UNIVERSITETI I TIRANËS
FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS

DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

DISERTACION

Për marrjen e gradës shkencore
"DOKTOR"

Programi i studimit: ANALIZË DHE ALGJEBËR

RELACIONET E GREEN-IT DHE PËRGJITHËSIMET E IDEALEVE NË UNAZA E PËRGJITHËSIME TË TYRE

Doktoranti:
Rigena SEMA

Udhëheqës Shkencor:
Prof. Dr. Petraq PETRO

Tiranë, 2014

UNIVERSITETI I TIRANËS
FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS

DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

DISERTACION

PËR MARRJEN E GRADËS SHKENCORE "DOKTOR"

RIGENA SEMA

RELACIONET E GREEN-IT DHE PËRGJITHËSIMET E IDEALEVE NË UNAZA E PËRGJITHËSIME TË TYRE

Udhëheqës Shkencor: Prof. Dr. Petraq PETRO

Tiranë, 2014

UNIVERSITETI I TIRANËS
FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS

DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

Disertacion

i

Paraqitur nga

Znj. **Rigena Sema**

Për marrjen e gradës shkencore

"DOKTOR"

Specialiteti : **Analizë dhe Algjebër**

Tema: **RELACIONET E GREEN-IT DHE PËRGJITHËSIMET E IDEALEVE NË UNAZA E PËRGJITHËSIME TË TYRE**

Mbrohet më dt.____ .____ .____ para jurisë:

1._____Kryetar
2._____Anëtar (oponent)
3._____ Anëtar (oponent)
4._____Anëtar
5._____Anëtar
6._____Anëtar

PËRMBAJTJA

PËRMBAJTJA iii
PARATHËNIE iv
HYRJE v
KAPITULLI I 1
KONCEPTE DHE POHIME PARAPRAKE 1
§ 1. GJYSMËGRUPET DHE UNAZAT 1
§ 2. Γ-UNAZAT DHE Γ-GJYSMËGRUPET 12
KAPITULLI II 15
RELACIONET E GREEN-IT NË UNAZA 15
§ 1. RELACIONET E GREEN-IT $\mathcal{L}$ DHE $\mathcal{R}$ NË UNAZA 16
§ 2. RELACIONET E GREEN-IT $\mathcal{H}$ DHE $\mathcal{Q}$ NË UNAZA 21
§ 3. RELACIONI I GREEN-IT $\mathcal{B}$ DHE BI-IDEALET MINIMALE NË UNAZA 25
§ 4. RELACIONI I GREEN-IT $\mathcal{D}$ NË UNAZA 31
KAPITULLI III 35
NJË PËRGJITHËSIM I RELACIONEVE TË GREEN-IT NË UNAZA 35
§ 1. TRANSLACIONET NË UNAZA DHE PËRGJITHËSIME TË IDEALEVE 35
§ 2. RELACIONET E PËRGJITHËSUARA TË GREEN-IT $\mathcal{L}_P$, $\mathcal{R}_P$, $\mathcal{H}_P$, $\mathcal{Q}_P$, $\mathcal{D}_P$ NË UNAZA 39
KAPITULLI IV 50
Γ-UNAZAT E DOBËTA DHE RELACIONET E GREEN-IT NË TO 50
§ 1. Γ-UNAZAT E DOBËTA DHE Γ-UNAZAT E DOBËTA ME PJESËTIM 50
§ 2. DISA KARAKTERIZIME TË Γ-UNAZAVE TË DOBËTA ME PJESËTIM 55
§ 3. Γ-FUSHAT E DOBËTA 59
§ 4. RELACIONET E GREEN-IT NË Γ-UNAZAT E DOBËTA 62
BIBLIOGRAFIA 68

PARATHËNIE

Teoria e unazave është një degë e hershme e algjebrës. Kuptimi i përgjithshëm i unazës është përcaktuar për herë të parë në një punim të Frenkelit të vitit 1914. Ishin pikërisht dy artikujt e rëndësishëm të Emmy Noether për teorinë e idealeve dhe unazat e Dedekindit të botuar përkatësisht në vitet 1921 dhe 1927 ato që hodhën themelet e teorisë së unazave.

Relacionet e Green-it për gjysmëgrupet u prezantuan nga J. A. Green në një punim të vitit 1951 dhe për unazat për herë të parë nga Petraq Petro në vitin 1981. Në këtë disertacion studiohen relacionet e Green-it në unaza si dhe *tregojmë lidhjen e klasave të ekuivalencës sipas relacioneve* $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}$ *dhe* $\mathcal{Q}$ *në një unazë* $(A, +, \cdot)$ *me klasat e ekuivalencës përkatëse sipas relacioneve të Green-it të gjysmëgrupit të shumëzimit* $(A, \cdot)$ *të kësaj unaze. Më tej me anë të këtyre lidhjeve gjejmë një rast kur një ideal i majtë minimal* [*ideal i djathtë minimal, kuazi-ideal minimal*] *i unazës* $(A, +, \cdot)$ *mbetet i tillë edhe në gjysmëgrupin e shumëzimit* $(A, \cdot)$ *të saj si dhe gjejmë një vërtetim tjetër të teoremës së Green-it për unazat.*

Të inspiruar nga probleme praktike të matricave, duke filluar me Γ*–unazat rreth viteve 60 të shekullit që kaluam, aktualisht po lëvrohet zona e* Γ*–strukturave në përgjithësi. Ndër këto* Γ*–struktura janë dhe ato të* Γ*–unazave të dobëta të cilat i përkufizojmë dhe studiojmë në këtë disertacioni si dhe paraqesim disa karakterizime të tyre me anë të idealeve, idealeve të njëanshme, kuazi-idealeve dhe strukturave të tyre minimale.*

Për të arritur në hartimin e këtij disertacioni përveç punës dhe përpjekjeve personale një kontribut të rëndësishëm ka dhe udhëheqësi im shkencor Prof. Dr. Petraq Petro, të cilit i shpreh mirënjohjen dhe falënderimet e mia. Jam ndier e privilegjuar që më ka drejtuar, mbështetur gjatë gjithë kësaj periudhe.

I shpreh mirënjohjen dhe falënderimet e mia profesorëve të grupit të Algjebrës Prof. Dr. Artur Baxhaku, Prof. As. Elton Pasku, Dr. Thanas Xhillari për mbështetjen, këshillat dhe inkurajimin e tyre në të gjithë rrugëtimin tim.

Një falënderim i veçantë për të gjithë grupin e profesorëve të Departamentit të Matematikës për kontributin që kanë dhënë në formimin tim akademik.

Së fundi falënderimet e mia do të shkojnë për familjen time. Mbështetja, durimi dhe dashuria e tyre kanë qenë faktori kryesor në edukimin tim profesional dhe njerëzor.

HYRJE

Strukturat algjebrike luajnë një rol të rëndësishëm në matematikë e në shumë disiplina të tjera si fizikë, shkenca kompjuterike, teori e kodimit etj. Një kontribut të veçantë në këtë kuadër ka luajtur dhe vazhdon të luajë teoria e unazave.

Teoria e unazave është mjaft e hershme. I pari që futi konceptin e unazës ishte Richard Dedekind në 1871 dhe termi unazë (Zahiring) është përdorur për herë të parë nga David Hilbert në 1892. E para që parashtroi aksiomat e unazës nën influencën e Hilbertit ishte Emmy Noether në artikullin e saj Ideal Theory in Rings në vitin 1921.

Në matematikë, relacionet e Green-it janë relacione ekuivalence që karakterizojnë elementet e gjysmëgrupeve me anën e idealeve kryesore që ato përftojnë. Emërtimi i këtyre relacioneve vjen për arsye të James Alexander Green, i cili ishte i pari që i paraqiti në një punim të vitit 1951. Këto relacione kanë një rëndësi të veçantë për studimin e strukturave në gjysmëgrupe dhe relacione të ngjashme me to janë futur dhe studiuar edhe në struktura të tjera algjebrike. Një ndër këto struktura është dhe unaza. Relacionet e Green-it në unaza janë futur dhe studiuar për herë të parë nga Petraq Petro në 1981. Meqenëse unazat janë një kombinim i veçantë i grupeve dhe gjysmëgrupeve, një ndër qëllimet kryesore të këtij disertacioni është pikërisht studimi i relacioneve të Green-it në unaza e përgjithësime të tyre.

Në vitin 1964 Nabusawa dhe më pas W.Barnes prezantuan dhe paraqitën në punimet e tyre konceptin e Γ-unazës si një përgjithësim i unazës. Klasa e Γ-unazave përmban jo vetëm të gjitha unazat, por edhe të gjitha unazat trijore Hestenes. Një nga këto Γ-struktura është edhe ajo e Γ-unazës së dobët.

Një qëllim tjetër i këtij disertacioni është studimi dhe karakterizimi i Γ–unazave të dobëta me anë të idealeve, kuazi-idealeve, bi-idealeve dhe relacioneve të Green-it.

Punimi i këtij disertacioni është i ndarë në katër kapituj, ku secili është i ndarë në paragrafë. Në fund të punimit është dhënë bibliografia.

Kapitulli i parë: "KONCEPTE DHE POHIME PARAPRAKE" paraqet njohuritë themelore për studimin e gjysmëgrupeve, unazave dhe Γ-unazave.

Në paragrafin e parë janë dhënë përkufizimet e gjysmëgrupit, unazës si dhe përkufizime, pohime e teorema, të cilat përdoren më tej në trajtimin e materialit.

Në paragrafin e dytë paraqiten njohuri bazale për Γ-unazat si dhe disa koncepte e pohime për Γ-gjysmëgrupet, të cilat do ti përdorim në kapitullin e katërt ku do të përkufizojmë dhe studiojmë Γ-unazat e dobëta

Kapitulli i dytë: "RELACIONET E GREEN-IT NË UNAZA"është i ndarë në katër paragrafë.

Në paragrafin e parë dhe të dytë paraqesim relacionet e Green-it $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}$ dhe Q në unaza. Së pari tregojmë lidhjen e klasave të ekuivalencës sipas relacioneve $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}$

dhe Q në një unazë me klasat e ekuivalencës përkatëse sipas relacioneve të Green-it në gjysmëgrupin e shumëzimit të kësaj unaze si dhe gjejmë një rast se kur një ideal minimal, ideal i djathtë minimal, kuazi-ideal minimal i unazës mbetet i tillë edhe në gjysmëgrupin e shumëzimit të saj dhe gjejmë një vërtetim tjetër të teoremës së Green-it për unazat.

Në paragrafin e tretë paraqesim relacionin e Green-it $\mathcal{B}$ në unaza, teoremën e Green-it për relacionin $\mathcal{B}$ në unaza dhe «transferimin » e karakteristikës së idealeve të majta minimale, idealeve të djathta minimale dhe kuazi-idealeve minimale.

Në paragrafin e katërt paraqesim dhe studiojmë relacionin e Green-it $\mathcal{D}$ në unaza.

Kapitulli i tretë: "NJË PËRGJITHËSIM I RELACIONEVE TË GREEN-IT NË UNAZA"është i ndarë në dy paragrafë**.**

Në paragrafin e parë trajtojmë në mënyrë të koncentruar disa koncepte e pohime që do ti përdorim për të realizuar një përgjithësim të relacioneve të Green-it në unaza që kemi shtjelluar në kapitullin e dytë, sigurisht duke bërë disa përshtatje për qëllimet tona.

Në pjesën e dytë të këtij paragrafi japim përgjithësime të idealeve të majta, të idealeve të djathta, kuazi-idealeve e bi-idealeve në unaza duke çelur shtegun për përgjithësimin e dëshiruar të relacioneve të Green-it në unaza.

Kapitulli i katërt: "Γ-UNAZAT E DOBËTA DHE RELACIONET E GREEN-IT NË TO" është i ndarë në katër paragrafë

Në paragrafin e parë përgjithësojmë në mënyrë të natyrshme Γ-unazat si dhe fusim konceptet e Γ-unazës së dobët, Γ-unazës me pjesëtim dhe Γ-fushat.

Në paragrafin e dytë jepen disa karakterizime të Γ-unazës të dobët me pjesëtim me anë të idealeve të njëanshme, idealeve, kuazi-idealeve dhe strukturave të tyre minimale.

Në paragrafin e tretë japim përkufizimin e Γ-fushës të dobët si dhe disa karakterizime të saj me anë të idealeve.

Në paragrafin e katërt paraqesim relacionet e Green-it në Γ-unazat e dobëta.

Gjatë punimit tonë janë paraqitur problematika që kanë mbetur të hapura dhe që do të jenë objekt i studimeve të mëtejshme në këtë fushë.

KAPITULLI I

KONCEPTE DHE POHIME PARAPRAKE

Unazat dhe gjysmëgrupet janë struktura që teoritë e tyre janë në bashkëveprim të vazhdueshëm në një proces të pandashëm të difuzimit e transplantimit të koncepteve e pohimeve nga njëra tek tjetra, duke ndikuar ndjeshëm në zhvillimin sasior dhe cilësor të tyre. Gjysmëgrupet përbëjnë gurin e themelit të strukturave algjebrike në përgjithësi e në mënyrë të veçantë të unazave e të përgjithësimeve të tyre. Kështu, në paragrafin e parë të këtij kapitulli hyrës do të shtjellojmë disa koncepte themelore për gjysmëgrupet që në mënyrë të posaçme ndikojnë ndjeshëm në teorinë e unazave. Më tej në këtë paragraf do të japim një varg konceptesh e pohimesh për unazat, të cilat do ti përdorim në kapitujt e tjerë të këtij disertacioni.

Në paragrafin e dytë do të shtjellojmë njohuri bazale për Γ-unazat duke filluar me Γ-unazat e Nabusawa-së, të cilat janë përgjithësime të unazave dhe e kanë zanafillën e tyre nga unazat e Hestens-it. Γ-unazat e Nabusawa-së kanë qënë pikënisja e Γ-unazave të cilat falë fushë veprimit të gjerë të tyre janë shndërruar në një objekt i kërkimit të mirëfilltë algjebrik.

Duke u mbështetur tek koncepti i Γ-unazave ashtu si nga unazat e zakonshme kanë lindur dhe janë zhvilluar si struktura më vete, gjysmëgrupet, është përpunuar ai i Γ-gjysmëgrupeve. Prandaj në paragrafin e dytë do të paraqesim edhe disa koncepte e pohime për Γ-gjysmëgrupet, të cilat do ti përdorim në kapitullin e katërt ku do të përkufizojmë dhe studiojmë Γ-unazat e dobëta, të cilat janë në bashkëveprim me Γ-gjysmëgrupet, ashtu siç janë unazat e zakonshme me gjysmëgrupet.

§ 1. GJYSMËGRUPET DHE UNAZAT

Për herë të parë termi gjysmëgrup është përdorur në matematikë në vitin 1904 nga Seguier në librin e tij "Elemente të Teorisë së Grupeve Abstrakte". Artikulli i parë shkencor është ai i Leonard Dickson i botuar më 1905 [32], por ishte një punim fondamental i pabotuar i vitit 1928 i Sushkeviçit (një pjesë e rezultateve të këtij punimi përfshihen në kapitullin e tretë të një libri të tij të botuar më 1937) [36], ai që i dha shtysën kryesore teorisë së gjysmëgrupeve dhe që i shndërroi ato në objekte të kërkimit shkencor algjebrik. Vlera reale e punimit të Sushkeviçit u identifikua dhe u shpalos nga Rees-i në artikullin e tij tepër të rëndësishëm për gjysmëgrupet të botuar në vitin 1940 [33]. Ishte artikulli i Green-it ku shtjellohen relacionet që sot mbajnë emrin e tij, ato që e shndërruan studimin e gjysmëgrupeve në një teori që nuk ka reshtur së zhvilluari gjithmonë e më fuqishëm deri në ditët tona. Sot ato janë objekt studimi edhe i mjaft disiplinave që konkurrojnë me sukses në kërkimin e mirëfilltë algjebrik si Algjebra Homologjike apo Algjebra Topologjike e Topologjia Algjebrike që kanë zbatime të shumta në shkencë dhe teknikë.

Kalojmë tani në përkufizimin e gjysmëgrupit.

Përkufizim 1.1.1. **[9]** *Gjysmëgrup quhet çdo çift i radhitur* $(S,\cdot)$, *ku* S *është një bashkësi joboshe dhe «·» një veprim në* S *që ka vetinë e shoqërimit, domethënë është i vërtetë pohimi*

$$\forall (a,b,c) \in S^3, (ab)c = a(bc).$$

Në qoftë se gjysmëgrupi S ka një element 1 të tillë që

$$\forall s \in S, s1 = 1s = s,$$

atëherë 1 quhet element identitet (më saktë identitet) ose më shpesh njësh dhe thuhet që S-ja është një gjysmëgrup me njësh (identitet) ose shpesh monoid. Është e qartë se një gjysmëgrup nuk mund të ketë më shumë se një njësh.

Në qoftë se gjysmëgrupi S nuk ka njësh, atëherë është tepër e thjeshtë ti bashkojmë atij një element shtesë 1 dhe të formojmë një monoid. Për këtë kërkojmë që të jenë të vërteta barazimet për çdo element s të S-së:

$$1s = s1 = s \text{ dhe } 1 \cdot 1 = 1.$$

Bindemi lehtë se $(S \cup \{1\},\cdot)$, ku «·» është shtrirja e shumëzimit të gjysmëgrupit S në $S \cup \{1\}$, është një monoid. Tani përcaktojmë

$$S^1 = \begin{cases} S \text{ \textit{në qoftë se S ka njësh}} \\ S \cup \{1\} \text{ \textit{në qoftë se S nuk ka njësh}} \end{cases}$$

dhe me monoid $(S^1,\cdot)$ do të nënkuptojmë monoidin $(S,\cdot)$ kur ai ka njësh, ose kur ai nuk ka njësh monoidin $(S \cup \{1\},\cdot)$ që përcaktuam më sipër. Do të themi se monoidi S^1 është monoidi që përftohet nga gjysmëgrupi S me bashkimin e një njëshi, 1, në qoftë se kjo është e nevojshme.

Në qoftë se gjysmëgrupi S ka të paktën dy elemente, elementi 0 quhet element zero ose thjesht zero e S në qoftë se

$$\forall s \in S, 0s = s0 = 0.$$

Kërkesa që S të ketë të paktën dy elemente nënkupton thjesht që ne nuk duam ti referohemi elementit të vetëm të gjysmëgrupit trivial $\{e\}$, në të cilin kemi $e^2 = e$ si zero me që ai është njësh i tij. Kur gjysmëgrupi S ka zero, atëherë ai quhet gjysmëgrup me zero.

Bindemi lehtë se një gjysmëgrup nuk mund të ketë më shumë se një zero.

Në qoftë se gjysmëgrupi S nuk ka një zero, është e thjeshtë ti bashkojmë një ekstra element 0. Për këtë kërkojmë që të jenë të vërteta barazimet e mëposhtme për çdo element s të S-së:

$$0s = s0 = 00 = 0.$$

Bindemi lehtë se $(S \cup \{0\},\cdot)$, ku «·» është shtrirja e shumëzimit të gjysmëgrupit S në $S \cup \{0\}$, është një gjysmëgrup me zero. Tani përcaktojmë

$$S^0 = \begin{cases} S \text{ \textit{në qoftë se S ka zero}} \\ S \cup \{0\} \text{ \textit{në qoftë se S nuk ka zero}} \end{cases}$$

dhe gjysmëgrup me zero $(S^0,\cdot)$ ose do të nënkuptojmë gjysmëgrupin $(S,\cdot)$ kur ky gjysmëgrup ka zero ose kur ai nuk ka zero, gjysmëgrupin $(S \cup \{0\},\cdot)$ që përcaktuam

më sipër. Do të themi se gjysmëgrupi S^0 është gjysmëgrupi me zero që përftohet nga gjysmëgrupi S me bashkimin e një zeroje, 0, në qoftë se kjo është e nevojshme.

Le të jetë $(S,\cdot)$ një gjysmëgrup dhe A, B dy nënbashkësi të S-së. Shënojmë

$$AB = \{ab \in S \mid a \in A \; dhe \; b \in B\},$$

sigurisht duke nënkuptuar që $AB = \phi$ në qoftë se $A = \phi$ ose $B = \phi$. Bindemi lehtë se për çdo tre bashkësi A, B, C të S-së kemi

$$(AB)C = A(BC)$$

dhe kështu i japim kuptim bashkësisë ABC si të barabartë me njërën prej bashkësive $(AB)C$, $A(BC)$ dhe në përgjithësi bashkësisë $A_1A_2 \dots A_n$ për çdo n nënbashkësi A_1, A_2, ..., A_n të S-së.

Në rast se nuk thuhet ndryshe, bashkësia A^2 nuk do të jetë gjë tjetër veçse bashkësia

$$\{a_1a_2 \in S \mid a_1 \in A_1 \; dhe \; a_2 \in A_2\}$$

dhe jo bashkësia

$$\{a^2 \in S \mid a \in A\}.$$

Në qoftë se $A = \{a\}$ ose $B = \{b\}$ për thjeshtësi do të shënojmë aS dhe Sb në vend të $\{a\}S$ dhe $S\{b\}$.

Në qoftë se a është një element i një gjysmëgrupi S që nuk ka njësh, atëherë bashkësia Sa në përgjithësi nuk e përmban elementin a. Kështu, janë tepër komodë shënimet:

$$S^1a = \{a\} \cup Sa,$$

$$aS^1 = \{a\} \cup aS.$$

Vëmë në dukje se bashkësitë S^1a dhe aS^1 janë që të dyja nënbashkësi të S-së dhe që ato nuk përmbajnë elementin 1.

Në qoftë se një gjysmëgrup S ka cilësinë që

$$\forall a \in S, aS = S \text{ dhe } Sa = S,$$

atëherë ai quhet <u>grup</u>. Ky nuk është përkufizimi i zakonshëm i grupit por ai është më i efektshmi kur është fjala për teorinë e gjysmëgrupeve. Siç dihet përkufizimi më i përdorshëm i grupit është secili prej këtyre dy përkufizimeve:

1) Grup quhet çdo gjysmëgrup $(S,\cdot)$ për të cilin kemi:

$$\exists e \in S, \forall a \in S, ae = a,$$

$$\forall a \in S, \exists a^{-1} \in S, aa^{-1} = e.$$

2) Grup quhet çdo gjysmëgrup $(S,\cdot)$ për të cilin kanë zgjidhje ekuacionet:

$$ax = b \text{ dhe } ya = b,$$

për çdo dy elemente a, b të S-së.

Në qoftë se gjysmëgrupi G është grup, atëherë $G^0 = G \cup \{0\}$ është një gjysmëgrup me zero. Ky gjysmëgrup me zero i formuar në këtë mënyrë nga grupi G quhet grup me zero ose 0-grup.

