar{F}$ ka vlera konvekse, kompakte pothuajse kudo sipas $\bar{\mu}$.
Për çdo $F\in L^1(X,\Sigma,\mu,ck(Y))$ mund të shkruajmë: në qoftë se $(F_n)_{n\in N}=\sum_{i=1}^n C_i^n\,\chi_{E_i^n}$ është një varg gjenerues i F atëherë për çdo $E\in\Sigma$ kemi:

$$(B)\int_E Fd\mu=\lim_{n\to+\infty}(B)\int_E F_n d\mu=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{k_n}C_i^n\mu(E\cap E_i^n)=$$
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{k_n}C_i^n\bar{\mu}(\tau(E)\cap\tau(E_i^n))=\lim_{n\to+\infty}(B)\int_E \bar{F}_n d\bar{\mu}=(B)\int_{\tau(E)}\bar{F}d\bar{\mu}$$ (sepse τ është izomorfizëm).

Kështu arrijmë në përfundimin se $(B)\int_E Fd\mu=(B)\int_{\tau(E)}\bar{F}d\bar{\mu}$.

Le të shohim tani një përfundim interesant gjatë izomorfizmit të Stone në lidhje me integralin e Aumann-it.

Le të jenë F∈ $\mathcal{TM}$ (X,Σ,μ,ck(Y)) dhe $\overline{F(X)}$ një nënbashkësi kompakte e Y.
Për një funksion j: $\mathcal{TM}$ (X,Σ,μ,ck(Y))→ TM(S, $\mathcal{G}_\sigma$,$\bar{\mu}$,X) përcaktojmë funksionin j(f) = $\bar{f}$ për çdo f selektor të F. Ka vend kjo teoremë:

Teoremë 3.4.2.3 [10]
Le të jetë F integrueshmërisht i kufizuar**,** $\overline{F(X)}$ një nënbashkësi kompakte e Y dhe f∈L^1(X,∑,μ,Y). Në qoftë se $\mu\{x \in X: d(f(x), F(x)) \geq \alpha\} = 0$ për çdo α > 0**,** atëherë funksioni korrespondues $\bar{f}$ është një selektor Bochner i integrueshëm i $\bar{F}$.
Vërtetim
Le të jetë f∈L^1(X,∑,μ,Y) i tillë që $\mu\{x \in X: d(f(x), F(x)) \geq \alpha\} = 0$ për çdo α > 0 dhe $(f_n)_{n\in N}$ një varg i funksioneve të thjeshtë i cili konvergjon sipas masës μ tek funksioni f. Marrim gjithashtu vargun $(F_n)_{n\in N}$ të multifunksioneve të thjeshtë që konvergjon sipas masës μ tek multifunksioni F.
Kështu, për çdo α > 0 janë të vërteta barazimet

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(\{x \in X: \|f_n(x) - f(x)\| \geq \alpha\}) = 0$$

dhe

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(\{x \in X: \|F_n(x) - F(x)\| \geq \alpha\}) = 0.$$

Le të marrim funksionet γ_n:X→R$^+$ të përcaktuar si vijon: për çdo x∈X, $\gamma_n(x)$ = d(f_n(x),F_n(x)).
Vargu i funksioneve $(\gamma_n)_{n\in N}$ është një varg funksionesh të thjeshtë i cili konvergjon sipas masës μ në 0.
Në fakt nga mosbarazimi d(x,A) ≤ K[||x-y||+Kd(y,B)+Kh(A,B)] (rrjedhimi 1.1.6) mund të shkruajmë d(f_n(x),F_n(x)) ≤ K||f_n(x)-f(x)||+Kd(f(x),F(x))+Kh(F(x),F_n(x)).
Marrim për çdo α > 0 bashkësitë