Pohim 1.1.2. **[9]** *Gjysmëgrupi S është* 0*-grup atëherë dhe vetëm atëherë kur*

$$\forall a \in S\backslash\{0\}, aS = S \text{ dhe } Sa = S.$$

Vërtetimi i këtij pohimi gjendet në monografinë themelore për gjysmëgrupet [9]. Ne e përfshimë atë në konceptet bazë të këtij disertacioni për të tërhequr vëmendjen për konceptet e gjysmëgrupit me zero dhe grupit me zero, sepse nëpërmjet tyre mund të përvidhen gabime sidomos në teorinë e Γ-gjysmëgrupeve dhe atë të Γ-unazave. Këtë problem do ta cekim paksa edhe në fundin e disertacionit tonë.

Një nënbashkësi joboshe S_1 elementesh të gjysmëgrupit $(S,\cdot)$ quhet nëngjysmëgrup i tij në qoftë se

$$\forall (a_1, b_1) \in S_1^2, a_1 b_1 \in S_1.$$

Duket qartë se S_1 është pjesë e qëndrueshme për shumëzimin në S dhe formon gjysmëgrup së bashku me veprimin e induktuar në të. Pra $(S_1,\cdot)$ ku tashti «·» është veprimi i induktuar në S_1, është gjysmëgrup, që përligj në një farë mase termin nëngjysmëgrup. Nëngrup i gjysmëgrupit $(S,\cdot)$ quhet çdo nënbashkësi joboshe G e S-së që është nëngjysmëgrup i tij dhe gjysmëgrupi i përftuar prej tij, domethënë gjysmëgrupi $(G,\cdot)$, ku «·» është shumëzimi i induktuar në G, është grup.

Përkufizim 1.1.3. [5] *Ideal i majtë* [*i djathtë*] *i gjysmëgrupit S quhet çdo nënbashkësi joboshe L $[R]$ e S-së e tillë që*

$$\forall (s, l) \in S \times L, sl \in L,$$

$$[\forall (s, r) \in S \times R, rs \in R]$$

ose njëlloj $SL \subseteq L$ $[SR \subseteq R]$.

Në qoftë se I është njëherësh ideal i majtë dhe ideal i djathtë i gjysmëgrupit S, atëherë I quhet <u>ideal i dyanshëm</u> ose thjesht <u>ideal</u> i gjysmëgrupit S.

Përkufizim 1.1.4. [5] *Kuazi-ideal i gjysmëgrupit S quhet çdo nënbashkësi jo boshe Q e S-së e tillë që*

$$QS \cap SQ \subseteq Q.$$

Prerja e çdo familje idealesh të majta [idealesh të djathta, kuazi-idealesh] të një gjysmëgrupi S pa zero ose është boshe ose një ideal i majtë [ideal i djathtë, kuazi-ideal] i S-së. Në qoftë se gjysmëgrupi S është gjysmëgrup me 0, atëherë çdo ideal i majtë [ideal i djathtë, kuazi-ideal] e përmban 0. Kështu, prerja e çdo familje idealesh të majta [idealesh të djathta, kuazi-idealesh] të gjysmëgrupit S me 0 është një ideal i majtë [ideal i djathtë, kuazi-ideal] i S-së.

Le të jetë X një nënbashkësi joboshe elementesh të gjysmëgrupit S. Prerja e të gjitha idealeve të majta [idealeve të djathta, kuazi-idealeve] të S-së që përmbajnë bashkësinë

X është një ideal i majtë [ideal i djathtë, kuazi-ideal] i S-së që përmban bashkësinë X. Ky ideal i majtë [ideal i djathtë, kuazi-ideal] quhet <u>ideal i majtë</u> [<u>ideal i djathtë</u>, <u>kuazi-ideal</u>] <u>i S-së i përftuar nga X</u> dhe shënohet $(X)_l$ $\left[(X)_r, (X)_q\right]$. Është e lehtë të tregohet se

$$(X)_l = X \cup SX \left[(X)_r = X \cup XS, (X)_q = X \cup (SX \cap XS)\right].$$

Në rastin e veçantë kur bashkësia X ka vetëm një element x, atëherë ideali i majtë [ideali i djathtë, kuazi-ideali] i përftuar nga bashkësia $\{x\}$ quhet <u>ideal i majtë</u> [<u>ideal i djathtë</u>, <u>kuazi-ideal</u>] <u>kryesor i përftuar nga elementi x</u>. Duke identifikuar shënimin e bashkësisë me një element x, X me shënimin e vetë elementit x për idealin e majtë [idealin e djathtë, kuazi-idealin] kryesor të përftuar nga elementi x i gjysmëgrupit S kemi shënimin $(x)_l$ $\left[(x)_r, (x)_q\right]$ dhe barazimin:

$$(x)_l = x \cup Sx \left[(x)_r = x \cup xS, (x)_q = x \cup (Sx \cap xS)\right].$$

Nuk është e vështirë të provohet barazimi

$$(x)_q = (x)_l \cap (x)_r.$$

Në vitin 1951 në një artikull fondamental për gjysmëgrupet [4] James Alexander Green ka përcaktuar në një gjysmëgrup çfarëdo relacione ekuivalence që luajnë një rol të rëndësishëm në Teorinë e Gjysmëgrupeve dhe që sot mbajnë emrin e tij. Ka rreth 555 artikuj ku përdoren relacionet e Green-it, por vetë Green-i nuk ka shkruar asnjë artikull tjetër rreth tyre.

Relacionet e Green-it $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$, në një gjysmëgrup çfarëdo S janë përcaktuar si më poshtë [4]:

$$\forall (a,b) \in S^2, a\mathcal{L}b \Leftrightarrow (a)_l = (b)_l,$$

$$\forall (a,b) \in S^2, a\mathcal{R}b \Leftrightarrow (a)_r = (b)_r,$$

$$\forall (a,b) \in S^2, a\mathcal{H}b \Leftrightarrow ((a)_l = (b)_l \; dhe \; (a)_r = (b)_r),$$

ku $(a)_l$, $(b)_l$, $(a)_r$, $(b)_r$ janë përkatësisht idealet e majta kryesore dhe idealet e djathta kryesore të përftuara nga elementet a, b të S-së.

Duket qartë se relacionet $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ dhe $\mathcal{H}$ janë relacione ekuivalence në S. Klasat e ekuivalencës sipas relacioneve të Green-it $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ dhe $\mathcal{H}$ që përmbajnë elementin $a \in S$ shënohen përkatësisht L_a, R_a dhe H_a. Te [4] është treguar se relacionet $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ janë të përkëmbyeshëm, domethënë $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$. Kështu është përcaktuar relacioni i Green-it

$$\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}.$$

Klasa e ekuivalencës sipas relacionit $\mathcal{D}$ në gjysmëgrupin S që përmban elementin $a \in S$ shënohet D_a.

Përkufizim 1.1.5. [12] *Gjysmëgrupi me zero S që ka të paktën dy elemente quhet* 0-*bi-i thjeshtë në qoftë se të vetmet klasa ekuivalence të tij sipas relacionit të Green-it $\mathcal{D}$ në S janë* 0 *dhe* $S\backslash 0$.

Teorema e mëposhtme, që i ka ngritur në piedestal relacionet e Green-it, dhe që është një nga më të rëndësishmet në Teorinë e Gjysmëgrupit, quhet Teorema e Green-it.

Teoremë 1.1.6. [4] *Në qoftë se elementet a, b, ab të gjysmëgrupit S i përkasin të njëjtës $\mathcal{H}$-klasë H të S-së, atëherë H-ja është nëngrup i gjysmëgrupit S.*

Le të jetë S një gjysmëgrup çfarëdo. Elementi a i S-së quhet <u>i thjeshtueshëm</u> në qoftë se për çdo dy elemente b, c të S-së kemi:

$$(ab = ac \Longrightarrow b = c) \text{ dhe } (ba = ca \Longrightarrow b = c).$$

Një gjysmëgrup S quhet <u>i thjeshtueshëm</u> në qoftë se çdo element i tij është i thjeshtueshëm.

Pohim 1.1.7. [9] *Në qoftë se S është një gjysmëgrup që nuk ka njësh dhe është i thjeshtueshëm, atëherë kemi*

$$\mathcal{L} = \mathcal{R} = 1_S,$$

ku 1_S është relacioni identik në S.

Vëmë re se në çdo gjysmëgrup S relacioni i Green-it $\mathcal{H}$ është prerje e relacionit $\mathcal{L}$ me relacionin $\mathcal{R}$. Kështu nga pohimi 1.1.7 edhe relacioni i Green-it $\mathcal{H}$ në një gjysmëgrup të thjeshtueshëm që nuk është monoid, përputhet me relacionin identik në këtë gjysmëgrup.

Megjithëse koncepti i unazës është më i hershëm se ai i gjysmëgrupit, ky i fundit merr pjesë në ndërtimin e unazës, prandaj në shtjellimin e tyre unazën po e paraqesim mbas gjysmëgrupit.

Koncepti i unazës i përket Dedekindit por ai futi për të fjalën «modul» në vitin 1871 dhe koncepti që përkufizoi ishte pak më i ngushtë se ai që përdoret sot. Fjalën unazë për herë të parë e ka përdorur Hilberti. Ai i motivuar nga teoria e invarianteve, studioi idealet në unazën e polinomeve duke gjetur të famshmen teoremë të tij, Teorema e bazave në vitin 1893. Aksiomatizimi i unazave nuk dihet saktë prej kujt është kryer, por një gjë është e sigurt që ishte pikërisht Emmy Noether, që në vitin 1921 bëri hapin e rëndësishëm duke i futur dy teoritë, atë të unazave të polinomeve dhe atë të unazave të numrave nën «ombrellën» e përbashkët të teorisë së unazave abstrakte.

Kuptimi i idealit i krijuar prej Dedekindit për numrat algjebrikë u përgjithësua prej Noether-it në vitet 20 të shekullit që lamë pas për rastin e unazave dhe u shndërrua në motorin e fuqishëm të Teorisë së Unazave. Megjithëse përkufizimi i unazës gjendet sot në çdo tekst universitar ne do të japim atë këtu për të bërë prezent unazat të cilat ne do të studiojmë në këtë disertacion.

Përkufizim 1.1.8. [5] *Unazë quhet çdo treshe e radhitur $(A, +, \cdot)$, ku A është bashkësi, kurse «+» dhe «·» përkatësisht mbledhja dhe shumëzimi në bashkësinë A të tillë që:*

1. *$(A, +)$ është grup abelian, domethënë mbledhja ka edhe vetinë e ndërrimit.*
2. *$(A, \cdot)$ është gjysmëgrup.*
3. *Shumëzimi në A është shpërndarës në lidhje me mbledhjen, domethënë*

$$\forall (a, b, c) \in A^3, a(b + c) = ab + ac \text{ dhe } (a + b)c = ac + bc.$$

Në qoftë se gjysmëgrupi $(A,\cdot)$ është ndërrimtar, domethënë

$$\forall(a,b) \in A^2, ab = ba,$$

atëherë unaza $(A,+,\cdot)$ quhet <u>unazë ndërrimtare</u>. Në qoftë se gjysmëgrupi $(A,\cdot)$ është monoid dhe ka njësh e-në, atëherë unaza $(A,+,\cdot)$ quhet <u>unazë unitare</u> dhe e-ja quhet <u>njësh</u> i kësaj unaze.

Tekstet universitare të algjebrës gjithmonë e më tepër merren me unazat që në përgjithësi nuk kanë njësh, domethënë ashtu siç i përkufizuam ne, ndërkohë që pothuaj të gjitha monografitë për unazat ndër përjashtimet përmendim monografinë e teoricienit të madh të unazave Jacobson, Structure of the rings [20] studiojnë unazat me njësh duke u nisur nga bollëku i rezultateve që rrjedhin nga prania e njëshit.

Për unazat nuk është aq e thjeshtë si për gjysmëgrupet që nuk kanë njësh që të shtojmë një ekstra element që të jetë njësh i saj. Megjithatë tregohet se çdo unazë pa njësh mund të zhytet në mënyrë izomorfe në një unazë me njësh, por sigurisht kjo zhytje nuk e asgjëson studimin e unazave pa njësh gjë sa vjen e shtohet në artikuj të ndryshëm shkencorë në kërkimin e mirëfilltë algjebrik.

Përkufizim 1.1.9. [5] *Unaza $(A,+,\cdot)$ quhet unazë me pjesëtim në qoftë se ajo ka të paktën dy elemente dhe gjysmëgrupi i shumëzimit të saj $(A,\cdot)$ është 0-grup.*

Unaza me pjesëtim që është edhe ndërrimtare quhet <u>fushë</u>. Si për fushën edhe për unazën kemi karakteristikën e saj sipas këtij përkufizimi:

Përkufizim 1.1.10. [33] *Një unazë A quhet me karakteristikë <u>n</u>, në qoftë se ekziston numri natyror (për ne numrat natyror janë të ndryshëm nga zero) n i tillë që për çdo $a \in A$, $na = 0$ dhe për çdo numër natyror k më të vogël se n ekziston të paktën një element $b \in A$ i tillë që, $kb \neq 0$. Në qoftë se një numër i tillë natyror n nuk ekziston, atëherë unaza A quhet me karakteristikë 0.*

Le të jetë $(A,+,\cdot)$ një unazë dhe B, C dy nënbashkësi joboshe të A-së. Shënojmë:

$$B + C = \{b + c \in A \mid b \in B \wedge c \in C\},$$

$$BC = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} b_i c_i \in A \mid b_i \in B \wedge c_i \in C \wedge n \in \mathbb{N}\}.$$

Bindemi lehtë se për çdo tre bashkësi jo boshe B, C, D elementesh të unazës A kemi

$$(BC)D = B(CD)$$

dhe kështu përcaktojmë bashkësinë BCD si njërën prej secilës nga bashkësitë $(BC)D$, $B(CD)$ dhe në përgjithësi bashkësinë $B_1B_2 \dots B_n$ për çdo n nënbashkësi joboshe $B_{1,}B_2, \dots, B_n$ të A-së.

Në rast se nuk thuhet ndryshe bashkësia B^2 nuk është gjë tjetër veçse bashkësia e shumave b_1b_2 ku b_1, b_2 janë elemente të B-së dhe jo bashkësia e katrorëve të elementeve të B-së.

Në qoftë se $B = \{b\}$ ose $C = \{c\}$ për thjeshtësi do të shënojmë bA dhe Ac në vend të $\{b\}A$ dhe $A\{c\}$.

Një nënbashkësi joboshe A_1 elementesh të unazës $(A,+,\cdot)$ quhet <u>nënunazë</u> e saj në qoftë se

$$\forall(a_1,b_1)\in A_1^2,(\,a_1+b_1\in A_1\wedge a_1b_1\in A_1)\text{ dhe }0\in A_1\text{ dhe }\forall a_1\in A_1,-a_1\in A_1.$$

Nuk është vështirë të bindemi se A_1 është pjesë e qëndrueshme për mbledhjen dhe shumëzimin e unazës $(A,+,\cdot)$ dhe formon përsëri unazë në lidhje me mbledhjen dhe shumëzimin e induktuar në të.

Nënunazë me pjesëtim [fushë] e unazës $(A,+,\cdot)$ quhet çdo nënbashkësi joboshe F e A-së që është nënunazë e saj dhe unaza e përftuar prej saj, domethënë unaza $(F,+,\cdot)$, ku tashmë «+» dhe «·» janë përkatësisht mbledhja dhe shumëzimi i induktuar në të, është unazë me pjesëtim [fushë].

Përkufizim 1.1.11.[5] *Ideal i majtë* [*i djathtë*] *i unazës* $(A,+,\cdot)$ *quhet çdo nënbashkësi* L $[R]$ *e A-së që është nëngrup i grupit të mbledhjes* $(A,+)$ *të kësaj unaze dhe*

$$\forall(a,l)\in A\times L,al\in L,\,[\forall(a,r)\in A\times R,ra\in R]$$

ose njëlloj $AL\subseteq L$ $[RA\subseteq R]$.

Në qoftë se I është njëherësh ideal i majtë dhe ideal i djathtë i unazës A, atëherë ai quhet <u>ideal i dyanshëm</u> ose thjesht <u>ideal</u> i unazës A.

Përkufizim 1.1.12.[5] *Kuazi-ideal i unazës* $(A,+,\cdot)$ *quhet çdo nënbashkësi* Q *e A-së, që është nëngrup i grupit të mbledhjes* $(A,+)$ *të kësaj unaze dhe për më tepër*

$$QA\cap AQ\subseteq Q.$$

Përkufizim 1.1.13.[5] *Bi-ideal i unazës* $(A,+,\cdot)$ *quhet çdo nënbashkësi* B *e A-së, që është nënunazë e saj dhe për më tepër* $BAB\subseteq B$.

Prerja e çdo familje idealesh të majta [idealesh të djathta, kuazi-idealesh, bi-idealesh] të një unaze A është gjithmonë ideal i majtë [ideal i djathtë, kuazi-ideal, bi-ideal] i A-së meqë bashkësia që ka vetëm zeron e A-së dhe vetë A-ja janë ideale të majta [ideale të djathta, kuazi-ideale, bi-ideale] të unazës A.

Në mënyrë të ngjashme me gjysmëgrupet (formalisht zëvendësojmë fjalën gjysmëgrup me fjalën unazë) përcaktojmë idealin e majtë [idealin e djathtë, kuazi-idealin, bi-idealin] e përftuar nga një bashkësi elementesh X të një unaze A. Në rastin e veçantë kur bashkësia X ka vetëm një element x, atëherë ideali i majtë [ideali i djathtë, kuazi-ideali, bi-ideali] i përftuar nga bashkësia me një element $\{x\}$ quhet <u>ideal i majtë</u> [<u>ideal i djathtë</u>, <u>kuazi-ideal</u>, <u>bi-ideal</u>] <u>kryesor i përftuar nga elementi x</u>, i cili shënohet $(x)_l$ $\left[(x)_r,(x)_q,(x)_b\right]$. Nuk është vështirë të provohet se për çdo element a të një unaze A janë të vërteta barazimet:

(1.1.1) $$(a)_l=\mathbb{Z}a+Aa,$$

(1.1.2) $$(a)_r=\mathbb{Z}a+aA,$$

(1.1.3) $$(a)_q=\mathbb{Z}a+aA\cap Aa,$$

(1.1.4) $$(a)_b=\mathbb{Z}a+\mathbb{Z}a^2+aAa.$$

Thuhet se kuazi-ideali i një unaze A ka vetinë prerëse, në qoftë se ai është prerje e një ideali të majtë me një ideal të djathtë të saj.

Duke përdorur barazimet (1.1.1), (1.1.2) dhe (1.1.3) bindemi që në qoftë se kuazi-ideali kryesor $(x)_q$ ka vetinë prerëse, atëherë $(x)_q = (x)_l \cap (x)_r$.

Pohim 1.1.14. [5] *Një unazë A nuk ka ideale të majta* [*të djathta*] *të mirëfillta, domethënë të ndryshëm nga zero dhe A, atëherë dhe vetëm atëherë kur ose është unazë me pjesëtim ose është një unazë me shumëzim zero ose shkurt unazë zero, që e ka rendin numër prim.*

Pohim 1.1.15. [5] *Le të jetë A një unazë e tillë që $A^2 \neq 0$. Atëherë A-ja është unazë me pjesëtim atëherë dhe vetëm atëherë kur ajo nuk përmban kuazi-ideale të mirëfillta, domethënë të ndryshëm nga zero dhe A.*

Një element a i unazës $(A, +, \cdot)$ quhet <u>i thjeshtueshëm</u> në qoftë se ai është element i thjeshtueshëm i gjysmëgrupit të shumëzimit $(A, \cdot)$ të kësaj unaze.

Një kuazi-ideal Q i një unaze A quhet <u>kuazi-ideal minimal</u> në qoftë se nuk përmban kuazi-ideale të A-së përveç 0 dhe Q-së.

Teoremë 1.1.16. [5] *Në qoftë se një unazë A ka një element të thjeshtueshëm që përmbahet në një kuazi-ideal minimal Q të A-së, atëherë A-ja është unazë me pjesëtim.*

Elementi a i unazës A quhet <u>i rregullt</u> në qoftë se ekziston një element $x \in A$ i tillë që $a = axa$.

Një unazë A quhet <u>e rregullt</u> në qoftë se çdo element i saj është i rregullt.

Pohim 1.1.17. [5] *Elementi a i unazës A është i rregullt, atëherë dhe vetëm atëherë kur ideali i majtë* [*i djathtë*] *kryesor i përftuar nga elementi a ka një përftues idempotent e $(e^2 = e)$ domethënë $(a)_l = (e)_l$ $[(a)_r = (e)_r]$.*

Pohim 1.1.18. [14] *Le të jetë A një unazë dhe B një bi-ideal i saj. Në qoftë se elementet e B janë të rregullt, atëherë çdo bi-ideal i B-së është një kuazi-ideal i A-së.*

Kalojmë tani në përkufizimin e një moduli mbi një unazë çfarëdo që mund të mos jetë unitare.

Përkufizim 1.1.19. [33] *A-modul i majtë quhet çdo treshe e radhitur $(L, +, (\cdot)_A)$, ku $+$ është mbledhje në L, $(\cdot)_A$ është shumëzim në L me skalarë nga një unazë A, të tillë që:*

I. $(A, +)$ është grup abelian.
II. $\forall (a, x, y) \in A \times L^2, a(x + y) = ax + ay.$
III. $\forall (a, b, x) \in A^2 \times L, (a + b)x = ax + bx.$
IV. $\forall (a, b, x) \in A^2 \times L, (ab)x = a(bx).$

Kur nuk ka ngatërresa A-modulin e majtë do ta shënojmë ${}_AL$.

A-moduli i djathtë $(R, +, (\cdot)_A)$ përcaktohet në mënyrë duale, me marrëveshjen që prodhimi i skalarit $a \in A$ me elementin $x \in R$ shënohet xa. A-modulin e djathtë mund ta shënojmë, sigurisht kur nuk ka pështjellim, me simbolin R_A.

Në qoftë se unaza A është unitare dhe 1 është njësh i saj, atëherë kërkohet edhe plotësimi i kësaj aksiome të pestë për A-modulin e majtë [të djathtë]

$$V. \forall x \in L, 1x = x \; [\forall x \in R, x1 = x].$$

Në këtë rast A-moduli i majtë [i djathtë] quhet unitar.

Çdo unazë $(A, +, \cdot)$ shndërrohet në një A-modul të majtë [të djathtë] në qoftë se nuk ndryshojmë mbledhjen dhe shumëzimin «·» në A e shohim si shumëzim në A me skalarë përsëri në A, $(\cdot)_A$, që rezultatin e tij për elementin $a \in A$ dhe elementin $b \in A$ e ka $a \cdot b$ $[b \cdot a]$.

Po ashtu, çdo ideal të majtë L [ideal të djathtë R] të unazës $(A, +, \cdot)$ mund ta shndërrojmë në një A-modul të majtë [të djathtë]. Pikërisht, nuk është vështirë të bindemi, se $(L, +, (\cdot)_A)$ $[(R, +, (\cdot)_A)]$, ku $+$ është mbledhja e nënunazës së përftuar nga L $[R]$, kurse $(\cdot)_A$ është shumëzimi në L $[R]$ me skalarë në A, i tillë që rezultati i tij për elementin $a \in A$ dhe elementin l $[r]$ të L-së $[R$-së] është al $[ra]$ është A-modul i majtë [i djathtë].

Një koncept i rëndësishëm për A-modulet e majta [të djathta] është ai i A-homomorfizmit në përgjithësi dhe ai i A-izomorfizmit në veçanti. Pikërisht kemi këtë përkufizim:

Përkufizim 1.1.20. [20] *A-homomorfizëm i A-modulit të majtë [të djathtë], $(L, +, (\cdot)_A)$ $[(R, +, (\cdot)_A)]$, në A-modulin e majtë [të djathtë], $(L', +, (\cdot)_A)$ $[(R', +, (\cdot)_A)]$, quhet çdo pasqyrim $h: L \longrightarrow L'$ $[h: R \longrightarrow R']$ i tillë që:*

$$\forall (l_1, l_2) \in L^2, h(l_1 + l_2) = h(l_1) + h(l_2) \text{ dhe } \forall (a, l) \in A \times L, h(al) = ah(l).$$

$$[\forall (r_1, r_2) \in R^2, h(r_1 + r_2) = h(r_1) + h(r_2) \text{ dhe } \forall (a, r) \in A \times R, h(ra) = h(r)a.]$$

Në qoftë se pasqyrimi h i këtij përkufizimi është pasqyrim bijektiv, atëherë ai quhet <u>A-izomorfizëm</u>. Meqë unazat janë module, mund të na shkonte nëpër mend që homomorfizëm të unazave të konsideronim çdo homomorfizëm të moduleve që përftohen prej tyre. Por menjëherë ky hamendësim është i gabuar sepse unazat A dhe A' janë njëra A-modul i majtë [i djathtë] kurse tjetra A'-modul i djathtë [i majtë]; kështu që përkufizimi 1.1.20 nuk funksionon. Prandaj, <u>homomorfizëm</u> të një unaze $(A, +, \cdot)$ në unazën $(A', +, \cdot)$, si zakonisht do të quajmë çdo pasqyrim $h: A \longrightarrow A'$ të tillë që

$$\forall (a, b) \in A^2, h(a + b) = h(a) + h(b) \text{ dhe } \forall (a, b) \in A^2, h(ab) = h(a)h(b).$$

Kur homomorfizmi h është bijektiv, atëherë ai quhet <u>izomorfizëm</u> i unazës A në unazën A'.

Pohim 1.1.21. [20] Në qoftë se e dhe f janë elemente idempotente jo zero të unazës A, atëherë kushtet e mëposhtme janë ekuivalente:

i. Idealet e majta Ae, Af janë A-module të majta A-izomorfe.

ii. Idealet e djathta eA, fA janë A-module të djathta A-izomorfe.
iii. Ekzistojnë elementet a, b të A-së të tillë që:

(1.1.5) $$eaf = a, fbe = b,$$

(1.1.6) $$ab = e, ba = f.$$

Në qoftë se $(A,+,\cdot)$ është një unazë, atëherë si pjesë përbërëse të saj kemi gjysmëgrupin $(A,\cdot)$ që quhet dhe gjysmëgrup i shumëzimit i saj. Tani duke u mbështetur te [34] do të përshkruajmë një proces që na jep mundësi që nga një gjysmëgrup i dhënë të përftojmë një unazë.

Le të jetë S një gjysmëgrup çfarëdo dhe A një unazë me njësh 1. Shqyrtojmë të gjitha simbolet:

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n,$$

ku $a_1,a_2,\cdots,a_n$ janë elemente të unazës A, ndërsa $s_1,s_2,\cdots,s_n$ janë elemente të ndryshme të gjysmëgrupit S, për të gjitha numrat natyrorë n. Me marrëveshje elementet e gjysmëgrupit S do t'i konsiderojmë si simbole të trajtës së mësipërme pikërisht për $n = 1$ dhe $a_1 = 1$. Në qoftë se gjysmëgrupi ka zero, atëherë elementet e trajtës

$$0s_1 + 0s_2 + \cdots + 0s_n$$

do t'i konsiderojmë të njëjtë me elementin zero të S-së, ndërsa kur S-ja nuk ka element zero, atëherë këto elemente do t'i konsiderojmë të njëjtë me njëri-tjetrin.

Dy simbole:

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ms_m,$$

$$a_1's_1' + a_2's_2' + \cdots + a_n's_n'$$

do t'i konsiderojmë të njëjtë vetëm kur $m = n$ dhe çdo term i njërit pavarësisht vendit ku ndodhet është term i tjetrit. Tani që dhamë dhe postulatin e barazimit kemi një bashkësi të formuar nga këto simbole të mirëpërcaktuar, të cilën e shënojmë $A[S]$. Në këtë bashkësi përcaktojmë mbledhjen nëpërmjet mbledhjes së koeficienteve (elementeve të A-së pranë elementeve të S-së) pranë elementeve të njëjta të gjysmëgrupit S që marrin pjesë në formimin e dy elementeve të $A[S]$ që do të mblidhen, duke u marrë vesh në përputhje me postulatin e barazimit, që kur një element i gjysmëgrupit figuron te njëri element i $A[S]$, ndërsa te tjetri jo, atëherë tek i fundit të marrim zero koeficientin pranë këtij elementi të gjysmëgrupit. Tani, shenjat «+» që marrin pjesë në formimin e simboleve që u shndërruan në elemente të bashkësisë $A[S]$ fitojnë mbledhjen e zakonshme të tij, domethënë atë të mbledhjes në këtë bashkësi.

Çifti i radhitur $(A[S],+)$ është grup abelian sepse mbledhja ka vetinë e ndërrimit dhe të shoqërimit, si element zero shërben elementi

$$0s_1 + 0s_2 + \cdots + 0s_n,$$

ndërsa elementi i kundërt i elementit

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n$$

është elementi

$$(-a_1)s_1 + (-a_2)s_2 + \cdots + (-a_n)s_n.$$

Elementet çfarëdo të grupit abelian $(A[S], +)$ i shumëzojmë sipas ligjit shpërndarës të shumëzimit në lidhje me mbledhjen në një unazë çfarëdo dhe përftojmë kështu unazën $(A[S], +, \cdot)$ meqë shumëzimi i përcaktuar në $A[S]$ ka edhe vetinë e shoqërimit.

Unazën $(A[S], +, \cdot)$ e quajmë unazë të lirë të gjysmëgrupit S mbi unazën A ose thjesht unazë të gjysmëgrupit S mbi unazën A dhe kur nuk ka ngatërresa e shënojmë atë thjesht $A[S]$. Në qoftë se gjysmëgrupi S është i fundëm dhe unaza A është e fundme, atëherë edhe $A[S]$ është e fundme.

Nuk është vështirë të bindemi se kur gjysmëgrupi S nuk ka njësh, atëherë edhe unaza $(A[S], +, \cdot)$ nuk ka njësh. Duke marrë gjysmëgrupin e shumëzimit të kësaj unaze, $(A[S], \cdot)$ i cili nuk ka njësh dhe duke përsëritur procesin e përshkruar përftojmë një pafundësi unazash pa njësh duke u nisur vetëm nga një gjysmëgrup i vetëm pa njësh S (të tillë ka një pafundësi!). Kështu, me anë të unazave të lira të gjysmëgrupeve e rritim ndjeshëm «nomenklaturën» e unazave që nuk kanë njësh. Prandaj klasa e unazave jo unitare nuk mund të lihet jashtë vëmendjes së studimit algjebrik. Ne pikërisht, në disertacionin tonë do të kemi si objekt studimi unazat që mund të jenë ose jo unaza unitare, ku përfshihen edhe unazat-gjysmëgrupore $A[S]$ të përftuara nga gjysmëgrupe që nuk janë monoid.

§ 2. Γ-UNAZAT DHE Γ-GJYSMËGRUPET

Nabusawa ka futur te [37] Γ-unazat si përgjithësim të unazave të cilat sot njihen si Γ-unazat e Nabusawa-së, sipas këti përkufizimi:

Përkufizim 1.2.1. *Le të jetë M një grup aditiv elementet e të cilit shënohen a, b, c, ... dhe Γ një tjetër grup aditiv elementet e të cilit janë α, β, γ,.... Supozojmë se $a\gamma b$ përcaktohet si një element i M-së dhe $\alpha a\beta$ përcaktohet si një element i Γ për çdo a, b, α dhe β. Në qoftë se prodhimet kënaqin tri konditat e mëposhtme:*

1) $(a_1 + a_2)\gamma b = a_1\gamma b + a_2\gamma b, a(\gamma_1 + \gamma_2)b = a\gamma_1 b + a\gamma_2 b, a\gamma(b_1 + b_2) = a\gamma b_1 + a\gamma b_2$
2) $(a\gamma b)\beta c = a\gamma(b\beta c) = a(\gamma b\beta)c,$
3) *Në qoftë se $a\gamma b = 0$ për çdo a dhe b nga M-ja, atëherë $\gamma = 0$,*

atëherë M-ja quhet një Γ-unazë.

Koncepti që porsa përshkruam është më i gjerë se ai i unazës së zakonshme në kuptimin që menjëherë një unazë $(A, +, \cdot)$ mund ta shndërrojmë në Γ-unazë në qoftë se marrim si grupe abeliane M dhe Γ vetë grupin abelian mbledhor $(A, +)$ të kësaj unaze. Në këto Γ-unaza me konditën e minimalitetit për idealet e majta Nabusawa tregoi vërtetësinë e një teoreme të Wedderburn-it. Më tej në këto unaza nga Barnes te [38] u shtrinë disa koncepte të huazuara nga Teoria e Unazave, si Γ-homomorfizmi, idealet, idealet prim dhe idealet primarë të djathtë, m-sistemet dhe radikali i një ideali. Barnes duke dobësuar disa kushte të përkufizimit të dhënë nga Nabusawa ka përkufizuar ato që aktualisht njihen si Γ-unaza, duke i quajtur ato që plotësojnë përkufizimin 1.2.1 Γ-unaza të Nabusawa-së.

Për të dhënë në trajtë paksa të modernizuar përkufizimin e Barnesit të Γ-unazave përcaktojmë fillimisht Γ-shumëzimin në një bashkësi M.

Le të jenë Γ dhe M dy bashkëi joboshe. Një pasqyrim i $M \times \Gamma \times M$ në M quhet <u>Γ-shumëzim</u> në M dhe shënohet $(\cdot)_\Gamma$. Rezultati i këtij Γ-shumëzimi për çdo dy elemente a, b të M-së dhe çdo element $\gamma \in \Gamma$ shënohet $a\gamma b$.

Përkufizim 1.2.2. [38]. *Γ-unazë quhet çdo pesëshe e radhitur $(M, \Gamma, +, \oplus, (\cdot)_\Gamma)$, ku M, Γ janë bashkësi, + është mbledhja në M, $\oplus$ mbledhja në Γ, $(\cdot)_\Gamma$ është Γ-shumëzim në M të tillë që:*

1) $(M, +)$ *është grup abelian.*
2) $(\Gamma, \oplus)$ *është grup abelian.*
3) $\forall(a, b, c, \alpha, \beta) \in M^3 \times \Gamma^2, (a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c)$.
4) $\forall(a, b, c, \gamma) \in M^3 \times \Gamma, (a + b)\gamma c = a\gamma c + b\gamma c$.
5) $\forall(a, b, c, \gamma) \in M^3 \times \Gamma, a\gamma(b + c) = a\gamma b + a\gamma c$.
6) $\forall(a, b, \alpha, \beta) \in M^2 \times \Gamma^2, a(\alpha \oplus \beta)b = a\alpha b + a\beta b$.

Një Γ-unazë M quhet ndërrimtare (komutative) në qoftë se është i vërtetë pohimi

$$\forall(a, b, \gamma) \in M^2 \times \Gamma, a\gamma b = b\gamma a.$$

Përkufizim 1.2.3. [41]. *Γ-unaza ndërrimtare M quhet Γ-fushë në qoftë se për çdo element jozero a të M-së, për çdo element b të M-së dhe për çdo dy elemente jozero γ_1,γ_2 të Γ ekziston një element a' i M-së i tillë që $a\gamma_1 a'\gamma_2 b = b$.*

Përkufizim 1.2.4. [42]. *Le të jetë M një Γ-unazë. M quhet Γ-unazë me pjesëtim në qoftë se $M' = M\backslash\{0\}$ është një Γ'-grup, ku $\Gamma' = \Gamma\backslash\{0\}$.*

Duke u bazuar te përkufizimi i Γ-unazave të Nabusawa-së Sen-i te [39] ka futur Γ-gjysmëgrupet që njihen si Γ-gjysmëgrupet e Sen-it. Sen dhe Saha te [40] kanë përkufizuar një përgjithësim të Γ-gjysmëgrupit të Sen-it që tani quhet thjesht Γ-gjysmëgrup. Formalisht koncepti i Γ-gjysmëgrupit merret nga ai i Γ-unazës duke mënjanuar mbledhjen e saj. Më saktë kemi këtë përkufizim:

Përkufizim 1.2.5. [40] *Γ-gjysmëgrup quhet çdo çift i radhitur $(S, (\cdot)_\Gamma)$, ku S, Γ janë bashkësi joboshe dhe $(\cdot)_\Gamma$ është Γ-shumëzim në S i tillë që:*

$$\forall(a, b, c, \alpha, \beta) \in S^3 \times \Gamma^2, (a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c).$$

Le të jetë S një Γ-gjysmëgrup dhe γ një element i fiksuar i Γ. Si te [40] përcaktojmë në S veprimin $\circ_\gamma$ me anë të barazimit $a \circ_\gamma b = a\gamma b$. Është e qartë se $\circ_\gamma$ është veprim shoqërimtar në S dhe rrjedhimisht kemi gjysmëgrupin e zakonshëm $(S, \circ_\gamma)$ i cili shënohet thjesht S_γ.

<u>Zero</u> e Γ-gjysmëgrupit S është një element i tij, që shënohet me simbolin e zakonshëm 0, i tillë që

$$\forall(a, \gamma) \in S \times \Gamma, a\gamma 0 = 0 = 0\gamma a.$$

Pohim 1.2.6. [40] *Le të jetë S një Γ-gjysmëgrup. Në qoftë se për ndonjë $\gamma \in \Gamma$, S_γ është grup, atëherë për çdo $\gamma \in \Gamma$, S_γ është grup.*

Përkufizim 1.2.7. [40] *Γ-gjysmëgrupi S quhet Γ-grup në qoftë se S_γ është grup për ndonjë (rrjedhimisht për çdo) $\gamma \in \Gamma$.*

KAPITULLI II

RELACIONET E GREEN-IT NË UNAZA

Relacionet e Green-it në unaza janë futur për herë të parë nga P.Petro në vitin 1982 te [1] dhe më tej ato janë studiuar në disertacionin e tij me titull «Kuazi-idealet në disa struktura algjebrike dhe ndikime të këtyre strukturave në modernizimin e lëndës së Algjebrës» [2].

Relacionet $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}$, në unaza janë përkufizuar në mënyrë të ngjashme me relacionet e Green-it (James Alexander Green) në gjysmëgrupe, të cilat janë futur dhe studiuar për herë të parë në vitin 1951 te [4]. Është pikërisht kjo arsyeja që ato te [1] dhe te [2] janë quajtur relacionet e Green-it në unaza.

Relacioni $\mathcal{Q}$ i barazimit të kuazi-idealeve kryesore në unaza është futur te [1] dhe është studiuar te [1] dhe [2]. Ky relacion është përkufizuar në mënyrë analoge me relacionin $\mathcal{Q}$ në gjysmëgrupe të futur te [3] ku është treguar se $\mathcal{Q} = \mathcal{H}$.

Më tej në vitin 1983 Steinfeld (Otto Steinfeld) me anë të një letërkëmbimi me P. Petro ka njoftuar për futjen e relacioneve $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \mathcal{D}$ dhe $\mathcal{Q}$ në unaza duke vënë në dukje edhe gjetjen e dy teoremave të tipit të Green-it për unazat, nga të cilat njëra ndihmonte për vërtetimin e shpejtë të një teoreme të vërtetuar te [5] në mënyrë direkte. Meqë vërtetimi i teoremës analoge për gjysmëgrupet i bërë fillimisht në mënyrë të drejtpërdrejt ishte thjeshtuar ndjeshëm duke përdorur relacionet e Green-it, Steinfeld te [5] tërhiqte vëmendjen për dobinë që do të kishte gjetja e një teoreme të tipit të Green-it për unazat. Vetë O.Steinfeld i rifut relacionet $\mathcal{L}$ dhe $\mathcal{R}$ në unaza te [6], pa cituar burimin e futjes fillestare të tyre, për të cilën ishte njoftuar, dhe i përdor ato për të vërtetuar një rezultat për kuazi-idealet kanonike, rezultat i cili në rrugë direkte ndoshta do të ishte i vështirë të vërtetohej.

Në vitin 2002 relacionet e Green-it në unaza $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ dhe $\mathcal{H}$ janë paraqitur dhe studiuar në trajtë më të plotë te [7] ku janë studiuar gjithashtu relacioni $\mathcal{D}$ i Green-it si dhe relacioni $\mathcal{Q}$, të cilin do ta quajmë gjithashtu relacion të Green-it në unaza. Te [7] është treguar se në dallim nga gjysmëgrupet relacioni $\mathcal{Q}$ është i ndryshëm nga relacioni i Green-it $\mathcal{H}$, sigurisht duke pasur në përgjithësi përfshirjen $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{H}$.

Në këtë kapitull së pari ne tregojmë lidhjen e klasave të ekuivalencës sipas relacioneve $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}$ dhe $\mathcal{Q}$ në një unazë $(A, +, \cdot)$ me klasat e ekuivalencës përkatëse sipas relacioneve të Green-it të gjysmëgrupit të shumëzimit $(A, \cdot)$ të kësaj unaze. Më tej me anë të këtyre lidhjeve gjejmë një rast kur një ideal i majtë minimal [ideal i djathtë minimal, kuazi-ideal minimal] i unazës $(A, +, \cdot)$ mbetet i tillë edhe në gjysmëgrupin e shumëzimit $(A, \cdot)$ të saj si dhe gjejmë një vërtetim tjetër të teoremës së Green-it për unazat. Gjithashtu këtu studiohet edhe sjellja e një unaze që nuk ka njësh dhe pjesëtues të zeros në lidhje me relacionet $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}$ dhe $\mathcal{Q}$ si dhe shqyrtohen unazat që janë të thjeshta me secilën prej relacioneve të Green-it $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}$ dhe $\mathcal{Q}$. Objekt diskutimi në këtë kapitull është edhe «transferimi» i karakteristikës së idealeve të majta minimale, idealeve të djathta minimale dhe kuazi-idealeve minimale.

Në paragrafin e fundit të këtij kapitulli do të futim dhe do të studiojmë edhe relacionin $\mathcal{B}$ të «barazimit të bi-idealeve kryesore». Në këtë kapitull do të shtrojmë edhe disa probleme të cilat do ti lëmë të hapura.

§ 1. RELACIONET E GREEN-IT $\mathcal{L}$ DHE $\mathcal{R}$ NË UNAZA

Relacionet e Green-it $\mathcal{L}$ dhe $\mathcal{R}$ në një unazë A [7] janë përcaktuar si më poshtë:

$$\forall(a,b) \in A^2, a\mathcal{L}b \Leftrightarrow (a)_l = (b)_l,$$

$$\forall(a,b) \in A^2, a\mathcal{R}b \Leftrightarrow (a)_r = (b)_r,$$

ku $(a)_l$, $(b)_l$, $(a)_r$, $(b)_r$ janë përkatësisht idealet e majta kryesore dhe idealet e djathta kryesore të përftuara nga elementet a, b të unazës A. Duket qartë se relacionet $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ janë relacione ekuivalence në A. Klasat e ekuivalencës sipas relacioneve $\mathcal{L}$ dhe $\mathcal{R}$ të elementit $a \in A$ do t'i shënojmë përkatësisht L_a dhe R_a. Në qoftë se në përkufizimet e mësipërme të relacioneve të Green-it $\mathcal{L}$ dhe $\mathcal{R}$ në unazën A, zëvendësojmë unazën A me një gjysmëgrup S dhe idealet e majta kryesore $(a)_l$, $(b)_l$ dhe idealet e djathta kryesore $(a)_r$, $(b)_r$ të unazës A i shohim si ideale të majta kryesore dhe ideale të djathta kryesore të përftuara nga elementet a, b të gjysmëgrupit S, atëherë kemi relacionet e Green-it në gjysmëgrupin S, të cilat janë shënuar me po ato simbole që shënohen edhe relacionet e Green-it $\mathcal{L}$ dhe $\mathcal{R}$ në unazën A.

Ne për të dalluar relacionet e Green-it $\mathcal{L}$ dhe $\mathcal{R}$ në unazën $(A,+,\cdot)$ nga relacionet përkatëse të Green-it në gjysmëgrupin e shumëzimit të kësaj unaze $(A,\cdot)$ këto të fundit do t'i shënojmë $\mathcal{L}(\cdot)$ dhe $\mathcal{R}(\cdot)$. Gjithashtu klasat e ekuivalencës të elementit a të gjysmëgrupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$ sipas relacioneve të Green-it $\mathcal{L}(\cdot)$ dhe $\mathcal{R}(\cdot)$ do t'i shënojmë përkatësisht $L_a(\cdot)$ dhe $R_a(\cdot)$. Për thjeshtësi sipas [6] për çdo unazë A do të përdorim shënimet:

$$(k,u)x = kx + ux,$$

$$y(k',u') = k'y + yu'.$$

ku k, k' janë numra të plotë dhe x, y, u, u' janë elemente të çfarëdoshme të A.

Pohim 2.1.1. **[7]** *Le të jenë a, b dy elemente të unazës A të tillë që $a\mathcal{L}b$. Në qoftë se $a = (k,u)b$ dhe $b = (k',u')a$, ku $k, k' \in \mathbb{Z}$ dhe $u, u' \in A$, atëherë pasqyrimet*:

$$f: (a)_l \cap (a)_r \xrightarrow[x\to(k',u')x]{} (b)_l \cap (b)_r,\ g: (b)_l \cap (b)_r \xrightarrow[y\to(k,u)y]{} (a)_l \cap (a)_r$$

janë të anasjellë të njëri tjetrit dhe pasqyrojnë në mënyrë bijektive H_a në H_b. Pra, çdo dy $\mathcal{H}$-klasa që përfshihen në të njëjtën $\mathcal{L}$-klasë kanë të njëjtin kardinal.