$$A_n = \{x \in X: \gamma_n(x) > \alpha\}$$

$$A'_n = \left\{x \in X: \|f_n(x) - f(x)\| > \frac{\alpha}{2K}\right\}$$

$$A''_n = \left\{x \in X: h(F_n(x) - F(x)) > \frac{\alpha}{2K}\right\}$$

Meqë funksioni f është selektor i F dhe vargjet $(f_n)_{n\in N}$ dhe $(F_n)_{n\in N}$ konvergjojnë sipas masës përkatësisht në f dhe F arrijmë në përfundimin se $A_n \subset A_n^{'} \cup A_n^{''}$ p.k sipas masës μ dhe n sado të madhe.
Kështu që ka vend mosbarazimi $0 \leq \mu(A_n) \leq \mu(A_n^{'}) + \mu(A_n^{''}) \to 0$ pwr n→+∞.
Pra kemi treguar se $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0$.
Duke përdorur vetinë b) që gëzon izomorfizmi i Stone, kemi që:
$0 \leq \bar{\mu}\left\{x \in X: d\left(\bar{f_n}(x), \bar{F_n}(x)\right) > \alpha\right\} \leq \mu\{x \in X: d(f_n(x), F(x)) \geq \alpha\} \to 0$ për n→+∞.
Kështu që vargu i funksioneve $(\overline{\gamma_n})_{n\in N}$ konvergjon në 0 sipas μ.
Pa u kufizuar aspak, supozojmë se f_n dhe F_n kanë të njëjtën paraqitje, të themi

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{p_n} c_i^n \chi_{E_i^n}(x) \text{ dhe } F_n(x) = \sum_{i=1}^{p_n} C_i^n \chi_{E_i^n}(x).$$

Meqë F_n ka vlera kompakte, për çdo i = 1,2,…,p_n gjendet $x_i^n \in C_i^n$ e tillë që $d(c_i^n, C_i^n) = \|x_i^n - c_i^n\|$. Në fakt, meqë F_n ka vlera kompakte rrjedh se bashkësitë C_i^n janë gjithashtu bashkësi kompakte, pra edhe të mbyllura.
Kështu që $d(c_i^n, C_i^n) = d(c_i^n, \overline{C_i^n}) = \inf\{d(c_i^n, x): x \in \overline{C_i^n}\}$. Meqë inferiori është pikë limite e bashkësisë arrijmë në përfundimin se, gjendet një varg $(x_i^n)_{p\in N} \subset C_i^n$ i tillë që $d(c_i^n, (x_i^n)_p) \to d(c_i^n, C_i^n)$ për p→+∞. Nga ana tjetër, C_i^n është bashkësi e mbyllur dhe si rrjedhim $(x_i^n)_p \to x_i^n \in C_i^n$.

Kështu që kemi treguar se $d(c_i^n, C_i^n) = \|x_i^n - c_i^n\|$.
Le të shënojmë $t_n(x) = \sum_{i=1}^{p_n} x_i^n \chi_{E_i^n}(x)$. Vërejmë se t_n është një selektor Bochner i integrueshëm i F_n dhe është i vërtetë barazimi $\|t_n - f_n\| = \gamma_n$.
Në fakt, $t_n = x_n^i$ për i = 1,2,…,p_n dhe si rrjedhim kemi që $t_n \in C_i^n = F_n$ dhe meqë funksioni t_n është i thjeshtë mund të shkruajmë se $t_n \in L^1(X, \Sigma, \mu, Y)$. Kështu kemi treguar se është një selektor Bochner i integrueshëm i F_n. Në anën tjetër

$$\|t_n - f_n\| = \|x_i^n - c_i^n\| = d(c_i^n, C_i^n) = d(f_n, F_n) = \gamma_n.$$

Le të marrim $\overline{t_n} = \sum_{i=1}^{p_n} x_i^n \chi_{\tau(E_i^n)}(x)$ dhe $\overline{f_n} = \sum_{i=1}^{p_n} c_i^n \chi_{\tau(E_i^n)}(x)$.
Janë të vërteta barazimet $t_n - f_n = \sum_{i=1}^{p_n}(x_i^n - c_i^n)\chi_{E_i^n}(x)$ dhe $\overline{t_n} - \overline{f_n} = \sum_{i=1}^{p_n}(x_i^n - c_i^n)\chi_{\tau(E_i^n)}(x)$.