Le të jetë $(A,+,\cdot)$ një unazë çfarëdo. Në këtë unazë kemi relacionet e Green-it $\mathcal{L}$ dhe $\mathcal{R}$ si dhe relacionet e Green-it $\mathcal{L}(\cdot)$ dhe $\mathcal{R}(\cdot)$ në gjysmëgrupin e shumëzimit $(A,\cdot)$ të saj. Në qoftë se unaza $(A,+,\cdot)$ nuk ka njësh, atëherë nga barazimet (1.1.1) dhe (1.1.2) kemi vetëm përfshirjet $\mathcal{L}(\cdot) \subseteq \mathcal{L}$ dhe $\mathcal{R}(\cdot) \subseteq \mathcal{R}$. Shembulli i mëposhtëm tregon se këto përfshirje mund të jenë strikte.

Shembull 2.1.2. **[10]** Le të jetë $S = \{0, e, a, b\}$ gjysmëgrupi me këtë tabelë të Cayley-it:

·	e	a	b	0
e	e	a	0	0
a	0	0	0	0
b	b	0	0	0
0	0	0	0	0

Shënojmë $\mathbb{Z}[S]$ unazën e gjysmëgrupit S mbi unazën e numrave të plotë $\mathbb{Z}$. Në këtë unazë kemi:

$$-a \in L_a, -a \notin L_a(\cdot), -b \in R_b, -b \notin R_b(\cdot).$$

Ky shembull tregon se në përgjithësi relacionet e Green-it $\mathcal{L}$ dhe $\mathcal{R}$ në një unazë janë të ndryshme nga relacionet e Green-it $\mathcal{L}(\cdot)$ dhe $\mathcal{R}(\cdot)$ në gjysmëgrupin e shumëzimit të kësaj unaze. Kështu që relacionet e Green-it në unazë, që ne studiojmë janë të ndryshme nga relacionet e Green-it në një unazë të përcaktuar si relacione të Green-it në gjysmëgrupin përkatës të saj [11].

Teoremë 2.1.3. *Le të jetë $(A,+,\cdot)$ një unazë dhe a një element i A-së. Atëherë ose $\mathcal{L}$-klasa [$\mathcal{R}$-klasa] L_a [R_a] është bashkim $\mathcal{L}(\cdot)$-klasash [$\mathcal{R}(\cdot)$-klasash] të gjysmëgrupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$ të cilët kanë vetëm nga një element, ose $L_a = L_a(\cdot)$ [$R_a = R_a(\cdot)$].*

Vërtetim. Dallojmë dy raste të mundshme:

Rasti i parë. Çdo $L_x(\cdot)$ klasë që përfshihet në L_a ka vetëm një element. Atëherë kemi

$$L_a = \bigcup_{x \in L_a} L_x(\cdot).$$

Rasti i dytë. Ekziston një klasë $L_x(\cdot)$, $x \in L_a$ e cila ka të paktën dy elemente. Le të jenë b, c dy elemente të ndryshme të A të cilët i përkasin $L_x(\cdot)$. Atëherë ekzistojnë elementet u, v të A-së të tillë që $b = uc$ dhe $c = vb$. Për çdo element $d \in L_a$ ekzistojnë numrat e plotë k_1, k_2 dhe elementet u_1, u_2 të A-së të tillë që:

$$d = k_1 c + u_1 c \text{ dhe } c = k_2 d + u_2 d.$$

Duke bërë zëvendësime të përshtatshme kemi:

$$d = k_1 c + u_1 c = k_1 vb + u_1 vb = (k_1 v + u_1 v)b,$$

$$b = uc = u(k_2 d + u_2 d) = (k_2 u + uu_2)d,$$

të cilët tregojnë se $d\mathcal{L}(\cdot)b$. Kështu, $d \in L_b(\cdot) = L_x(\cdot)$ dhe rrjedhimisht $L_a = L_x(\cdot)$. Tani është e qartë se $L_a = L_a(\cdot)$.

Në mënyrë të ngjashme bëhet vërtetimi edhe për klasën R_a.■

Përkufizim 2.1.4. *Dy elemente a, b të një unaze A quhen pjesëtuesa të djathtë [të majtë] të njëri-tjetrit në qoftë se ekzistojnë elementet c, d të A-së të tilla që $a = cb$ [$a = bc$] dhe $b = da$ [$b = ad$].*

Elementet a, b të unazës A quhen pjesëtuesa të njëri-tjetrit, kur janë njëherësh pjesëtuesa të djathtë dhe pjesëtuesa të majtë të njëri-tjetrit.

Rrjedhim 2.1.5. *Le të jetë a një element i ndryshëm nga zero e unazës $(A,+,\cdot)$. Në qoftë se ideali i majtë [ideali i djathtë]* kryesor $(a)_l$ $[(a)_r]$ *i unazës $(A,+,\cdot)$ është minimal dhe ekziston një element $b \neq a$ i tillë që a dhe b janë pjesëtuesa të djathtë [të majtë] të njëri-tjetrit, atëherë $(a)_l$ $[(a)_r]$ është ideal i majtë [i djathtë] kryesor minimal i gjysmëgrupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të kësaj unaze.*

Vërtetim. Është e qartë se elementet $a \neq b$ i përkasin $L(\cdot)$-klasës së gjysmëgrupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$. Në sajë të teoremës 2.1.3 janë të vërteta barazimet:

$$L_a \cup 0 = (a)_l = L_a(\cdot) \cup 0.$$

Nga ana tjetër po të shënojmë $(a)_l^S$ idealin e majtë kryesor të gjysmëgrupit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$, i cili përftohet nga elementi $a \in A$ kemi:

$$L_a(\cdot) \cup 0 \subseteq (a)_l^S \subseteq (a)_l = L_a(\cdot) \cup 0.$$

Pra,

$$(a)_l = (a)_l^S = L_a(\cdot) \cup 0.$$

Tani është qartë se $(a)_l$ është ideal minimal i gjysmëgrupit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$.

Njëlloj bëhet vërtetimi edhe për idealin e djathtë kryesor $(a)_r$.■

Në qoftë se një $\mathcal{L}$-klasë ka vetëm një element, atëherë është e qartë se $L_a = L_a(\cdot)$. Pohimi i mëposhtëm tregon një rast kur të vetmet klasa sipas relacioneve $\mathcal{L}$ dhe $\mathcal{R}$ të unazës $(A,+,\cdot)$ përputhen me klasat përkatëse sipas relacioneve $\mathcal{L}(\cdot)$ dhe $\mathcal{R}(\cdot)$ të gjysmëgrupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të kësaj unaze janë ato që kanë vetëm nga një element.

Pohim 2.1.6. *Le të jetë $(A,+,\cdot)$ një unazë që ka të paktën dy elemente por që nuk ka njësh dhe nuk ka pjesëtues të zeros. Atëherë të vetmet klasa sipas relacionit të Green-it $\mathcal{L}$ $[\mathcal{R}]$ në unazën $(A,+,\cdot)$ që përputhen me klasat përkatëse sipas relacionit $\mathcal{L}(\cdot)$ $[\mathcal{R}(\cdot)]$ në gjysmëgrupin e shumëzimit $(A,\cdot)$ të kësaj unaze janë ato që kanë vetëm nga një element.*

Vërtetim. Meqenëse unaza $(A,+,\cdot)$ nuk ka pjesëtues të zeros bashkësia $A^* = A\backslash 0$ është pjesë e qëndrueshme e A-së në lidhje me veprimin e shumëzimit të unazës A dhe formon gjysmëgrup në lidhje me shumëzimin e induktuar në të. Është e qartë se gjysmëgrupi $(A^*,\cdot)$ nuk ka njësh dhe është një gjysmëgrup i thjeshtueshëm. Vëmë re se për çdo element $a \neq 0$ të A-së klasa $L_a(\cdot)$ e elementit a të gjysmëgrupit $(A,\cdot)$ përputhet me klasën përkatëse të gjysmëgrupit $(A^*,\cdot)$, e cila në sajë të pohimit 1.1.7 ka vetëm një element, pikërisht a-në. Tani në sajë të teoremës 2.1.3 $L_a = L_a(\cdot)$ vetëm kur L_a ka një element.

Njëlloj bëhet vërtetimi edhe për relacionin $\mathcal{R}$.■

Nga ky pohim marrim menjëherë këtë rrjedhim:

Rrjedhim 2.1.7. *Në një unazë* $(A,+,\cdot)$ *që nuk ka pjesëtues të zeros dhe njësh relacionet e Green-it* $\mathcal{L}$ *dhe* $\mathcal{R}$ *përputhen me relacionet e Green-it* $\mathcal{L}(\cdot)$ *dhe* $\mathcal{R}(\cdot)$ *në gjysmëgrupin e shumëzimit të kësaj unaze,* $(A,\cdot)$*, atëherë dhe vetëm atëherë kur* $\mathcal{L} = \mathcal{R} = 1_A$*, ku* 1_A *është relacioni identik në* A*.*

Më sipër pamë një rast «ekstrem» kur relacionet e Green-it $\mathcal{L}$ dhe $\mathcal{R}$ në një unazë janë «më finët» e mundshëm, domethënë klasat e ekuivalencës sipas tyre kanë vetëm nga një element.

Tani do të shqyrtojmë rastin tjetër «ekstrem» pikërisht rastin kur relacionet e Green-it $\mathcal{L}$ dhe $\mathcal{R}$ në një unazë A janë «më të trashët» e mundshëm, domethënë kur çdo dy elemente të unazës të ndryshëm nga zero janë ekuivalentë sipas këtyre relacioneve. Në këtë rast është e qartë se për çdo $a \in A\backslash 0$ kemi $L_a = R_a = A\backslash 0$.

Një unazë A që ka të paktën dy elemente do ta quajmë $\mathcal{L}$-të thjeshtë [$\mathcal{R}$- të thjeshtë] në qoftë se të vetmet klasa ekuivalence të saj sipas këtij relacioni janë vetëm 0 dhe $A\backslash 0$.

Duke reflektuar pohimin 1.1.14 kemi këtë pohim:

Pohim 2.1.8. *Për çdo unazë A që ka të paktën dy elemente kushtet e mëposhtme janë ekuivalente*:

1) *Unaza A është unazë me pjesëtim.*
2) *Unaza A nuk është unazë zero (me shumëzim zero) dhe është* $\mathcal{L}$*-e thjeshtë.*
3) *Unaza A nuk është zero dhe është* $\mathcal{R}$*-e thjeshtë.*

Vërtetim. Ne do të vërtetojmë ekuivalencën e pohimeve 1) dhe 2). Njëlloj vërtetohet dhe ekuivalenca 1) $\Leftrightarrow$ 3).

Supozojmë se unaza A është me pjesëtim. Atëherë A është unazë jozero dhe për çdo element të ndryshëm nga zero $a \in A$ kemi:

$$A = Aa \subseteq (a)_l \subseteq A.$$

Pra,

$$\forall (a,b) \in A^* = A\backslash 0, (a)_l = A = (b)_l$$

dhe rrjedhimisht unaza A është $\mathcal{L}$-e thjeshtë.

Anasjellas, supozojmë se unaza A nuk është unazë zero dhe është $\mathcal{L}$-e thjeshtë. Le të jetë a një element i ndryshëm nga zero i unazës A, i cili ekziston sepse përndryshe A do të ishte me shumëzim zero. Meqë $L_a = A\backslash 0$ kemi:

$$A = L_a \cup 0 \subseteq (a)_l \subseteq A.$$

Pra,

$$\forall a \in A\backslash 0, (a)_l = A.$$

Që këtej rrjedh se unaza A nuk ka ideale të majta të mirëfillta dhe rrjedhimisht në sajë të pohimit 1.1.14 është unazë me pjesëtim.■

Nga ky pohim dhe nga pohimi 1.1.14 marrim menjëherë këtë rrjedhim:

Rrjedhim 2.1.9. *Për çdo unazë A që ka një numër të pafundmë elementesh pohimet e mëposhtme janë ekuivalente*:

1. *Unaza A është me pjesëtim.*
2. *Unaza A është $\mathcal{L}$-e thjeshtë.*
3. *Unaza A është $\mathcal{R}$-e thjeshtë.*

Nga pohimi 2.1.8 rrjedh menjëherë se kur një unazë $(A,+,\cdot)$ është $\mathcal{L}$-e thjeshtë [$\mathcal{R}$-e thjeshtë] atëherë relacioni $\mathcal{L}$ [$\mathcal{R}$] në unazën $(A,+,\cdot)$ përputhet me relacionin e Green-it $\mathcal{L}(\cdot)$ [$\mathcal{R}(\cdot)$] në gjysmëgrupin e shumëzimit, $(A,\cdot)$, të kësaj unaze.

Anasjellas, në qoftë se gjysmëgrupi i shumëzimit $(A,\cdot)$ i unazës $(A,+,\cdot)$ është $\mathcal{L}(\cdot)$ [$\mathcal{R}(\cdot)$] i thjeshtë, quhet i tillë kur të vetmet $\mathcal{L}(\cdot)$ [$\mathcal{R}(\cdot)$] klasa ekuivalence të tij janë 0 dhe $A\backslash 0$, atëherë duket qartë se unaza $(A,+,\cdot)$ është $\mathcal{L}$ [$\mathcal{R}$] e thjeshtë.

Kështu në rastin e dytë ekstremal kur relacionet e Green-it në një unazë $(A,+,\cdot)$ janë trivialë, atëherë kemi përputhje të tyre me relacionet përkatëse të Green-it në gjysmëgrupin e shumëzimit $(A,\cdot)$ të kësaj unaze dhe anasjellas.

Ndërsa në rastin e parë ekstremal në përgjithësi në një unazë çfarëdo nuk e kemi këtë përputhje (ne pamë një rast të veçantë kur kemi përputhje). Kështu, është e natyrshme të shtrojmë këtë problem të cilin po e lëmë të hapur.

Problem 2.1.10. *Të gjenden kushte të nevojshme, të mjaftueshme, kushte të nevojshme dhe të mjaftueshme që, në qoftë se në një unazë $(A,+,\cdot)$ relacioni i Green-it $\mathcal{L}(\cdot)$ [$\mathcal{R}(\cdot)$] në gjysmëgrupin e shumëzimit $(A,\cdot)$ të kësaj unaze është relacioni identik 1_A, atëherë edhe relacioni i Green-it $\mathcal{L}$ [$\mathcal{R}$] është i barabartë me 1_A.*

Së fundi në këtë paragraf do të shohim «transferimin» e karakteristikës së një kuazi-ideali kryesor nga secili prej relacioneve të Green-it $\mathcal{L}$ dhe $\mathcal{R}$. Pikërisht kemi këtë pohim:

Pohim 2.1.11. *Le të jenë a, b dy elemente të një unaze A të tillë që kuazi-idealet kryesore $(a)_q$ dhe $(b)_q$ kanë vetinë prerëse. Në qoftë se $a\mathcal{L}b$, atëherë $(a)_q$ dhe $(b)_q$ si nënunaza kanë të njëjtën karakteristikë.*

Vërtetim. Meqë $(a)_q$ dhe $(b)_q$ kanë vetinë prerëse, kemi $(a)_q = (a)_l \cap (a)_r$ dhe $(b)_q = (b)_l \cap (b)_r$. Kështu sipas pohimit 2.1.1 pasqyrimi

$$f: (a)_q \xrightarrow[x \to kx+ux]{} (b)_q$$

është bijektiv. Për më tepër për çdo dy elemente x, y të $(a)_q$ kemi:

$$f(x+y) = k(x+y) + u(x+y) = (kx+ux) + (ky+uy) = f(x) + f(y).$$

Këto barazime tregojnë se bijeksioni f është një izomorfizëm grupesh. Kështu kuazi-idealet $(a)_q$ dhe $(b)_q$ si grupe aditivë të unazës A janë izomorfe. Që këtej rrjedh menjëherë se nënunazat $(a)_q$ dhe $(b)_q$ kanë të njëjtën karakteristikë.■

Meqë për relacionin e Green-it $\mathcal{R}$ mund të vërtetohet një pohim analog i pohimit 2.1.1, atëherë është i vërtetë edhe pohimi analog i pohimit 2.1.11.

§ 2. RELACIONET E GREEN-IT $\mathcal{H}$ DHE $\mathcal{Q}$ NË UNAZA

Relacionet e Green-it $\mathcal{H}$ dhe $\mathcal{Q}$ në një unazë A [7] përcaktohen si më poshtë:

$$\forall(a,b) \in A^2, a\mathcal{H}b \iff [(a)_l = (b)_l \wedge (a)_r = (b)_r],$$

$$\forall(a,b) \in A^2, a\mathcal{Q}b \iff (a)_q = (b)_q,$$

ku $(a)_l$, $(b)_l$, $(a)_r$, $(b)_r$, $(a)_q$, $(b)_q$ janë përkatësisht idealet e majta kryesore, idealet e djathta kryesore dhe kuazi-idealet kryesore të përftuara nga elementet a, b të unazës A.

Relacionet $\mathcal{H}$ dhe $\mathcal{Q}$ janë relacione ekuivalence në A. Klasat e ekuivalencës të elementit $a \in A$ sipas relacioneve $\mathcal{H}$ dhe $\mathcal{Q}$ do t'i shënojmë përkatësisht H_a dhe Q_a. Në qoftë se në përkufizimet e mësipërme të relacioneve të Green-it $\mathcal{H}$ dhe $\mathcal{Q}$ në unazën A, zëvendësojmë unazën A me një gjysmëgrup çfarëdo S dhe idealet e majta kryesore, idealet e djathta kryesore dhe kuazi-idealet kryesore i shohim si ideale të majta kryesore, ideale të djathta kryesore dhe kuazi-ideale kryesore të gjysmëgrupit S, atëherë kemi relacionet përkatëse të Green-it në gjysmëgrupin S, të cilat shënohen me po ato simbole që shënohen edhe relacionet e Green-it në unazën A.

Për gjysmëgrupet tregohet se $\mathcal{Q} = \mathcal{H}$ [5], kurse për unazat, në sajë të barazimeve (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) kemi përfshirjen $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{H}$, e cila në përgjithësi është strikte, domethënë ekzistojnë unaza për të cilat $\mathcal{H} \neq \mathcal{Q}$ [7]. Këtu, për të dalluar relacionet e Green-it $\mathcal{H}$ dhe $\mathcal{Q}$ në unazën $(A,+,\cdot)$ nga relacionet përkatëse të Green-it në gjysmëgrupin e shumëzimit të kësaj unaze, $(A,\cdot)$, këto të fundit do ti shënojmë $\mathcal{H}(\cdot)$ dhe $\mathcal{Q}(\cdot)$. Gjithashtu, klasat e ekuivalencës të elementit a të gjysmëgrupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$ sipas relacioneve të Green-it $\mathcal{H}(\cdot)$ dhe $\mathcal{Q}(\cdot)$ do ti shënojmë përkatësisht $H_a(\cdot)$ dhe $Q_a(\cdot)$.

Le të jetë $(A,+,\cdot)$ një unazë çfarëdo. Në A kemi relacionet e Green-it $\mathcal{H}$ dhe $\mathcal{Q}$ në unazën $(A,+,\cdot)$ dhe relacionet e Green-it $\mathcal{H}(\cdot)$ dhe $\mathcal{Q}(\cdot)$ në gjysmëgrupin e shumëzimit $(A,\cdot)$ të kësaj unaze. Në qoftë se unaza $(A,+,\cdot)$ ka njësh, atëherë nga barazimet (1.1.1),(1.1.2) dhe (1.1.3) rrjedh menjëherë se $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\cdot)$ dhe $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\cdot)$. Në përgjithësi po në sajë të barazimeve (1.1.1),(1.1.2) dhe (1.1.3) kemi përfshirjen $\mathcal{H}(\cdot) \subseteq \mathcal{H}$ dhe $\mathcal{Q}(\cdot) \subseteq \mathcal{Q}$. Shembulli i mëposhtëm tregon se këto përfshirje mund të jenë strikte.

Shembull 2.2.1. Le të jetë S një gjysmëgrup me zero. Shënojmë $\mathbb{Z}[S]$ unazën e gjysmëgrupit S mbi unazën e numrave të plotë $\mathbb{Z}$. Nuk është e vështirë të bindemi se për çdo element $a \in S \subseteq \mathbb{Z}[S]$ kemi:

$$-a \in H_a, -a \in \mathcal{Q}_a, -a \notin H_a(\cdot), -a \notin \mathcal{Q}_a(\cdot).$$

Një gjysmëgrup me zero është gjysmëgrupi i shembullit 2.1.2 në të cilin kemi $\mathcal{H}(\cdot) \neq \mathcal{H}$ dhe $\mathcal{Q}(\cdot) \neq \mathcal{Q}$.

Nuk është vështirë të bindemi se për çdo gjysmëgrup me zero S unaza e tij mbi unazën e numrave të plotë $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[S]$ është e tillë që të katër relacionet e Green-it $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}$ dhe $\mathcal{Q}$ në të janë të ndryshme nga relacionet përkatëse $\mathcal{L}(\cdot)$, $\mathcal{R}(\cdot)$, $\mathcal{H}(\cdot)$ dhe $\mathcal{Q}(\cdot)$ në gjysmëgrupin e shumëzimit të saj. Kështu në përgjithësi edhe relacioni i Green-it $\mathcal{H}$ në një unazë çfarëdo është i ndryshëm nga relacioni i Green-it $\mathcal{H}$ në një unazë i përcaktuar si relacion i Green-it në gjysmëgrupin përkatës të saj [11].

Teoremë 2.2.2. *Le të jetë* $(A,+,\cdot)$ *një unazë dhe* a *një element i* A*-së. Atëherë ose* $\mathcal{H}$*-klasa* H_a *është bashkim* $\mathcal{H}(\cdot)$*-klasash, të cilat kanë vetëm nga një element ose* $H_a = H_a(\cdot)$.

Vërtetim. Dallojmë dy raste të mundshme.

Rasti i parë. Çdo $H_x(\cdot)$ klasë që përfshihet në H_a ka vetëm një element. Atëherë kemi

$$H_a = \bigcup_{x \in H_a} H_x(\cdot).$$

Rasti i dytë. Ekziston një klasë $H_x(\cdot)$, $x \in H_a$ që ka të paktën dy elemente. Le të jenë b, c dy elemente të A-së të ndryshëm njëri nga tjetri të cilët i përkasin $H_x(\cdot)$. Meqë

$$L_x(\cdot) \cap R_x(\cdot) = H_x(\cdot) \subseteq H_a = L_a \cap R_a,$$

elementet a, b të ndryshëm njëri nga tjetri i përkasin njëherësh $L_x(\cdot)$, $R_x(\cdot)$, $L_a(\cdot)$ dhe $R_a(\cdot)$. Kështu, në sajë të teoremës 2.1.3 kemi $L_a = L_a(\cdot)$ dhe $R_a = R_a(\cdot)$. Tani nga këto dy barazime rrjedh se

$$H_a = L_a \cap R_a = L_a(\cdot) \cap R_a(\cdot) = H_a(\cdot). \qquad \blacksquare$$

Teoremë 2.2.3. *Le të jetë* $(A,+,\cdot)$ *një unazë dhe* a *një element i* A*-së. Në qoftë se* $a^2 \in H_a$*, atëherë* $H_a = H_a(\cdot)$.