Kështu që kemi $\|\overline{f_n}\| = \overline{\|f\|_m}$, $\|\overline{t_n} - \overline{f_n}\| = \|\overline{t_n - f_n}\| = \overline{\|t_n - f_n\|} = \overline{\gamma_n}$.
Le të marrim tani $(\overline{f_{n_k}})_k$, $(\overline{F_{n_k}})_k$ dhe $(\overline{\gamma_{n_k}})_k$ tre nënvargje që konvergjojnë respektivisht në $\bar{f}, \bar{F}$ dhe 0 pothuajse kudo sipas masës $\bar{\mu}$.

Duke përdorur mosbarazimin d(x,A)≤K[||x-y||+Kd(y,B)+Kh(A,B)] (rrjedhimi 1.1.6) arrijmë në përfundimin se janë të vërteta mosbarazimet:

$$d(\bar{f}, \bar{F}) \leq K\|\bar{f} - \overline{f_{n_k}}\| + Kd(\overline{f_{n_k}}, \overline{F_{n_k}}) + Kh(\overline{F_{n_k}}, \bar{F}) \leq K\|\bar{f} - \overline{f_{n_k}}\| + Kh(\overline{F_{n_k}}, \bar{F}) + K\left[K\|\overline{f_{n_k}} - \overline{t_{n_k}}\| + Kd(\overline{t_{n_k}}, \overline{F_{n_k}}) + Kh(\overline{F_{n_k}}, \overline{F_{n_k}})\right] = K\|\bar{f} - \overline{f_{n_k}}\| + K^2 d(\overline{t_{n_k}}, \overline{F_{n_k}}) + K^2 d(\overline{t_{n_k}}, \overline{F_{n_k}}) + Kh(\overline{F_{n_k}}, \bar{F}).$$

Meqë janë të vërteta barazimet $lim_{k\to+\infty}\|\bar{f} - \overline{f_{n_k}}\| = 0$, $lim_{k\to+\infty} h(\overline{F_{n_k}}, \bar{F}) = 0$, $\|\overline{f_{n_k}} - \overline{t_{n_k}}\| = \overline{\gamma_n}$ dhe $d(\overline{t_{n_k}}, \overline{F_{n_k}}) = \overline{\gamma_{n_k}}$ mund të shkruajmë:
$0 \leq d(\bar{f}, \bar{F}) \leq lim_{k\to+\infty}\left(K\|\bar{f} - \overline{f_{n_k}}\| + K^2\|\overline{f_{n_k}} - \overline{t_{n_k}}\| + K^2 d(\overline{t_{n_k}}, \overline{F_{n_k}}) + Kh(\overline{F_{n_k}}, \bar{F})\right) = 0$ p.k sipas μ mbi X.
Prandaj $d(\bar{f}, \bar{F}) = 0$ dhe kjo është e vërtetë atëherë dhe vetëm atëherë kur $\overline{f(x)} \in \overline{F(x)}$. Meqë funksioni $\bar{f}$ është i thjeshtë, atëherë $\bar{f} \in L^1(X,\Sigma,\bar{\mu},Y)$.▫

• Nga teorema 3.4.2.3 rrjedh se për çdo multifunksion F integrueshmërisht të kufizuar të tillë që $\overline{F(X)}$ është një nënbashkësi kompakte e Y ka vend barazimi $(A)\int_E F(x)d\,\mu \subset (A)\int_{\tau(E)} \overline{F(x)}d\,\bar{\mu}$.

Literatura

[1] Abebe Geletu, ‘‘Intoductions to Topological spaces and Set-valued maps’’, Ilmenau University of Technology 2006; 89-122

[2] Bartle .R. G, ‘‘A modern theory of integration, Graduate Studies in Mathematics’’,vol. 32,American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. MR 1817647 (2002d:26001)

[3] A.Martellotti, A.R.Sambucini, ‘‘On the comparison of Aumann and Bochner integrals’’, J.Math.Anal.Appl.,260(2001),6-17

[4]Birkhoff Garrett, ‘‘Integration of functions with values in a Banach space’’, Society of Fellows, Harvard University, September 1935.