Vërtetim. Supozojmë se $a^2 \in H_a$. Le të jetë x një element çfarëdo i klasës $H_a = H_{a^2}$. Atëherë ekzistojnë numrat e plotë k, k_1 dhe elementet u, u_1 të A-së të tillë që

$$a = kx + ux \text{ dhe } x = k_1a^2 + u_1a^2.$$

Që këtej kemi barazimet:

$$x = k_1a^2 + u_1a^2 = (k_1a + u_1a)a = (k_1a + u_1a)(kx + ux) =$$

$$= (k_1^2ka + k_1kau_1 + k_1^2au + k_1auu_1 + kk_1u_1a + ku_1au_1 + k_1u_1au + u_1auu_1)a^2.$$

$$a^2 = a(kx + ux) = (ka + au)x,$$

që tregojnë se $x\mathcal{L}(\cdot)a^2$. Në mënyrë të ngjashme tregohet se $x\mathcal{R}(\cdot)a^2$. Kështu, për çdo element x të H_a kemi $x\mathcal{H}(\cdot)a^2$ dhe rrjedhimisht $H_a = H_a(\cdot)$.$\blacksquare$

Tani po paraqesim një vërtetim tjetër të Teoremës se Green-it për unazat [7] pa përdorur Lemën e Green-it [5], [7].

Teoremë 2.2.4. (***Teorema e Green-it për unazat***). *Në qoftë se elementet* a, b, ab *të një unaze* $(A,+,\cdot)$ *i përkasin së njëjtës* $\mathcal{H}$*-klasë* H *të kësaj unaze, atëherë* H *është një nëngrup i gjysmëgrupit të shumëzimit* $(A,\cdot)$ *të unazës* $(A,+,\cdot)$.

Vërtetim. Dallojmë dy raste të mundshme:

Rasti i parë. Elementet a, b janë të barabartë. Atëherë $ab = a^2 \in H_a = H$. Nga teorema 2.2.3 kemi $H = H_a = H_a(\cdot)$. Meqë duket qartë se a, a^2 i përkasin $H_a(\cdot)$,

atëherë nga Teorema e Green-it për gjysmëgrupet (teorema 1.1.6), H është nëngrup i grupit të shumëzimit të unazës $(A,+,\cdot)$.

Rasti i dytë. Elementet a, b janë të ndryshëm njëri nga tjetri. Meqë a, b i përkasin $\mathcal{H}$-klasës H ekzistojnë numrat e plotë k_2, k_3, k_4, k_5 dhe elementet u_2, u_3, u_4, u_5 të A të tillë që

$$b = k_2a + u_2a,\ b = k_3ab + u_3ab,\ a = k_4ab + u_4ab.$$

Që këtej kemi barazimet:

$$\begin{aligned} b = k_3ab + u_3ab = (k_3a + u_3a)b = (k_3a + u_3a)(k_2a + u_2a) \\ = (k_3k_2a + k_3au_2 + k_2u_3a + u_3au_2)a, \end{aligned}$$

$$a = k_4ab + u_4ab = (k_4a + u_4a)b,$$

që tregojnë se $a\mathcal{L}(\cdot)b$. Në të njëjtën mënyrë tregohet se $a\mathcal{R}(\cdot)b$. Pra, $a\mathcal{H}(\cdot)b$ dhe në sajë të teoremës 2.2.2 $\mathcal{H}$-klasa $H = H_a$ përputhet me $\mathcal{H}(\cdot)$ klasën $H_a(\cdot)$. Tani në sajë të Teoremës së Green-it për gjysmëgrupet (teorema 1.1.6) H është një nëngrup i gjysmëgrupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$. ■

Edhe për relacionin $\mathcal{Q}$ janë të vërteta teoremat analoge të teoremave 2.2.2 dhe 2.2.3.

Teoremë 2.2.5. *Le të jetë $(A,+,\cdot)$ një unazë dhe a një element i A. Atëherë ose $\mathcal{Q}$-klasa Q_a është bashkim $\mathcal{Q}(\cdot)$-klasash që kanë vetëm nga një element ose $Q_a = Q_a(\cdot)$.*

Vërtetim. Dallojmë dy raste të mundshme.

Rasti i parë. Çdo $\mathcal{Q}(\cdot)$-klasë që përfshihet në Q_a ka vetëm një element. Atëherë kemi:

$$Q_a = \bigcup_{x \in Q_a} Q_x(\cdot).$$

Rasti i dytë. Ekziston një klasë $Q_x(\cdot)$, $x \in Q_a$ që ka të paktën dy elemente. Le të jenë b, c dy elemente të ndryshëm të A të cilët i përkasin $Q_x(\cdot)$. Nga teorema 2.2.2 kemi:

$$Q_a(\cdot) \subseteq Q_a \subseteq H_a = H_a(\cdot) = Q_a(\cdot),$$

dhe rrjedhimisht $Q_a = Q_a(\cdot)$.■

Teoremë 2.2.6. *Le të jetë $(A,+,\cdot)$ një unazë dhe a një element i saj. Në qoftë se $a^2 \in Q_a$, atëherë $Q_a = Q_a(\cdot)$.*

Vërtetim. Nga teorema 2.2.3 kemi:

$$Q_a(\cdot) \subseteq Q_a \subseteq H_a = H_a(\cdot) = Q_a(\cdot),$$

dhe rrjedhimisht $Q_a = Q_a(\cdot)$.■

Meqë në gjysmëgrupin e shumëzimit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$ kemi barazimin $\mathcal{H}(\cdot) = \mathcal{Q}(\cdot)$ nuk është vështirë të përshtatet vërtetimi i teoremës 2.2.4 duke përdorur edhe teoremën 2.2.5 dhe të përftohet një vërtetim tjetër i teoremës së mëposhtme, e cila ngjan me Teoremën e Green-it për unazat dhe është vërtetuar në një mënyrë tjetër më parë [7].

Teoremë 2.2.7. *Në qoftë se elementet a, b, ab të një unaze $(A,+,\cdot)$ i përkasin të njëjtës Q-klasë Q të A, atëherë Q është nëngrup i gjysmëgrupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$.*

Pohim 2.2.8. *Në qoftë se kuazi-ideali minimal Q i unazës $(A,+,\cdot)$ ka dy elemente të ndryshëm, që janë pjesëtues të njëri-tjetrit, atëherë ai është kuazi-ideal minimal edhe i gjysmëgrupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$.*

Vërtetim. Meqë Q është kuazi-ideal minimal, ekziston një element $a \in Q$ i tillë që $Q = (a)_q$. Le të jenë b dhe c dy elemente të Q-së që janë pjesëtues të njëri-tjetrit. Pra, $bQ(\cdot)c$. Në sajë të teoremës 2.2.5 janë të vërteta barazimet:

$$(a)_q = Q_a \cup 0 = Q_a(\cdot) \cup 0.$$

Nga ana tjetër, po të shënojmë $(a)_q^S$ kuazi-idealin kryesor të gjysmëgrupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$ i cili përftohet nga elementi $a \in A$ kemi:

$$Q_a(\cdot) \cup 0 \subseteq (a)_q^S \subseteq (a)_q = Q_a(\cdot) \cup 0.$$

Pra,

$$(a)_q = (a)_q^S = Q_a(\cdot) \cup 0.$$

Tani është e qartë se kuazi-ideali minimal Q i unazës $(A,+,\cdot)$ është i tillë edhe në gjysmëgrupin e saj të shumëzimit $(A,\cdot)$.■

Në qoftë se një $\mathcal{H}$-klasë [Q-klasë] e përcaktuar nga elementi a i një unaze ka vetëm një element, atëherë është e qartë se $H_a = H_a(\cdot)$ [$Q_a = Q_a(\cdot)$]. Pohimi i mëposhtëm jep një rast kur të vetmet klasa sipas relacioneve $\mathcal{H}$ dhe Q të unazës $(A,+,\cdot)$ përputhen me klasat përkatëse sipas relacioneve $\mathcal{H}(\cdot)$ dhe $\mathcal{Q}(\cdot)$ të gjysmëgrupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të kësaj unaze janë ato që kanë vetëm nga një element.

Pohim 2.2.9. *Le të jetë $(A,+,\cdot)$ një unazë që ka të paktën dy elemente por nuk ka njësh dhe nuk ka pjesëtues të zeros. Atëherë të vetmet klasa sipas relacionit të Green-it $\mathcal{H}[\mathcal{Q}]$ të unazës $(A,+,\cdot)$ që përputhen me klasat përkatëse sipas relacionit të Green-it $\mathcal{H}(\cdot)[\mathcal{Q}(\cdot)]$ në gjysmëgrupin e shumëzimit $(A,\cdot)$ të kësaj unaze janë ato që kanë vetëm nga një element.*

Vërtetim. Meqë unaza $(A,+,\cdot)$ nuk ka pjesëtues të zeros, bashkësia $A^* = A\backslash 0$ është pjesë e qëndrueshme e A-së në lidhje me shumëzimin e unazës A dhe formon gjysmëgrup së bashku me shumëzimin e induktuar në të. Është e qartë se gjysmëgrupi $(A^*,\cdot)$ nuk ka njësh dhe është një gjysmëgrup i thjeshtueshëm. Vëmë re se për çdo element $a \neq 0$ të A-së klasa $H_a(\cdot)$ e elementit a të gjysmëgrupit $(A,\cdot)$ në sajë të pohimit 1.1.7 ka vetëm një element, pikërisht a-në. Tani në sajë të teoremës 2.2.2 kemi $H_a = H_a(\cdot)$ vetëm kur H_a ka vetëm një element.

Njëlloj bëhet vërtetimi edhe për relacionin Q me të vetmin ndryshim që në vend të teoremës 2.2.2 përdoret teorema 2.2.5.■

Nga ky pohim marrim këtë rrjedhim:

Rrjedhim 2.2.10. *Në një unazë $(A,+,\cdot)$ që nuk ka pjesëtues të zeros dhe njësh relacionet e Green-it $\mathcal{H}$ dhe $\mathcal{Q}$ përputhen me relacionin e Gren-it $\mathcal{H}(\cdot)$ në*

gjysmëgrupin e shumëzimit të kësaj unaze, $(A,\cdot)$*, dhe rrjedhimisht* $\mathcal{H} = \mathcal{Q}$ *atëherë dhe vetëm atëherë kur* $\mathcal{H} = 1_A$*, ku* 1_A *është relacioni identik në* A*.*

Më sipër pamë një rast ekstrem kur relacioni $\mathcal{H}$ rrjedhimisht dhe relacioni $\mathcal{Q}$ në një unazë janë «më finët» e mundshëm, domethënë klasat e ekuivalencës sipas tyre kanë vetëm nga një element.

Tani do të diskutojmë rastin tjetër ekstrem, pikërisht rastin kur relacionet e Green-it $\mathcal{H}$ dhe $\mathcal{Q}$ në një unazë A janë më «të trashët» e mundshëm, domethënë kur çdo dy elementë të unazës të ndryshëm nga zero janë ekuivalentë sipas këtyre relacioneve. Në këtë rast për çdo $a \in A\backslash 0$ kemi $H_a = Q_a = A\backslash 0$. Kur ndodh kështu mund të themi se unaza A që ka të paktën dy elemente është $\mathcal{H}$-e thjeshtë [$\mathcal{Q}$-e thjeshtë]. Në fakt është e qartë se kur A-ja është $\mathcal{Q}$-e thjeshtë, atëherë ajo është edhe $\mathcal{H}$-e thjeshtë, meqë $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{H}$.

Nga Teorema e Green-it për unazat (teorema 2.2.4) rrjedh menjëherë që në qoftë se unaza jozero A është $\mathcal{H}$-e thjeshtë, atëherë ajo është fushë. Kështu, në qoftë se një unazë jozero $(A,+,\cdot)$ është $\mathcal{H}$-e thjeshtë [$\mathcal{Q}$-e thjeshtë], atëherë relacioni $\mathcal{H}$ i Green-it përputhet me relacionin e Green-it $\mathcal{H}(\cdot)[\mathcal{Q}(\cdot)]$ në gjysmëgrupin $(A,\cdot)$ të kësaj unaze dhe për më tepër kemi $\mathcal{H} = \mathcal{Q}$. Anasjellas, në qoftë se në gjysmëgrupin $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$ që ka të paktën dy elemente të vetmet $\mathcal{H}(\cdot) = \mathcal{Q}(\cdot)$-klasa ekuivalence janë 0 dhe $A\backslash 0$, atëherë duket qartë se unaza $(A,+,\cdot)$ është $\mathcal{H}$-e thjeshtë [$\mathcal{Q}$-e thjeshtë].

Pra, në rastin e dytë ekstremal kur relacionet e Green-it $\mathcal{H}$ dhe $\mathcal{Q}$ në një unazë $(A,+,\cdot)$ janë «më të trashët» (trivalë), atëherë kemi përputhje të tyre me relacionet përkatëse të Green-it në gjysmëgrupin e shumëzimit $(A,\cdot)$ të këaj unaze dhe anasjellas. Ndërsa në rastin e parë ekstremal, të relacioneve $\mathcal{H}$ dhe $\mathcal{Q}$ «më finët» nuk e kemi këtë përputhje. Kështu, është e natyrshme të shtrojmë këtë problem të cilin po e lëmë të hapur.

Problem 2.2.11 *Të gjenden kondita të nevojshme, kondita të mjaftueshme dhe kondita të nevojshme dhe të mjaftueshme që në qoftë se relacioni i Green-it* $\mathcal{H}(\cdot) = \mathcal{Q}(\cdot)$ *në gjysmëgrupin e shumëzimit* $(A,\cdot)$ *të kësaj unaze është relacioni identik* 1_A*, atëherë edhe relacioni* $\mathcal{H}[\mathcal{Q}]$ *është i barabartë me* 1_A*.*

§ 3. RELACIONI I GREEN-IT $\mathcal{B}$ DHE BI-IDEALET MINIMALE NË UNAZA

Në një gjysmëgrup S te [13] është përcaktuar relacioni $\mathcal{B}$ i barazimit të bi-idealeve kryesore të përftuar nga dy elemente çfarëdo të S-së. Në ngjashmëri me këtë relacion ekuivalence në një unazë çfarëdo A përcaktojmë relacionin $\mathcal{B}$ si më poshtë:

$$\forall (a,c) \in A^2, a\mathcal{B}c \iff (a)_b = (c)_b,$$

ku $(a)_b$ dhe $(c)_b$ janë bi-idealet kryesore të përftuara nga elementet a, c të A-së.

Në sajë të barazimit (1.1.4) kemi:

$$a\mathcal{B}c \iff \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}a^2 + aAa = \mathbb{Z}c + \mathbb{Z}c^2 + cAc.$$

Është e qartë se relacioni $\mathcal{B}$ është një relacion ekuivalence në unazën A. Edhe relacioni $\mathcal{B}$, i cili përcaktohet ngjashëm me relacionet e Green-it $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{Q}$, do ta quajmë relacion të Green-it në një unazë.

Klasën e ekuivalencës sipas relacionit të Green-it $\mathcal{B}$ të elementit $a \in A$ do ta shënojmë B_a.

Nga barazimet (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) dhe (1.1.4) duket qartë se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{H}$ dhe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{Q}$.

Shembujt e mëposhtëm tregojnë se këto përfshirje në përgjithësi janë strikte.

Shembull 2.3.1. Le të jetë $S = \{0, e, a, b\}$ gjysmëgrupi i Cliffford-it [10] me këtë tabelë të Cayly-it

.	e	a	b	0
e	e	a	b	0
a	0	0	0	0
b	b	0	0	0
0	0	0	0	0

Shqyrtojmë unazën e gjysmëgrupit S, $\mathbb{Z}_3[S]$, ku $\mathbb{Z}_3$ është unaza e numrave të plotë sipas modulit 3. Në këtë unazë kemi:

$$H_{a+b} = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}_3 \backslash \{0\}\} \neq \{k(a+b) \mid k \in \mathbb{Z}_3 \backslash \{0\}\} = B_{a+b},$$

dhe rrjedhimisht $\mathcal{H} \neq \mathcal{B}$. Me llogaritje të drejtpërdrejta nuk është e vështirë të bindemi se në unazën $\mathbb{Z}_3[S]$ kemi $\mathcal{B} = \mathcal{Q}$.

Shembull 2.3.2. Le të jetë $(\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}, \cdot)$ gjysmëgrupi i shumëzimit të numrave të plotë sipas modulit 8. Shqyrtojmë unazën e gjysmëgrupit $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_8]$, ku $\mathbb{Z}_2$ është unaza e numrave të plotë sipas modulit 2. Elementet $\overline{2}$ dhe $\overline{6}$ të unazës gjysmëgrupore $\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_8]$, janë $\mathcal{Q}$-ekuivalentë meqë:

$$(\overline{2})_q = \mathbb{Z}\overline{2} + \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_8]\overline{2} \cap \overline{2}\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_8] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{2} + \overline{4}, \overline{2} + \overline{6}, \overline{4} + \overline{6}\},$$

$$(\overline{6})_q = \mathbb{Z}\overline{6} + \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_8]\overline{6} \cap \overline{6}\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_8] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{2} + \overline{4}, \overline{2} + \overline{6}, \overline{4} + \overline{6}\}.$$

Nga ana tjetër elementet $\overline{2}$ dhe $\overline{6}$ të unazës gjysmëgrupore $\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_8]$ nuk janë $\mathcal{B}$-ekuivalentë meqë

$$(\overline{2})_b = \mathbb{Z}\overline{2} + \mathbb{Z}\overline{2}^2 + \overline{2}\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_8]\overline{2} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{2} + \overline{4}\},$$

$$(\overline{6})_b = \mathbb{Z}\overline{6} + \mathbb{Z}\overline{6}^2 + \overline{6}\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_8]\overline{6} = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{4} + \overline{6}\}.$$

Kështu, në unazën gjysmëgrupore $\mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_8]$ kemi $\mathcal{B} \neq \mathcal{Q}$.

Le të jetë $(A, +, \cdot)$ një unazë çfarëdo. Në qoftë se në përkufizimin e relacionit të Green-it $\mathcal{B}$ në unazën A zëvendësojmë unazën A me një gjysmëgrup S dhe bi-idealet kryesore $(a)_b$, $(c)_b$ të unazës A i shohim si bi-ideale të përftuara nga elementet a, c të gjysmëgrupit S, atëherë kemi relacionin $\mathcal{B}$ në gjysmëgrupin S, që ne po e quajmë edhe atë relacion të Green-it, i cili shënohet me po atë simbol që shënohet edhe relacioni $\mathcal{B}$ në unazën A. Ne për të dalluar relacionin e Green-it $\mathcal{B}$ në unazën $(A, +, \cdot)$ nga relacioni përkatës i Green-it në gjysmëgrupin e shumëzimit të kësaj unaze, $(A, \cdot)$, këtë

të fundit do ta shënojmë $\mathcal{B}(\cdot)$. Gjithashtu, klasën e ekuivalencës së elementit a të gjysmëgrupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$ sipas relacionit të Green-it $\mathcal{B}(\cdot)$ do ta shënojmë $B_a(\cdot)$.

Në qoftë se unaza $(A,+,\cdot)$ ka njësh, atëherë nga barazimi (1.1.4) rrjedh menjëherë barazimi $\mathcal{B}(\cdot) = \mathcal{B}$. Në përgjithësi po në sajë të barazimit (1.1.4) kemi përfshirjen $\mathcal{B}(\cdot) \subseteq \mathcal{B}$. Shembulli i mëposhtëm tregon se kjo përfshirje mund të jetë strikte.

Shembull 2.3.3. Le të jetë $\mathbb{Z}_8$ unaza e numrave të plotë sipas modulit 8. Në këtë unazë elementet $\overline{2}$ dhe $\overline{6}$ janë $\mathcal{B}$-ekuivalentë meqë:

$$\left(\overline{2}\right)_b = \mathbb{Z}\overline{2} + \mathbb{Z}\overline{2}^2 + \overline{2}\mathbb{Z}_8\overline{2} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\},$$

$$\left(\overline{6}\right)_b = \mathbb{Z}\overline{6} + \mathbb{Z}\overline{6}^2 + \overline{6}\mathbb{Z}_8\overline{6} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}.$$

Por, në gjysmëgrupin e shumëzimit $(\mathbb{Z}_8,\cdot)$ të unazës $(\mathbb{Z}_8,+,\cdot)$ elementet $\overline{2}$ dhe $\overline{6}$ nuk janë $\mathcal{B}(\cdot)$-ekuivalentë meqë:

$$\left(\overline{2}\right)_b = \overline{2} \cup \overline{2}^2 \cup \overline{2}\mathbb{Z}_8\overline{2} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\},$$

$$\left(\overline{6}\right)_b = \overline{6} \cup \overline{6}^2 \cup \overline{6}\mathbb{Z}_8\overline{6} = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{6}\}.$$

Kështu, $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}(\cdot)$.

Për relacionin $\mathcal{B}$ në unazën $(A,+,\cdot)$ ne nuk kemi mundur të vërtetojmë një teoremë analoge me teoremën 2.1.3, prandaj po ngrejmë problemin e mëposhtëm të cilin po e lëmë të hapur:

Problem 2.3.4. *Në një unazë $(A,+,\cdot)$ për elementin $a \in A$ a është $\mathcal{B}$-klasa B_a bashkim $\mathcal{B}(\cdot)$-klasash të gjysmëgrupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$ që kanë vetëm nga një element ose $B_a = B_a(\cdot)$?*

Për relacionin e Green-it $\mathcal{B}$ në unaza do të vërtetojmë teoremën e mëposhtme të cilën do ta quajmë Teorema e Green-it për relacionin $\mathcal{B}$ në unaza, meqë ajo ngjason me Teoremën e Green-it për gjysmëgrupet [14], me Teoremën e Green-it për gjysmëunazat [15] dhe me Teoremën e Green-it për unazat [7].

Teoremë 2.3.5. (***Teorema e Green-it për relacionin $\mathcal{B}$ në unaza***) *Në qoftë se elementet a, b, ab të unazës $(A,+,\cdot)$ i përkasin së njëjtës $\mathcal{B}$-klasë B të A-së, atëherë B është nëngrup i gjysmëgrupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$. Për më tepër kjo $\mathcal{B}$-klasë është një $\mathcal{H}$-klasë dhe një Q-klasë.*

Vërtetim. Relacioni $\mathcal{B}$ përfshihet në relacionin $\mathcal{H}$ prandaj kemi:

$$B = B_a \subseteq H_a.$$

Kështu elementet a, b, ab i përkasin $\mathcal{H}$-klasës H_a të unazës A. Kështu nga Teorema e Green-it në unaza (teorema 2.2.4) H_a është një nëngrup i gjysmëgrupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$. Atëherë ekziston elementi njësh i nëngrupit H_a dhe rrjedhimisht janë të vërteta barazimet:

$$a = eae \text{ dhe } e = aa^{-1}a^{-1}a,$$

ku a^{-1} është elementi i anasjellë i elementit a në nëngrupin H_a të gjysmëgrupit $(A,\cdot)$. Këto barazime tregojnë se bi-idealet kryesore të përftuara nga elementet a dhe e janë të njëjta. Kështu, elementi e i përket klasës $B_a = B$.

Tani le të jetë x një element çfarëdo i nëngrupit H_a. Janë të vërteta barazimet:

$$x = exe \text{ dhe } e = xx^{-1}x^{-1}x,$$

ku x^{-1} është elementi i anasjellë i elementit x në nëngrupin H_a të gjysmëgrupit $(A,\cdot)$. Këto barazime tregojnë se $(x)_b = (e)_b$. Kështu, meqë $e \in B_a$, elementi $x \in H_a$ i përket B_a. Kështu kemi $B = B_a = H_a$ dhe rrjedhimisht $\mathcal{B}$-klasa B është nëngrup i gjysmëgrupit të shumëzimit, $(A,\cdot)$, të unazës $(A,+,\cdot)$ dhe kjo klasë përputhet me $\mathcal{H}$-klasën H_a.

Nga përfshirjet:

$$B_a \subseteq Q_a \subseteq H_a$$

dhe barazimi $B_a = H_a$ kemi $B_a = Q_a$, domethënë $\mathcal{B}$-klasa B është një Q-klasë.■

Nga kjo teoremë menjëherë gjejmë këtë rrjedhim:

Rrjedhim 2.3.6. *Në qoftë se $\mathcal{B}$-klasa B e unazës $(A,+,\cdot)$ ka një element idempotent e, atëherë B është një nëngrup i gjysmëgrupit $(A,\cdot)$ të kësaj unaze.*

Tani do të shtjellojmë disa rezultate për bi-idealet minimale që lidhen me relacionet e Green-it në unaza.

Një bi-ideal [kuazi-ideal] B $[Q]$ i unazës A quhet <u>minimal</u> në qoftë se B $[Q]$ nuk përmban asnjë bi-ideal [kuazi-ideal] të mirëfilltë, domethënë të ndryshëm nga zero dhe nga B $[Q]$, të unazës A.

Lemë 2.3.7. *Një bi-ideal B i unazës A është minimal atëherë dhe vetëm atëherë kur $B\backslash 0$ është një $\mathcal{B}$-klasë.*

Vërtetim. Bi-ideali B i unazës A është minimal atëherë dhe vetëm atëherë kur për çdo element a të B-së i cili është i ndryshëm nga zero kemi $(a)_b = B$. Kjo gjë është ekuivalente me pohimin që $B\backslash 0$ të jetë një $\mathcal{B}$-klasë.■

Pohimi analog i lemës 2.3.7 për një kuazi-ideal Q të unazës A vërtetohet në mënyrë analoge.

Duke zbatuar Teoremën e Green-it për relacionin $\mathcal{B}$ dhe lemën e mësipërme gjejmë një vërtetim të shkurtër të teoremës 2.4 te [14].

Teoremë 2.3.8. [14] *Një bi-ideal minimal B i unazës $(A,+,\cdot)$ është ose një nënunazë me shumëzim zero ose një nënunazë me pjesëtim e $(A,+,\cdot)$. Në rastin e dytë B ka trajtën*

$$B = eAe = eBe = eA \cap Ae,$$

ku e është element njësh i B-së dhe se ai është një kuazi-ideal minimal i unazës $(A,+,\cdot)$.

Vërtetim. Bi-ideali B është nënunazë me shumëzim jozero, atëherë ekzistojnë dy elemente të ndryshme nga zero a, b të unazës A të tillë që $ab \neq 0$. Në bazë të lemës 2.3.7 elementet a, b, ab i përkasin $\mathcal{B}$-klasës $B\backslash 0$. Nga ana tjetër, Teorema e Green-it për relacionin $\mathcal{B}$ në unaza implikon se $\mathcal{B}$-klasa $B\backslash 0$ është një nëngrup i gjysmëgrupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$. Që këtej kemi që nënunaza B e unazës $(A,+,\cdot)$ është nënunazë me pjesëtim.

Në qoftë se e është elementi njësh i B, atëherë nga barazimi 1.1.4 kemi:

$$B = (e)_b = \mathbb{Z}e + \mathbb{Z}e^2 + eAe = eAe = eBe = eA \cap Ae = (e)_q$$

dhe rrjedhimisht $(e)_q = (e)_b = B$. Kështu, B-ja është një kuazi-ideal. Që këtej, meqë B-ja është bi-ideal minimal nuk është e vështirë të bindemi se B është kuazi-ideal minimal i unazës $(A,+,\cdot)$. ■

Në qoftë se B është një bi-ideal minimal i unazës A, i cili nuk është nënunazë me shumëzim zero, atëherë nga lema 2.3.7 dhe teorema 2.3.8 $B\backslash 0$ është një $\mathcal{B}$-klasë e tillë që po t'i bashkojmë asaj zeron e A-së, përftojmë një nënunazë me pjesëtim të unazës A. Kështu, është e natyrshme të ngrehim këtë problem të cilin po e lëmë të hapur:

Problem 2.3.9. *Çfarë kushtesh plotësuese duhet ti shtojmë Teoremës së Green-it për relacionin $\mathcal{B}$ në mënyrë që bashkimi i $\mathcal{B}$-klasës B me zero, $B \cup \{0\}$, të jetë një nënunazë me pjesëtim*?

Teoremë 2.3.10. *Në qoftë se një unazë A ka një element të thjeshtueshëm që përmbahet në një bi-ideal minimal B të A-së, atëherë A-ja është unazë me pjesëtim.*

Vërtetim. Le të jetë a një element i thjeshtueshëm që i përket bi-idealit minimal B të unazës A. Është e qartë se $a \neq 0$. Në qoftë se b është një element i ndryshëm nga zero i B-së atëherë $ab \neq 0$ sepse sikur $ab = 0$, atëherë do të kishim $ab = a0 \Longrightarrow b = 0$, që do të ishte në kundërthënie. Kështu, nënunaza B është me shumëzim jozero. Tani nga teorema 2.3.8 bi-ideali B është një nënunazë me pjesëtim. Le të jetë e elementi njësh i nënunazës me pjesëtim B. Duke shumëzuar të dy anët e barazimit $ea = a$ me elementin e çfarëdoshëm c të A-së kemi $cea = ca$. Që këtej meqë elementi a është i thjeshtueshëm gjejmë $ce = c$. Kështu, elementi e është njësh i unazës A. Meqë $e \in B$, për çdo element x të A-së kemi:

$$x = exe \in \mathbb{Z}e + \mathbb{Z}e^2 + eAe \subseteq B$$

dhe rrjedhimisht $A = B$, domethënë A-ja është një unazë me pjesëtim.■

Pohim 2.3.11. *Në qoftë se $\mathcal{L}$ $[\mathcal{R}]$-klasa L $[R]$ e një unaze A ka një element të rregullt, atëherë çdo element i L $[R]$ është i rregullt.*

Vërtetim. Ne do bëjmë vërtetimin për $\mathcal{L}$-klasën L, vërtetimin për $\mathcal{R}$-klassën R bëhet në mënyrë të ngjashme. Nga pohimi 1.1.17 elementi a i unazës A është i rregullt atëherë dhe vetëm atëherë kur $\mathcal{L}$-klasa L_a ka një element idempotent. Që këtej kemi

që çdo $\mathcal{L}$-klasë L që ka një element të rregullt përmban një element idempotent dhe rrjedhimisht çdo element i saj është i rregullt.■

Teoremë 2.3.12. [7] *Le të jenë a, b dy elemente të një unaze A të tillë që $a\mathcal{L}b$ $[a\mathcal{R}b]$. Kuazi-ideali kryesor $(a)_q$ është minimal dhe ka vetinë prerëse atëherë dhe vetëm atëherë kur e njëjta gjë ndodh edhe për kuazi-idealin $(b)_q$.*

Pohim 2.3.13. **[7]** *Në qoftë se një kuazi-ideal minimal i një unaze A ka vetinë prerëse, atëherë $Q\backslash 0$ është një $\mathcal{H}$-klasë.*

Teoremë 2.3.14. *Le të jenë a, c dy elemente jozero të një unaze A të tillë që $a\mathcal{L}c$ $[a\mathcal{R}c]$ dhe $(a)_b$ e $(c)_b$ janë unaza me shumëzim jozero. Atëherë bi-ideali $(a)_b$ është minimal atëherë dhe vetëm atëherë kur një gjë e tillë ndodh edhe për bi-idealin $(c)_b$.*

Vërtetim. Do ta bëjmë vërtetimin vetëm për relacionin $\mathcal{L}$, vërtetimi për $\mathcal{R}$ bëhet në mënyrë analoge. Supozojmë se $(a)_b$ është bi-ideal minimal. Nga teorema 2.3.8 $(a)_b$ është kuazi-ideal minimal që ka vetinë prerëse dhe $(a)_b = (a)_q$. Nga teorema 2.3.12 kemi $(c)_q$ është kuazi-ideal minimal që ka vetinë prerëse. Kështu, nga pohimi 2.3.13 rrjedh se $(c)_q\backslash 0 = H_c \subseteq L_c$. Meqë $L_c = L_a$ dhe a është një element i rregullt, atëherë nga pohimi 2.3.11 çdo element i L_c është i rregullt dhe nga pohimi 1.1.18 kemi $(c)_b = (c)_q$. Tani nga pohimi 1.1.18 rrjedh se $(c)_b$ është bi-ideal minimal. Në qoftë se $(c)_b$ është bi-ideal minimal arsyetimi përsëritet fjalë për fjalë. ■

Pohim 2.3.15. [8] *Në qoftë se një bi-ideal B i një unaze A ka karakteristikën zero, atëherë çdo element i tij është i rregullt.*

Teoremë 2.3.16. *Le të jenë a, c dy elemente të unazës A të tillë që $a\mathcal{L}c$ $[a\mathcal{R}c]$ dhe $(a)_b$ e $(c)_b$ janë unaza me shumëzim zero të A-së. Atëherë bi-ideali $(a)_b$ është minimal me karakteristikë zero atëherë dhe vetëm atëherë kur një gjë e tillë ndodh edhe për bi-idealin $(c)_b$.*

Vërtetim. Do ta bëjmë vërtetimin për relacionin $\mathcal{L}$, vërtetimi për relacionin $\mathcal{R}$ bëhet në mënyrë të ngjashme. Supozojmë se $(a)_b$ është një bi-ideal minimal me karakteristikë zero. Në sajë të pohimit 2.3.15 çdo element i $(a)_b$ është i rregulllt dhe rrjedhimisht në sajë të pohimit 1.1.18 kemi $(a)_b = (a)_q$. Nuk është e vështirë të bindemi se $(a)_q$ është një kuazi-ideal minimal me vetinë prerëse. Kështu nga teorema 2.3.12 kemi që $(c)_q$ është një kuazi-ideal minimal që ka vetinë prerëse dhe nga pohimi 2.1.11 ai e ka karakteristikën zero. Në sajë të lemës 2.3.7 kemi:

$$(c)_q = B_c \cup \{0\} \subseteq L_c \cup \{0\} = L_a \cup \{0\}$$

dhe rrjedhimisht, meqë a është element i rregullt sipas pohimit 2.3.11 çdo element i kuazi-idealit minimal $(c)_q$ është i rregullt. Tani duke përdorur pohimin 2.1.11 është i vërtetë barazimi $(c)_q = (c)_b$ dhe se bi-ideali $(c)_b$ me karakteristikë zero është minimal. ■

Në lidhje me teoremën 2.3.14 dhe teoremën 2.3.16 ngrehim këtë problem, të cilin po e lëmë të hapur:

Problem 2.3.17. *Le të jenë a dhe c dy elemente të një unaze A të tillë që $a\mathcal{L}c$ $[a\mathcal{R}c]$. A është bi-ideali kryesor $(a)_b$ minimal atëherë dhe vetëm atëherë kur $(c)_b$ është bi-ideal minimal*?

Në qoftë se përgjigja e pyetjes së shtruar për zgjidhje në problemin 2.3.4 do të ishte pozitive, atëherë do të kishim mundësi të shtjellonim problemin e përputhjes së relacionit të Green-it $\mathcal{B}$ dhe $\mathcal{B}(\cdot)$ në një unazë ashtu siç bëmë për relacionet e tjera të Green-it. Kështu, ne nuk e kemi cekur këtë problem duke mbetur vetëm me konstatimin e përgjithshëm që në përgjithësi relacioni i Green-it $\mathcal{B}$ në një unazë $(A,+,\cdot)$ nuk përputhet me relacionin e Green-it $\mathcal{B}(\cdot)$ në gjysmëgrupin e shumëzimit $(A,\cdot)$ të kësaj unaze. Në rastin kur relacioni i Green-it $\mathcal{B}$ në një unazë A është «më i trashi», domethënë kur çdo dy elemente të ndryshëm nga zero të unazës A janë ekuivalentë sipas këtij relacioni, unazën A do ta quajmë $\mathcal{B}$-të thjeshtë. Në sajë të Teoremës së Green-it për relacionin e Green-it $\mathcal{B}$ në unaza bindemi, njëlloj si për relacionin $\mathcal{H}$, se kur unaza $(A,+,\cdot)$ është $\mathcal{B}$-e thjeshtë, atëherë $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\cdot)$ dhe anasjellas kur në një unazë A të vetmet $\mathcal{B}(\cdot)$-klasa ekuivalence janë $A\backslash 0$ dhe 0, atëherë unaza A është $\mathcal{B}$-e thjeshtë.

§ 4. RELACIONI I GREEN-IT $\mathcal{D}$ NË UNAZA

Te [7] është provuar se relacionet e Green-it $\mathcal{L}$ dhe $\mathcal{R}$ në unaza janë të përkëmbyeshëm, domethënë për çdo unazë A kemi $\mathcal{L}\circ\mathcal{R}=\mathcal{R}\circ\mathcal{L}$. Kjo gjë na lejon që të përcaktojmë në unaza edhe relacionin $\mathcal{D}$ të barabartë me sejcilin prej relacioneve $\mathcal{L}\circ\mathcal{R}$, $\mathcal{R}\circ\mathcal{L}$. Relacioni $\mathcal{D}$ është relacion ekuivalence dhe ne do ta quajmë edhe atë relacion të Green-it në unaza meqë ai ngjason me relacionin përkatës të Green-it në gjysmëgrupe.

Klasën e ekuivalencës sipas relacionit të Green-it $\mathcal{D}$ të elementit a të unazës A do ta shënojmë D_a. Të gjithë relacionet e Green-it që kemi shqyrtuar në këtë kapitull përfshihen në relacionin $\mathcal{D}$ dhe nuk është e vështirë të gjenden shembuj që tregojnë se këto përfshirje janë strikte.

Le të jetë $(A,+,\cdot)$ një unazë çfarëdo. Në A kemi relacionin e Green-it $\mathcal{D}$ dhe relacionin e Green-it në gjysmëgrupin $(A,\cdot)$ të cilin, për të shmangur ngatërresat, do ta shënojmë $\mathcal{D}(\cdot)$. Gjithashtu klasën e ekuivalencës së elementit a të gjysmëgrupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$ sipas relacionit të Green-it $\mathcal{D}(\cdot)$ do ta shënojmë $D_a(\cdot)$. Në qoftë se unaza $(A,+,\cdot)$ ka njësh, atëherë është e qartë se $\mathcal{D}=\mathcal{D}(\cdot)$. Në përgjithësi kemi përfshirjen $\mathcal{D}(\cdot)\subseteq\mathcal{D}$. Shembujt që kanë shërbyer për të treguar se përfshirjet përkatëse për relacionet e Green-it të shqyrtuar në këtë kapitull janë strikte vlejnë për të justifikuar vërtetësinë e përfshirjes strikte $\mathcal{D}(\cdot)\subset\mathcal{D}$ në unaza.

Për relacionin $\mathcal{D}$ të Green-it në unaza nuk ka një teoremë analoge me teoremën 2.1.3 por te [16] është vërtetuar kjo teoremë:

Teoremë 2.4.1. *Le të jetë $(A,+,\cdot)$ një unazë dhe a një element i A-së. Atëherë D_a është ose një $\mathcal{D}(\cdot)$-klasë ose D_a është bashkim $\mathcal{H}(\cdot)$-klasash që kanë vetëm nga një element.*

Ndërkohë që problemi i unazave $\mathcal{L}$ $[\mathcal{R},\mathcal{H},Q,\mathcal{B}]$-të thjeshta u ezaurua plotësisht në paragrafët e mëparshëm, një gjë e tillë nuk ndodh për unazat $\mathcal{D}$-të thjeshta sipas këtij përkufizimi:

Përkufizim 2.4.2.[16] *Një unazë A quhet $\mathcal{D}$-e thjeshtë në qoftë se ajo ka më shumë se një element dhe të vetmet klasa ekuivalence të saj sipas relacionit $\mathcal{D}$ janë* 0 *dhe* $A\backslash 0$.

Unazat $\mathcal{D}$-të thjeshta janë futur dhe studiuar te [17]. Tek [17] W.D.Munn ka futur unazat bi-të thjeshta sipas këtij përkufizimi:

Përkufizim 2.4.3. [17] *Një unazë A quhet bi-e thjeshtë në qoftë se ajo ka më tepër se një element dhe plotëson kushtet e mëposhtme*:

(B_1) $$\forall a \in A, a \in aA \cap Aa.$$

(B_2) $$\forall (a,b) \in (A^* = A\backslash 0)^2, \exists c \in A, aA = cA \text{ dhe } Ac = Ab.$$

Unazat bi-të thjeshta janë studiuar te [17], [18], [19]. Te [4] është vërtetuar gjithashtu se një unazë $(A,+,\cdot)$ është bi-e thjeshtë atëherë dhe vetëm atëherë kur gjysmëgrupi i shumëzimit $(A,\cdot)$ i saj është 0-bi-i thjeshtë. Meqë kur gjysmëgrupi $(A,\cdot)$ është 0-bi-i thjeshtë, atëherë 0 dhe $A\backslash 0$ janë të vetmet $\mathcal{D}(\cdot)$-klasa dhe meqenëse $\mathcal{D}(\cdot) \subseteq \mathcal{D}$, rrjedh se çdo unazë bi-e thjeshtë është unazë $\mathcal{D}$-e thjeshtë. Shembulli i mëposhtëm tregon se anasjellas jo çdo unazë $\mathcal{D}$-e thjeshtë është bi-e thjeshtë.

Shembull 2.4.4. Le të jetë $(G,+)$ grup i rendit p ku p numër i thjeshtë. Marrim unazën me shumëzim zero. Është e qartë se kjo unazë është $\mathcal{D}$-e thjeshtë, ndërkohë që nuk plotësohet kushti (B_1).

Ky shembull është dhënë te [17] dhe konsiderohet si trivialë, meqë mund të nënkuptohet tek përkufizimi 2.4.3 se është fjala për unazat me shumëzim jozero, megjithëse kjo gjë nuk theksohet aty në trajtë të shtjelluar.

Nuk është gjetur ende ndonjë unazë me shumëzim jozero $\mathcal{D}$-e thjeshtë që të mos jetë bi-e thjeshtë, ky problem është i hapur!

Te [17] janë dhënë pohime për unazat $\mathcal{D}$-të thjeshta, të cilat edhe në rast se vërtetohet se çdo unazë $\mathcal{D}$-e thjeshtë me shumëzim jozero është bi-e thjeshtë i pasurojnë më tej rezultatet e gjetura te [17], [18] dhe [19].

Nga përkufizimi i relacionit të Green-it $\mathcal{D}$ në unaza dhe nga pohimi 2.3.11, teorema 2.3.14 dhe nga teorema 2.3.16 marrim menjëherë këto rrjedhime:

Rrjedhim 2.4.5. *Në qoftë se $\mathcal{D}$-klasa D e një unaze A ka një element të rregullt, atëherë çdo element i D-së është i rregullt.*

Rrjedhim 2.4.6. *Le të jenë a, c dy elemente jozero të një unaze A të tillë që $a\mathcal{D}c$ dhe $(a)_b$ e $(c)_b$ janë unaza me shumëzim jozero. Atëherë bi-ideali $(a)_b$ është minimal atëherë dhe vetëm atëherë kur bi-ideali $(c)_b$ është minimal.*

Rrjedhim 2.4.7. *Le të jenë a, c dy elemente jozero të një unaze A të tillë që $a\mathcal{D}c$ dhe $(a)_b$ e $(c)_b$ janë nënunaza me shumëzim zero. Atëherë bi-ideali $(a)_b$ është minimal me karakteristikë zero atëherë dhe vetëm atëherë kur një gjë e tillë ndodh edhe për bi-idealin $(c)_b$.*

Teoremë 2.4.8. *Elementet idempotentë të një unaze A janë ekuivalentë $mod\, \mathcal{D}$ atëherë dhe vetëm atëherë kur idealet e majta* [*të djathta*] *Ae, Af* [*eA, fA*] *të A-së janë A-module të majta* [*të djathta*] *A-izomorfe.*

Vërtetim. Do të bëjmë vërtetimin për idealet e majta. Vërtetimi për idealet e djathta bëhet në mënyrë të ngjashme.

Supozojmë se $e\mathcal{D}f$. Atëherë ekziston një element $a \in A$ i tillë që $(e)_r = (a)_r$ dhe $(a)_l = (f)_l$. Kështu nga barazimet (1.1.1) dhe (1.1.2) kemi:

$$a = k_1 e + eb, \qquad e = k_1' a + ab_1', \qquad a = k_2 f + b_2 f, \qquad f = k_2' a + b_2' a,$$

ku k_1, k_1', k_2, k_2' janë numra të plotë, ndërsa b_1, b_1', b_2, b_2' janë elemente të A-së. Këto barazime implikojnë barazimet:

$$a = ea = af = eaf,\ a = e(k_1 e + eb_1), \qquad e = a(k_1' e + b_1' e),$$

$$f = (k_2' f + f b_2')a, \quad a = (k_2 f + b_2 f)f.$$

Në qoftë se shënojmë:

$$c = k_1 e + eb_1, \qquad c' = k_1' e + b_1' e, \qquad d = k_2' f + f b_2, \qquad d' = k_2 f + b_2 f$$

kemi:

$$a = ea = af = eaf,\ \ a = ec, \qquad e = ac', \qquad f = da, \qquad a = d'f.$$

Këto barazime implikojnë barazimet:

$$a = ea = af = eaf,\ ac'e = e, \qquad fda = f,$$

$$e = ac'e = eafc'e = eaffc'e,$$

$$f = fda = fdeaf = fdeeaf = fc'eeaf.$$

Nga këto barazime kemi elementet $a = eaf$ dhe $b = fc'e$ të cilët plotësojnë barazimet (1.1.5), (1.1.6) të pohimit 1.1.21, prandaj idealet e majta Ae dhe Af janë A-module të majta A-izomorfe.