[5]B.Cascale, V.Kadets and J.Rodriguez, ‘‘Measurability and selections of multi-functions in Banach spaces’’, 2000 Mathematics subject classification; 1-10

[6]Charalambos D. Aliprantis, Kim C. Border, ‘‘Infinite dimensional Analysis’’ third edition, Springer-Verlag Berlin Heidlberg 2006; 167-171

[7]C.J.Himmelberg, ‘‘Measurable relations’’, international congres of mathematics 1973, 1-11

[8]Hadi Haghshenas, ‘‘Proximinal and Čebyšev sets in normed linear spaces’’, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 4, 2010, no.15; 713-720

[9]E.Zajmi Kotonaj (Kallushi), “Mbi disa përgjithësime të funksionit normë dhe integrali i Bochner-it në hapësirat kuazi të normuara”, Buletini i Shkencave Natyrore, Nr.5, 2008; 43-53

[10]E.Zajmi Kotonaj (Kallushi), ‘‘About Aumann and Bochner integral in the quasy-normed spaces’’, Third international conference of Algebra and Functional, Analysis proceedings, Elbasan Albania, 2009, 206-216

[11]E.Zajmi Kotonaj (Kallushi), ‘‘ Birkhoff integral in quasy-Banach spaces’’, European Scientific Journal, December edition vol.8, No.30, 2012, ISSN: 1857 – 7881 (Print) e - ISSN 1857- 7431, 188-196

[12]E.Zajmi Kotonaj (Kallushi), Xh.Teliti “Vazhdueshmëria e multifunksioneve”, Buletini i Shkencave Natyrore, Nr.17, 2014, 225-235

[13]E.Zajmi Kotonaj (Kallushi), ‘‘Aumann integral of multifunction valued in Quasy-Banach spaces and some of its properties’’ International journal of Mathematic trends and technology , Vol.12, Nr.1, August 2014, ISSN 2231- 5373, 63-68

[14] Jean-Pierre Aubin, Hélène Frankowska, ‘‘Set-valued Analysis ’’, AMS Subject classification (1985), © Birkhäuser Boston 1990.

[15] K. Kuratowski and C. Ryll-Nardzewski, ‘‘A general theorem on selectors’’, Bull. Acad. Polon.Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 13 (1965), 397-403

[16]Kuttler, ‘‘Topics in Analysis’’, 2014; 817-868

[17]Lengfield M, ‘‘Envelopes, duality and multipliers for certain non-locally convex Hardly-Lorentz spaces, dissertation’’, 2004; 16-18.

[18] Miroslav Pavlović , ‘‘Introduction to function spaces on the disc’’, Matematički institut SANU, Beograd 2004; 1-11

[19]Nigel Kalton, ‘‘Quasi-Banach spaces. Handbook of the geometry of Banach spaces’’, Vol2, North Holland, Amsterdam 2003; 1099-1130

[20]Nuno C.Freire and M.F.Veiga, ‘‘On a problem by N.Kalton and the space $l^p(I)$’’, Acta mathematica Vietnamica, Vol.33, nr.1, 2008; 39-44

[21] P.T.Johnstone, Stone spaces, Cambridge Univ.Press (1982).

[22] R.J.Aumann, ‘‘Measurable utility and the measurable choice theorem’’ proc.int.colloq.,La decision, C.N.R.S.,Aix-en-provence, 1967, 15-26.

[23]R.J.Aumann, ‘‘Integrals of set-valued functions’’, Journal of Mathematics Analysis and applications 12, 1965, 1-12

[24]Rodrıguez. J, ‘‘Convergence theorems for the Birkhoff integral’’, to appear in Houston J. Math.,preprint available at URL http://personales.upv.es/jorodrui
[25] R.Sikorski, Boolean algebras, springer (1969).
[26]Walter Rudin, ‘‘Functional Analysis’’, International Series in Pure and applied mathematics, Mc Graw-Hill, New York, 1991; 3-91
[27]Xh.Teliti, ‘‘Vazhdueshmëria e funksioneve paranormë dhe hapësirat e kuazi-normuara’’, Buletini i Shkencave të Natyrës Nr.3, 1985.
[28] Xh.Teliti, Topologjia e përgjithshme dhe Analiza funksionale ,2002.