Anasjellas, në qoftë se idealet e majta Ae dhe Af janë A-module të majta A-izomorfe, atëherë nga pohimi 1.1.21 ekzistojnë elementet a, b të A-së të tillë që:

$$eaf = a, \qquad fbe = b, \qquad ab = e, \qquad ba = f.$$

Këto barazime tregojnë se $e\mathcal{R}a$, $a\mathcal{L}f$ dhe rrjedhimisht $e\mathcal{D}f$.■

Teoremë 2.4.9. *Në qoftë se elementet idempotentë e, f të unazës A janë $\mathcal{D}$-ekuivalentë, atëherë bi-idealet kryesore $(e)_b$, $(f)_b$ janë nënunaza izomorfe.*

Vërtetim. Në sajë të pohimit 1.1.21 dhe të teoremës 2.4.8 $\mathcal{D}$-ekuivalenca e elementeve idempotentë e, $f$implikon ekzistencën e elementeve a, c të A-së të tillë që:

$$eaf = a, \qquad fce = c, \qquad ac = e, \qquad ca = f.$$

Shënojmë me h pasqyrimin e bi-idealit $(e)_b$, në bi-idealin $(f)_b$ të tillë që

$$\forall x \in (e)_b, h(x) = cxa.$$

Pasqyrimi h është i mirëpërcaktuar, meqë barazimet e mësipërme implikojnë:

$$cxa = fcxaf \in fAf = (f)_b.$$

Në qoftë se x, y janë dy elemente çfarëdo të bi-idealit $(e)_b = eAe$, atëherë kemi:

$$h(x+y) = c(x+y)a = cxa + cya = h(x) + h(y),$$

$$h(xy) = c(xy)a = cxeya = (cxa)(cya) = h(x)h(y).$$

Kështu, h është një homomorfizëm i $(e)_b$ në $(f)_b$. Për më tepër h është një pasqyrim injektiv. Vërtet, në qoftë se për çdo dy elemente x, y të $(e)_b$ kemi $h(x) = h(y)$, domethënë $cxa = cya$, atëherë

$$x = exe = acxac = acyac = eye = y.$$

Së fundi, në qoftë se y është një element çfarëdo i bi-idealit $(f)_b$, atëherë për elementin $x = eayce \in (e)_b$ kemi:

$$h(eayce) = ceaycea = ceafyfcea = fyf = y.$$

Kështu, h është pasqyrim syrjektiv. Pra, pasqyrimi h është një izomorfizëm i $(e)_b$ në $(f)_b$ dhe rrjedhimisht bi-idealet kryesore $(e)_b$ dhe $(f)_b$ janë nënunaza izomorfe.■

Tani duke përdorur teoremën 2.4.9, lemën 2.3.7 dhe rrjedhimin 2.4.6 gjejmë këtë teoremë:

Teoremë 2.4.10. Le të jenë e, f dy elemente jozero të një unaze A të tillë që $e\mathcal{D}f$. Në qoftë se $(e)_b$ është një bi-ideal minimal, atëherë $(f)_b$ është gjithashtu një bi-ideal minimal. Për më tepër bi-idealet $(e)_b$ dhe $(f)_b$ janë nënunaza izomorfe.

∴

Ekuivalenca e dy elementeve a, b të një unaze A sipas relacionit të Green-it $\mathcal{D}$ në A u përcaktua me ndihmën e një elementi të ndërmjetëm c të tillë që $a\mathcal{L}c$ dhe $c\mathcal{R}b$. A mund të eleminohet ky element ndërmjetës duke e përcaktuar ekuivalencën e dy elementeve a, b të unazës A duke u mbështetur vetëm në idealet e majta kryesore apo idealet e djathta kryesore të përftuara nga këto dy elemente sigurisht duke shtuar kondita të tjera që ato duhet të plotësojnë?

Do të tregojmë se përgjigjja e kësaj pyetje është pozitive dhe ne do ta marrim atë nga një pohim më i përgjithshëm që ka të bëjë me përgjithësimin e Relacioneve të Green-it në unaza, duke përgjithësuar fillimisht konceptet e idealit të majtë, idealit të djathtë, kuazi-idealit dhe bi-idealit në unaza. Pikërisht këto rezultate do ti shtjellojmë në kapitullin e tretë të këtij disertacioni!

KAPITULLI III

NJË PËRGJITHËSIM I RELACIONEVE TË GREEN-IT NË UNAZA

Për relacionet e Green-it në gjysmëgrupe ka një varg përgjithësimesh të tyre që janë paraqitur te [21], [22], [23], [24], [25]. Për të gjitha këto përgjithësime mund të shihet mundësia e transplatimit të tyre për relacionet e Green-it në unaza. Në këtë kapitull ne do të bëjmë njërin nga këto transplatime pikërisht atë që është shtjelluar te [21] meqë ai lidhet me koncepte që janë paksa të dobishme edhe për unazat në përgjithësi. Fillojmë pikërisht me trajtimin e koncepteve bazë.

§ 1. TRANSLACIONET NË UNAZA DHE PËRGJITHËSIME TË IDEALEVE

Në këtë paragraf fillimisht do trajtojmë në mënyrë të koncentruar disa koncepte e pohime që do ti përdorim për të realizuar një përgjithësim të relacioneve të Green-it në unaza që kemi shtjelluar në kapitullin e dytë, sigurisht duke bërë disa përshtatje për qëllimet tona.

Në pjesën e dytë të këtij paragrafi do të japim përgjithësime të idealeve të majta, të idealeve të djathta, kuazi-idealeve e bi-idealeve në unaza duke çelur shtegun për përgjithësimin e dëshiruar të relacioneve të Green-it në unaza.

Le të jetë A një unazë çfarëdo, k një numër i plotë dhe a një element i A-së.

Përkufizim 3.1.1. [26] *Pasqyrimi* $\lambda_{(k,a)}: A \longrightarrow A$ *i tillë që*

$$\forall x \in A, \lambda_{(k,a)}(x) = kx + ax = (k,a)x$$

quhet translacion i brendshëm i majtë i unazës A *që i përket numrit të plotë* k *dhe elementit* $a \in A$.

Përkufizim 3.1.2. [26] *Pasqyrimi* $\rho_{(k,a)}: A \longrightarrow A$ *i tillë që*

$$\forall x \in A, \rho_{(k,a)}(x) = kx + xa = x(k,a)$$

quhet translacion i brendshëm i djathtë i unazës A *që i përket numrit të plotë* k *dhe elementit* $a \in A$.

Bashkësia e translacioneve të brendshme të majta shënohet Λ_b, kurse bashkësia e translacioneve të brendshme të djathta shënohet P_b.

Kur nuk ka ngatërresa përdoren thjesht shënimet λ, ρ në vend të shënimeve $\lambda_{(k,a)}$, $\rho_{(k,a)}$.

Në qoftë se për një element $a \in A$ shënohen:

$$\Lambda_b a = \{x \in A \mid \exists\, \lambda \in \Lambda_\mathrm{b},\ \mathrm{x} = \lambda(\mathrm{a})\},$$

$$\mathrm{aP}_b = \{x \in A \mid \exists\, \rho \in P_b,\ x = \rho(a)\},$$

atëherë kemi $\Lambda_b a = (a)_l$ dhe $a\mathrm{P}_b = (a)_r$.

Pohim 3.1.3. [26] *Çdo translacion i brendshëm i majtë* [*i djathtë*] *i një unaze* $(A,+,\cdot)$ *është endomorfizëm i grupit të mbledhjes* $(A,+)$ *të kësaj unaze dhe endomorfizëm i unazës A të konsideruar si A-modul të djathtë* [*të majtë*] $(A,+,(\cdot)_A)$ [$(A, +, {}_A(\cdot))$]

Pohim 3.1.4. **[26]** *Për çdo numër të plotë* k *dhe për çdo element* a *të një unaze A kemi*

$$x\lambda_{(k,a)}(y) = \rho_{(k,a)}(x)y.$$

Përkufizim 3.1.5. [26] *Translacioni i brendshëm i majtë* $\lambda_{(k_1,a_1)} \in \Lambda_b$ *dhe translacioni i brendshëm i djathtë* $\rho_{(k_2,a_2)} \in P$ *quhen të lidhur njëri me tjetrin në qoftë se është i vërtetë pohimi:*

$$\forall (x,y) \in A^2, x\lambda_{(k_1,a_1)}(y) = \rho_{(k_2,a_2)}(x)y.$$

Pohimi 3.1.4. tregon se për çdo numër të plotë k dhe për çdo element $a \in A$ translacionet $\lambda_{(k,a)} \in \Lambda_{\mathrm{b}}$ dhe $\rho_{(k,a)} \in P_b$ janë të lidhur me njëri tjetrin.

Pohim 3.1.6. [26] *Çdo translacion i brendshëm i majtë i një unaze A është i përkëmbyeshëm me çdo translacion të brendshëm të djathtë të kësaj unaze*.

Simbolikisht ky fakt shënohet

$$\Lambda_b \circ \mathrm{P}_b = \mathrm{P}_b \circ \Lambda_b.$$

Në qoftë se $\lambda_{(k_1,a)} \in \Lambda_b$ dhe $\rho_{(k_2,b)} \in \mathrm{P}_b$, atëherë nga pohimi 3.1.6 për çdo $x \in A$ është i vërtetë barazimi:

$$\lambda_{(k_1,a)}\left(\rho_{(k_2,b)}(x)\right) = \rho_{(k_2,b)}\left(\lambda_{(k_1,a)}(x)\right).$$

Duke patur parasysh vetitë themelore të translacioneve të brendshme të majta e të djathta të një unaze mund të jepen koncepte më të përgjithshme të translacioneve të majta e të djathta. Pikërisht jepen këto përkufizime.

Përkufizim 3.1.7. [26] *Translacion i majtë* [*i djathtë*] *i një unaze A quhet çdo homomorfizëm i A-modulit të djathtë* [*të majtë*]A_A [${}_AA$].

Përkufizim 3.1.8. [26] *Translacioni i majtë* [*i djathtë*] *i një unaze A quhet i pranueshëm në qoftë se ai është i përkëmbyeshëm me çdo translacion të djathtë* [*të majtë*] *të A-së*.

Bashkësia e translacioneve të majta të pranueshme të një unaze A shënohet Λ, kurse bashkësia e translacioneve të djathta të pranueshme shënohet P.

Pohim 3.1.9. *Në qoftë se unaza A është e tillë që* $A^2 = A$, *atëherë çdo translacion i majtë* [*i djathtë*] *i A-së është i pranueshëm*.

Vërtetim. Do ta bëjmë vërtetimin për translacionin e majtë. Vërtetimi për translacionin e djathtë rrjedh menjëherë prej tij për arsye simetrie.

Le të jetë λ një translacion çfarëdo i majtë i A-së. Për çdo translacion të djathtë ρ të A-së dhe për çdo $a \in A$ ekzistojnë elementet b, c të A tillë që $a = bc$ dhe janë të vërteta barazimet:

$$(\lambda \circ \rho)(a) = (\lambda \circ \rho)(bc) = \lambda\big(\rho(bc)\big) = \lambda\big(b(c\rho)\big) = (\lambda b)(c\rho),$$

$$(\rho \circ \lambda)(a) = \rho\big(\lambda(a)\big) = \rho\big(\lambda(bc)\big) = \rho\big((\lambda b)c\big) = (\lambda b)(c\rho),$$

që tregojnë se $\lambda \circ \rho = \rho \circ \lambda$. ■

Nuk është e vështirë të bindemi se çdo translacion i brendshëm i majtë [i djathtë] i një unaze A është i përkëmbyeshëm me çdo translacion të djathtë [të majtë] të A-së. Kështu janë të vërteta përfshirjet:

$$\Lambda_b \subseteq \Lambda \text{ dhe } \mathrm{P}_b \subseteq \mathrm{P}.$$

Pohimi i mëposhtëm tregon një rast se kur këto përfshirje kthehen në barazime.

Pohim 3.1.10. *Në qoftë se unaza A ka një njësh të majtë* [*të djathtë*] *atëherë $\Lambda_b = \Lambda$* [$P_b = P$], *rrjedhimisht kur A-ja ka një njësh $\Lambda_b = \Lambda$ dhe $P_b = P$.*

Vërtetim. Do ta bëjmë vërtetimin për njëshin e majtë, vërtetimi për njëshin e djathtë bëhet në mënyrë analoge. Le të jetë e njëshi i majtë i unazës A. Le të jetë λ një translacion i majtë i pranueshëm i unazës A. Për çdo element $a \in A$ kemi $a = ea$ dhe rrjedhimisht $\lambda(a) = \lambda(ea) = \lambda(e)a$. Që këtej rrjedh se $\lambda = \lambda_{(0,\lambda(e))}$ meqë për çdo $a \in A$ janë të vërteta barazimet:

$$\lambda_{(0,\lambda(e))}(a) = 0a + \lambda(e)a = \lambda(e)a = \lambda(ea) = \lambda(a). \blacksquare$$

Për arsye komoditeti në qoftë se $\lambda \in \Lambda$ dhe $x \in A$ ne do të përdorim shënimin λx në vend të shënimit $\lambda(x)$ dhe në qoftë se $\rho \in \mathrm{P}$, shënimin $x\rho$ në vend të shënimit të zakonshëm $\rho(x)$. Me këto shënime translacioni i majtë i unazës A është i përkëmbyeshëm me translacionin e djathtë të unazës A atëherë dhe vetëm atëherë kur për çdo element $x \in A$ kemi

$$\lambda(x\rho) = (\lambda x)\rho.$$

Për komoditet shkruajmë $\lambda x\rho = \lambda(x\rho) = (\lambda x)\rho$.

Le të jenë B, C dy nënbashkësi elementesh të unazës $(A, +, \cdot)$. Shënojmë:

$$\Lambda B = \{\lambda b \in A \mid \lambda \in \Lambda \text{ dhe } b \in B\},$$

$$C\mathrm{P} = \{c\rho \in A \mid \rho \in \mathrm{P} \text{ dhe } c \in C\},$$

$$\Lambda B\mathrm{P} = \{\lambda b\rho \in A \mid \lambda \in \Lambda, \rho \in \mathrm{P} \text{ dhe } b \in B\}.$$

Duke përdorur konceptet e mësipërme japim përgjithësimet e mëposhtme të idealit të majtë, idealit të djathtë, kuazi-idealit dhe bi-idealit.

Përkufizim 3.1.11. *Ideal i majtë* [*i djathtë*] *i përgjithësuar i një unaze $(A, +, \cdot)$ quhet çdo nënbashkësi L_p $[R_p]$ e A-së që formon nëngrup të grupit të mbledhjes $(A, +)$ të kësaj unaze e tillë që $\Lambda L_p \subseteq L_p$ $[R_p P \subseteq R_p]$.*

Çdo nënbashkësi $I \subseteq A$ që është njëherësh ideal i majtë i përgjithësuar dhe ideal i djathtë i përgjithësuar quhet ideal i përgjithësuar i A-së.

Përkufizim 3.1.12. *Kuazi-ideal i përgjithësuar i një unaze* $(A,+,\cdot)$ *quhet çdo nënbashkësi* $Q_p \subseteq A$ *që formon nëngrup të grupit të mbledhjes* $(A,+)$ *të kësaj unaze e tillë që* $\Lambda Q_p \cap Q_p P \subseteq Q_p$.

Prerja e të gjitha idealeve të majta [idealeve të djathta, kuazi-idealeve] të përgjithësuara që përmbajnë një nënbashkësi T të A-së quhet ideal i majtë [ideal i djathtë, kuazi-ideal] i përgjithësuar i përftuar nga T-ja, vetë T-ja quhet bashkësi përftuesish të tij. Është e qartë se ideali i majtë [ideali i djathtë, kuazi-ideali] i përgjithësuar i përftuar nga T-ja ekziston sepse vetë A-ja është ideal i majtë [ideal i djathtë, kuazi-ideal] i përgjithësuar.

Nuk është vështirë të bindemi se për nënbashkësin $T \subseteq A$ ideali i majtë [ideali i djathtë, kuazi-ideali] i përgjithësuar i përftuar nga T-ja është ΛT $[T\mathrm{P}, \Lambda T \cap T\mathrm{P}]$ meqë pasqyrimi identik është translacion i majtë [i djathtë] i pranueshëm i unazës A. Në qoftë se T përbëhet vetëm nga një element $a \in A$, atëherë kemi idealin e majtë [idealin e djathtë, kuazi-idealin] kryesor të përgjithësuar të përftuar nga elementi a të cilin do ta shënojmë $(a)_{l_p}$ $\left[(a)_{r_p}, (a)_{q_p}\right]$. Pra kemi:

$$(a)_{l_p} = \Lambda a,\ (a)_{r_p} = a\mathrm{P},\ (a)_{q_p} = \Lambda a \cap a\mathrm{P}.$$

Pohim 3.1.13. *Ideali i majtë* [*ideali i djathtë, kuazi-ideali*] *i përgjithësuar kryesor i përftuar nga një element i rregullt* a *i një unaze* A *përputhet me idealin e majtë* [*idealin e djathtë, kuazi-idealin*] *kryesor të përftuar nga ky element*.

Vërtetim. Do ta bëjmë vërtetimin për idealin e majtë të përgjithësuar kryesor, vërtetimi bëhet në mënyrë të ngjashme për idealin e djathtë të përgjithësuar kryesor dhe për kuazi-idealin e përgjithësuar kryesor. Meqë elementi a i unazës A është i rregullt, ekziston një element $x \in A$ i tillë që $a = axa$. Për çdo translacion të majtë të pranueshëm λ kemi barazimet:

$$\lambda a = \lambda(axa) = (\lambda ax)a.$$

Nga këto barazime rrjedh se $\Lambda a \subseteq \mathbb{Z}a + Aa$. Në qoftë se $b \in \mathbb{Z}a + Aa$, atëherë ekzistojnë elementet $k \in \mathbb{Z}$ dhe $x \in A$ i tillë që $b = ka + xa$. Po të shënojmë translacionin e majtë të brendshëm $\lambda_{(k,x)}$, atëherë kemi:

$$\lambda_{(k,x)}(a) = ka + xa = b.$$

Pra, është e vërtetë edhe përfshirja $\mathbb{Z}a + Aa \subseteq \Lambda a$ dhe rrjedhimisht kemi barazimin $\Lambda a = \mathbb{Z}a + Aa$. Ky barazim përkthehet në barazimin e dëshiruar $(a)_{l_p} = (a)_l$.■

Meqenëse çdo element idempotent në një unazë është element i rregullt, atëherë kemi rrjedhimin e mëposhtëm:

Rrjedhim 3.1.14. *Ideali i majtë* [*ideali i djathtë, kuazi-ideali*] *i përgjithësuar kryesor i përftuar nga një element idempotent* a *i një unaze* A *përputhet me idealin e majtë* [*idealin e djathtë, kuazi-idealin*] *kryesor të përftuar nga ky element*.

§ 2. RELACIONET E PËRGJITHËSUARA TË GREEN-IT $\mathcal{L}_P$, $\mathcal{R}_P$, $\mathcal{H}_P$, $\mathcal{Q}_P$, $\mathcal{D}_P$ NË UNAZA

Paraqitja që bëmë në paragrafin e parë na mjafton për të bërë përgjithësimet tona të relacioneve të Green-it në unaza: Le të jetë A një unazë dhe a, b dy elemente çfarëdo të saj. Përcaktojmë në A relacionet $\mathcal{L}_p$, $\mathcal{R}_p$, $\mathcal{H}_p$, $\mathcal{Q}_p$ si më poshtë:

$$a\mathcal{L}_p b \Leftrightarrow (a)_{l_p} = (b)_{l_p},$$

$$a\mathcal{R}_p b \Leftrightarrow (a)_{r_p} = (b)_{r_p},$$

$$a\mathcal{H}_p b \Leftrightarrow (a)_{l_p} = (b)_{l_p} \text{ dhe } (a)_{r_p} = (b)_{r_p},$$

$$a\mathcal{Q}_p b \Leftrightarrow (a)_{q_p} = (b)_{q_p},$$

ku $(a)_{l_p}$, $(a)_{r_p}$, $(a)_{q_p}$, $(b)_{l_p}$, $(b)_{r_p}$, $(b)_{q_p}$ janë përkatësisht idealet e majta të përgjithësuara kryesore, idealet e djathta të përgjithësuara kryesore, kuazi-idealet e përgjithësuara kryesore të përftuara nga elementet a dhe b.

Është e qartë se relacionet e mësipërme janë relacione ekuivalence. Këto relacione ekuivalence do ti quajmë relacione të përgjithësuara të Green-it në unaza. Klasat e ekuivalencës sipas këtyre relacioneve të përgjithësuara të Green-it që përmbajnë elementin a të unazës A do ti shënojmë përkatësisht:

$$L_p(a), R_p(a), H_p(a) \text{ dhe } Q_p(a).$$

Pohim 3.2.1. *Relacionet e përgjithësuara të Green-it $\mathcal{L}_p$ dhe $\mathcal{R}_p$ në një unazë A janë të tillë që për çdo translacion të pranueshëm të majtë λ dhe për çdo translacion të pranueshëm të djathtë ρ dhe për çdo dy elemente a, b të A-së janë të vërteta implikimet:*

$$a\mathcal{L}_p b \Longrightarrow (a\rho)\mathcal{L}_p(b\rho),$$

$$a\mathcal{R}_p b \Longrightarrow (\lambda a)\mathcal{R}_p(\lambda b).$$

Vërtetim. Supozojmë se $a\mathcal{L}_p b$. Atëherë ekzistojnë translacionet e majta të pranueshme λ dhe λ' të tillë që

$$a = \lambda b \text{ dhe } b = \lambda' a.$$

Meqë janë të vërteta barazimet:

$$a\rho = (\lambda b)\rho = \lambda(b\rho),$$

$$b\rho = (\lambda' a)\rho = \lambda'(a\rho),$$

atëherë kemi

$$(a\rho)\mathcal{L}_p(b\rho).$$

Implikimi tjetër vërtetohet në mënyrë analoge. ■

Pohim 3.2.2. *Në çdo unazë A relacionet e përgjithësuara të Green-it $\mathcal{L}_p$ dhe $\mathcal{R}_p$ janë të përkëmbyeshëm, domethënë $\mathcal{L}_p \circ \mathcal{R}_p = \mathcal{R}_p \circ \mathcal{L}_p$.*

Vërtetim. Mjafton të vërtetojmë $\mathcal{R}_p \circ \mathcal{L}_p \subseteq \mathcal{L}_p \circ \mathcal{R}_p$. Le të jenë a dhe b dy elemente të unazës A të tillë që $a\mathcal{R}_p \circ \mathcal{L}_p b$. Kjo do të thotë se ekziston një element c i A-së i tilë që $a\mathcal{L}_p c$ dhe $c\mathcal{R}_p b$. Nga përkufizimi i relacioneve të përgjithësuara të Green-it $\mathcal{L}_p$ dhe $\mathcal{R}_p$ kjo gjë implikon ekzistencën e një translacioni të majtë të pranueshëm λ dhe një translacioni të djathtë të pranueshëm ρ të tillë që $a = \lambda c$ dhe $b = c\rho$.

Le të jetë $d = a\rho$. Atëherë kemi:

$$d = a\rho = (\lambda c)\rho = \lambda(c\rho) = \lambda b.$$

Meqë $a\mathcal{L}_p c$ nga pohimi 3.2.1 rrjedh se

$$(a\rho)\mathcal{L}_p(c\rho),$$

domethënë $d\mathcal{L}_p b$. Përsëri nga pohimi 3.2.1, meqë $c\mathcal{R}_p b$, kemi

$$(\lambda c)\mathcal{R}_p(\lambda b),$$

domethënë $a\mathcal{R}_p d$. Kështu, meqë $a\mathcal{R}_p d$ dhe $d\mathcal{L}_p b$ kemi $a\mathcal{L}_p \circ \mathcal{R}_p b$ dhe rrjedhimisht është e vërtetë përfshirja $\mathcal{R}_p \circ \mathcal{L}_p \subseteq \mathcal{L}_p \circ \mathcal{R}_p$. ■

Pohimi 3.2.2 tregon se $\mathcal{L}_p \circ \mathcal{R}_p$ është relacion ekuivalence në unazën A. Kështu, kemi relacionin e përgjithësuar të Green-it

$$\mathcal{D}_p = \mathcal{L}_p \circ \mathcal{R}_p = \mathcal{R}_p \circ \mathcal{L}_p$$

në unaza. Klasën e ekuivalencës $mod\ \mathcal{D}_p$ që përmban elementin a të unazës A do ta shënojmë simbolikisht $D_p(a)$.

Pohim 3.2.3. *Në çdo unazë A kemi përfshirjet*

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_p, \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_p, \mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_p, \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Q}_p, \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_p.$$

Vërtetim. Supozojmë se për elementet a, b të unazës A kemi $a\mathcal{L}b$. Atëherë ekzistojnë translacionet e brendshme të majta λ_1 dhe λ_2 të tillë që $a = \lambda_1 b$ dhe $b = \lambda_2 a$. Meqë translacionet e brendshme të majta janë të pranueshme, elementet a, b janë ekuivalente edhe sipas relacionit të përgjithësuar të Green-it $\mathcal{L}_p$ dhe rrjedhimisht $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_p$.

Në mënyrë të ngjashme vërtetohen edhe përfshirjet $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_p$ dhe $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Q}_p$. Përfshirjet $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_p$ dhe $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_p$ janë rrjedhim i menjëhershëm i përfshirjeve $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_p$ dhe $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_p$. ■

Nga pohimi 3.1.13 marrim menjëherë këtë pohim:

Pohim 3.2.4. *Në qoftë se elementet a dhe b të unazës A janë të rregullt, atëherë kemi:*

$$a\mathcal{L}b \Leftrightarrow a\ \mathcal{L}_p b,\ a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a\ \mathcal{R}_p b,\ a\mathcal{H}b \Leftrightarrow a\ \mathcal{H}_p b,\ a\mathcal{Q}b \Leftrightarrow a\ \mathcal{Q}_p b,\ a\mathcal{D}b \Leftrightarrow a\ \mathcal{D}_p b.$$

Lema e mëposhtme është një analoge e lemës së Green-it për relacionin $\mathcal{L}$ në unaza [7], prandaj atë do ta quajmë lema e Green-it për relacionin e përgjithësuar $\mathcal{L}_p$.

Lema 3.2.5. (***Lema e Green-it për relacionin e përgjithësuar $\mathcal{L}_p$***) *Le të jenë a, b dy elemente të unazës A të tillë që $a\mathcal{L}_p b$. Në qoftë se λ_1, λ_2 janë dy translacione të majta të pranueshme të tilla që $b = \lambda_1 a$ dhe $a = \lambda_2 b$, atëherë pasqyrimet*

$$\varphi: (a)_{r_p} \xrightarrow[x \to \lambda_1 x]{} (b)_{r_p},\ \psi: (b)_{r_p} \xrightarrow[y \to \lambda_2 y]{} (a)_{r_p}$$

janë të anasjellë të njëri-tjetrit, ruajnë $\mathcal{L}_p$-klasat dhe pasqyrojnë në mënyrë bijektive $R_p(a)$ në $R_p(b)$.

Vërtetim. Le të jetë x një element çfarëdo i idealit të djathtë të përgjithësuar $(a)_{r_p}$. Atëherë ekziston translacioni i djathtë i pranueshëm ρ_1 i tillë që $x = a\rho_1$. Meqë kemi

$$\varphi(x) = \lambda_1 x = \lambda_1(a\rho_1) = (\lambda_1 a)\rho_1 = b\rho_1 \in (b)_{r_p},$$

atëherë pasqyrimi φ është i mirëpërcaktuar. Në mënyrë analoge tregohet se edhe pasqyrimi ψ është i mirëpërcaktuar.

Janë të vërteta barazimet:

$$(\psi \circ \phi)(x) = \psi\big(\varphi(x)\big) = \psi(\lambda_1 x) = \lambda_2(\lambda_1 x) = \lambda_2\big((\lambda_1 a)\rho_1\big) = \lambda_2(b\rho_1) =$$

$$= (\lambda_2 b)\rho_1 = a\rho_1 = x,$$

që tregojnë se $\psi \circ \varphi$ është i barabartë me pasqyrimin identik të $(a)_{r_p}$. Në mënyrë të ngjashme tregohet se edhe pasqyrimi $\varphi \circ \psi$ është i barabartë me pasqyrimin identik të $(b)_{r_p}$. Kështu, pasqyrimet φ dhe ψ janë të anasjellë të njëri-tjetrit dhe rrjedhimisht janë pasqyrime bijektive.

Le të jetë x një element i $\mathcal{R}_p$-klasës $R_p(a)$. Në sajë të pohimit 3.2.1 kemi implikimin

$$x\,\mathcal{R}_p a \Longrightarrow (\lambda_1 x)\mathcal{R}_p(\lambda_1 a),$$

që tregon se φ pasqyron $R_p(a)$ në $R_p(b)$. Në mënyrë të ngjashme tregohet se dhe ψ pasqyron $R_p(b)$ në $R_p(a)$. Që këtej rrjedh se φ dhe ψ pasqyrojnë në mënyrë bijektive $R_p(a)$ dhe $R_p(b)$ tek njëra tjetra.

Për të treguar se pasqyrimi φ ruan $\mathcal{L}_p$-klasën shënojmë që në qoftë se $x \in L_p(a)$, dhe $y = \varphi(x) = \lambda_1 x$, atëherë $\lambda_2 y = x$, prandaj $y\mathcal{L}_p x$. Në mënyrë analoge tregohet se dhe pasqyrimi ψ ruan $\mathcal{L}_p$-klasën. ■

Në mënyrë të ngjashme vërtetohet lema duale e lemës 3.2.5 për relacionin e përgjithësuar të Green-it $\mathcal{R}_p$. Pikërisht kemi:

Lema 3.2.6. (***Lema e Green-it për relacionin e përgjithësuar $\mathcal{R}_p$***). *Le të jenë a, b dy elemente të një unaze A të tillë që $a\,\mathcal{R}_p b$. Në qoftë se ρ_1, ρ_2 janë dy translacione të djathta të pranueshme të tilla që $b = a\rho_1$ dhe $a = b\rho_2$, atëherë pasqyrimet:*

$$\varphi': (a)_{l_p} \xrightarrow[x \to x\rho_1]{} (b)_{l_p},\ \psi': (b)_{l_p} \xrightarrow[y \to y\rho_2]{} (a)_{l_p}$$

janë të anasjellë të njëri-tjetrit, ruajnë $\mathcal{R}_p$-klasat dhe pasqyrojnë në mënyrë bijektive $L_p(a)$ në $L_p(b)$.

Lema e Green-it për relacionin e përgjithësuar $\mathcal{L}_p$ na ndihmon të vërtetojmë këtë pohim:

Pohim 3.2.7. *Le të jenë a, b dy elemente të një unaze A të tillë që $a\,\mathcal{L}_p b$. Në qoftë se λ_1, λ_2 janë dy translacione të majta të pranueshme të tilla që $b = \lambda_1 a$ dhe $a = \lambda_2 b$, atëherë pasqyrimet:*

$$f: H_p(a) \xrightarrow[x \to \lambda_1 x]{} H_p(b),\ g: H_p(b) \xrightarrow[y \to \lambda_2 y]{} H_p(a)$$

janë të anasjellë të njëri tjetrit. Për më tepër çdo dy $\mathcal{H}_p$-klasa të A-së që përmbahen në të njëjtën $\mathcal{L}_p$-klasë kanë të njëjtin kardinal.

Vërtetim. Në qoftë se $x \in H_p(a)$, në sajë të lemës 3.2.5 dhe lemës 3.2.6 janë të vërteta implikimet:

$$x \in L_p(a) = L_p(b) \Longrightarrow \lambda_1 x \in L_p(a) = L_p(b),$$

$$x \in R_p(a) = R_p(b) \Longrightarrow \lambda_1 x \in R_p(a) = R_p(b),$$

të cilat na garantojnë se për çdo element x të $H_p(a)$ elementi $\lambda_1 x$ i përket $H_p(b)$. Kështu, pasqyrimi f është përcaktuar në mënyrë korrekte. Në mënyrë të ngjashme tregohet se edhe pasqyrimi g është përcaktuar në mënyrë korrekte.

Le të jetë x një element çfarëdo i $H_p(a)$. Atëherë ekziston translacioni i djathtë ρ_1 i pranueshëm i tillë që $x = a\rho_1$. Janë të vërteta barazimet:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(\lambda_1 x) = \lambda_2(\lambda_1 x) = \lambda_2\big(\lambda_1(a\rho_1)\big) =$$

$$= \lambda_2\big((\lambda_1 a)\rho_1\big) = \lambda_2(b\rho_1) = (\lambda_2 b)\rho_1 = a\rho_1 = x,$$

që tregojnë se pasqyrimi $g \circ f$ është i barabartë me pasqyrimin identik të $H_p(a)$. Në mënyrë të ngjashme tregohet se edhe pasqyrimi $f \circ g$ është i barabartë me pasqyrimin identik të $H_p(b)$. Kështu, pasqyrimet f dhe g janë të anasjellë të njëri tjetrit dhe rrjedhimisht ato janë pasqyrime bijektive.

Në qoftë se dy $\mathcal{H}_p$-klasa $H_p(x)$ dhe $H_p(y)$ përmbahen në të njëjtën $\mathcal{L}_p$-klasë, atëherë $x\mathcal{L}_p y$ dhe nga sa pamë më sipër rrjedh se $H_p(x)$ dhe $H_p(y)$ janë dy bashkësi të barazfuqishme prandaj ato kanë të njëjtin kardinal.■

Me anë të lemës së Green-it për relacionin e përgjithësuar $\mathcal{R}_p$ (lema 3.2.6) përftojmë pohimin dual të pohimit 3.2.7 për relacionin $\mathcal{R}_p$:

Pohim 3.2.8. *Le të jenë a, b dy elemente të një unaze A të tillë që $a\,\mathcal{R}_p b$. Në qoftë se ρ_1, ρ_2 janë translacione të djathta të pranueshme të tilla që $b = a\rho_1$ dhe $a = b\rho_2$, atëherë pasqyrimet:*

$$f_1: H_p(a) \xrightarrow[x \to x\rho_1]{} H_p(b),\ g_1: H_p(b) \xrightarrow[y \to y\rho_2]{} H_p(a)$$

janë të anasjellë të njëri tjetrit. Për më tepër çdo dy $\mathcal{H}_p$-klasa të A-së që përmbahen në të njëjtën $\mathcal{R}_p$-klasë kanë të njëjtin kardinal.

Nga pohimet 3.2.7 dhe 3.2.8 kemi rrjedhimin e mëposhtëm:

Rrjedhim 3.2.9. *Le të jenë a, b dy elemente të një unaze A të tillë që $a\mathcal{D}_p b$. Në qoftë se $a\mathcal{L}_p c$, $c\,\mathcal{R}_p b$ dhe λ_1, λ_2 janë translacione të majta të pranueshme, ρ_1, ρ_2 janë translacione të djathta të pranueshme të tilla që:*

$$c = \lambda_1 a,\, a = \lambda_2 c,\, c = b\rho_1,\, b = c\rho_2,$$

atëherë pasqyrimet

$$f_2\colon H_p(a) \xrightarrow[x\to\lambda_1 x\rho_1]{} H_p(c),\; g_2\colon H_p(c) \xrightarrow[y\to\lambda_2 y\rho_2]{} H_p(a)$$

janë të anasjellë të njëri-tjetrit. Për më tepër çdo dy $\mathcal{H}_p$-klasa të unazës A që përfshihen në të njëjtën $\mathcal{D}_p$-klasë të A-së kanë të njëjtin kardinal.

Vërtetim. Në sajë të lemave të Green-it për relacionet e përgjithësuara $\mathcal{L}_p$ dhe $\mathcal{R}_p$ ekzistojnë pasqyrimet

$$f\colon H_p(a) \xrightarrow[x\to\lambda_1 x]{} H_p(c),\; g\colon H_p(c) \xrightarrow[y\to\lambda_2 y]{} H_p(a)$$

të anasjellë të njëri-tjetrit dhe pasqyrimet:

$$f_1\colon H_p(c) \xrightarrow[x\to x\rho_1]{} H_p(b),\; g_1\colon H_p(b) \xrightarrow[y\to y\rho_2]{} H_p(c)$$

gjithashtu të anasjellë të njëri-tjetrit.

Shënojmë $f_2 = f_1 \circ f$ dhe $g_2 = g \circ g_1$. Është e qartë se pasqyrimet :

$$f_2\colon H_p(a) \xrightarrow[x\to\lambda_1 x\rho_1]{} H_p(b),\; g_2\colon H_p(b) \xrightarrow[y\to\lambda_2 y\rho_2]{} H_p(a)$$

janë të anasjellë të njëri-tjetrit sepse janë të vërteta barazimet:

$$f_2 \circ g_2 = (f_1 \circ f) \circ (g \circ g_1) = f_1 \circ (f \circ g) \circ g_1 = f_1 \circ id_{H_p(c)} \circ g_1 = \\ = f_1 \circ g_1 = id_{H_p(b)},$$

$$g_2 \circ f_2 = (g \circ g_1) \circ (f_1 \circ f) = g \circ (g_1 \circ f_1) \circ f = g \circ id_{H_p(c)} \circ f = g \circ f = id_{H_p(a)}.$$

Në qoftë se dy $\mathcal{H}_p$-klasa $H_p(x_1)$ dhe $H_p(x_2)$ përmbahen në të njëjtën $\mathcal{D}_p$-klasë atëherë $x_1\mathcal{D}_p x_2$ dhe nga sa pamë më sipër rrjedh se $H_p(x_1)$ dhe $H_p(x_2)$ janë të barazfuqishme prandaj ato kanë të njëjtin kardinal.■

Vërejtje 3.2.10. Fakti që çdo dy $\mathcal{H}_p$-klasa të unazës A që ndodhen në një $\mathcal{D}_p$-klasë kanë të njëjtin kardinal nuk është ndonjë gjë e re ajo dihet nga pohimet 3.2.7 dhe 3.2.8 sepse këto $\mathcal{H}_p$-klasa përmbahen në të njëjtën $\mathcal{L}_p$-klasë dhe në të njëjtën $\mathcal{R}_p$-klasë, meqë $\mathcal{L}_p \subseteq \mathcal{D}_p$ dhe $\mathcal{R}_p \subseteq \mathcal{D}_p$. Kështu kemi edhe një mënyrë tjetër (në thelb pasqyrime të tjera) që garanton barazfuqinë e tyre.

Lemë 3.2.11. *Në qoftë se për translacionin e majtë [të djathtë] të pranueshëm λ [ρ] të unazës A elementet h, λh [$h\rho$] të dyja i përkasin të njëjtës $\mathcal{H}_p$-klasë $H_p(h)$, atëherë*

$$\lambda H_p(h) = H_p(h)\ \big[H_p(h)\rho = H_p(h)\big],$$

ku

$$\lambda H_p(h) = \{\lambda x \in A \mid x \in H_p(h)\} \left[H_p(h)\rho = \{x\rho \in A \mid x \in H_p(h)\}\right].$$

Vërtetim. Elementet h dhe λh janë $\mathcal{L}_p$-ekuivalentë, prandaj ekziston një translacion i majtë i pranueshëm λ_1 i tillë që $h = \lambda_1(\lambda h)$. Kështu, në sajë të pohimit 3.2.7 pasqyrimet

$$f: H_p(h) \xrightarrow[x \to \lambda x]{} H_p(\lambda h),\ g: H_p(\lambda h) \xrightarrow[y \to \lambda_1 y]{} H_p(h)$$

janë pasqyrime bijektive dhe rrjedhimisht kemi barazimin

$$H_p(h) = f\left(H_p(h)\right) = \lambda H_p(h).$$

Barazimi tjetër $H_p(h) = H_p(h)\rho$ rrjedh njëlloj nga pohimi 3.2.8.■

Tani i kemi të gjitha mjetet për të vërtetuar për relacionin e përgjithësuar të Green-it një teoremë analoge me Teoremën e Green-it për gjysmëgrupet dhe me Teoremën e Green-it për unazat, të cilën do ta quajmë Teorema e Green-it për relacionin e përgjithësuar $\mathcal{H}_p$.

Teoremë 3.2.12. (***Teorema e Green-it për relacionin e përgjithësuar $\mathcal{H}_p$***) *Në qoftë se elementet a, b dhe ab të unazës $(A, +, \cdot)$ i përkasin të njëjtës $\mathcal{H}_p$-klasë $H_p(a)$ të A-së, atëherë $H_p(a)$ është një nëngrup i gjysmëgrupit të shumëzimit $(A, \cdot)$ të unazës $(A, +, \cdot)$.*

Vërtetim. Translacionin e brendshëm të djathtë $\rho_{(0,b)}$, i cili siç dihet është i pranueshëm, e shënojmë thjeshtë ρ.

Meqë $ab = a\rho$, elementet a dhe $a\rho$ janë $\mathcal{H}_p$-ekuivalente, prandaj në sajë të lemës 2.3.11 kemi:

$$H_p(h)b = H_p(h)\rho = H_p(h).$$

Le të jenë c dhe d dy elemente çfarëdo të $H_p(h)$. Meqë

$$cb \in H_p(h)b = H_p(h),$$

elementet b dhe cb i përkasin të njëjtës $\mathcal{H}_p$-klasë $H_p(h)$ prandaj njëlloj si më sipër bindemi se $cH_p(h) = H_p(h)$. Kështu, elementi cb i përket $H_p(h)$ dhe rrjedhimisht bashkësia $H_p(h)$ është një nëngrup i gjysmëgrupit të shumëzimit $(A, \cdot)$ të unazës $(A, +, \cdot)$. Përsëri duke përdorur lemën 2.3.11 përftojmë edhe barazimin $H_p(h)d = H_p(h)$. Nga barazimet

$$cH_p(h) = H_p(h) \text{ dhe } H_p(h)d = H_p(h)$$

për çdo dy elemente c, d të $H_p(h)$ rrjedh se $\mathcal{H}_p$-klasa $H_p(h)$ është një nëngrup i gjysmëgrupit të shumëzimit $(A, \cdot)$ të unazës $(A, +, \cdot)$. ■

Nga Teorema e Green-it për relacionin e përgjithësuar marrim menjëherë këto dy rrjedhime:

Rrjedhim 3.2.13. *Në qoftë se një $\mathcal{H}_p$-klasë e një unaze $(A,+,\cdot)$ përmban një element a të tillë që $a^n = a$ për $n \geq 2$, atëherë $H_p(a)$ është nëngrup i gjysmëgrupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$.*

Rrjedhim 3.2.14. *Çdo $\mathcal{H}_p$-klasë e një unaze nuk mund të përmbajë më shumë se një element idempotent.*

Edhe për relacionin e përgjithësuar të Green-it $\mathcal{Q}_p$ është e vërtetë teorema e mëposhtme e cila ngjan me Teoremën e Green-it për relacionin e përgjithësuar $\mathcal{H}_p$ dhe që ne do ta quajmë Teorema e Green-it për relacionin e përgjithësuar $\mathcal{Q}_p$.

Teoremë 3.2.15. (***Teorema e Green-it për relacionin e përgjithësuar $\mathcal{Q}_p$***). *Në qoftë se elementet a, b dhe ab të unazës $(A,+,\cdot)$ i përkasin të njëjtës $\mathcal{Q}_p$-klasë $Q_p(a)$ të A-së, atëherë $Q_p(a)$ është një nëngrup i gjysmëgrupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$.*

Vërtetim. Meqë siç duket qartë $Q_p(a) \subseteq H_p(a)$, elementet a, b dhe ab i përkasin të njëjtës $\mathcal{H}_p$-klasë $H_p(a)$ të A-së. Kështu, nga Teorema e Green-it për relacionin e përgjithësuar $\mathcal{H}_p$ kemi që $H_p(a)$ është një nëngrup i gjysmëgrupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$.

Le të jetë x një element çfarëdo i $H_p(a)$. Meqë $H_p(a)$ është nëngrup, ekzistojnë elementet y_1, y_2, y_3, y_4 të $H_p(a)$ të tilla që janë të vërteta barazimet:

$$x = ay_1 = y_2a, a = xy_3 = y_4x,$$

të cilat tregojnë se

$$(x)_{l_p} = (a)_{l_p} \text{ dhe } (x)_{r_p} = (a)_{r_p.}$$

Kështu, është e vërtetë përfshirja $H_p(a) \subseteq Q_p(a)$ e cila së bashku me përfshirjen e qartë $Q_p(a) \subseteq H_p(a)$ na japin barazimin $Q_p(a) = H_p(a)$. Pra, $\mathcal{Q}_p$-klasa $Q_p(a)$ është një nëngrup i gjysmëgrupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$. ■

Përkufizim 3.2.16. *Kuazi-ideal i përgjithësuar $\mathcal{Q}_p$ i një unaze A quhet minimal në qoftë se ai nuk përmban kuazi-ideale të përgjithësuara të mirëfillta domethënë të ndryshëm nga* 0 *dhe A.*

Me anë të Teoremës së Green-it për relacionin e përgjithësuar $\mathcal{Q}_p$ mund të vërtetojmë thejsht një teoremë për kuazi-idealin e përgjithësuar minimal të një unaze e cila është analoge me teoremën për kuazi-idealin e zakonshëm të një unaze që te [5] është vërtetuar gjatë në rrugë direkte, kurse te [7] është vërtetuar shkurt duke përdorur Teoremën e Green-it për relacionin e zakonshëm $\mathcal{Q}$ të barazimit të kuazi-idealeve kryesore të një unaze.

Teoremë 3.2.17. *Një kuazi-ideal i përgjithësuar $\mathcal{Q}_p$ i një unaze $(A,+,\cdot)$ është ose një nënunazë me shumëzim zero e A-së ose një nënunazë me pjesëtim e A-së. Në rastin e dytë kemi*

$$\mathcal{Q}_p = eAe = eA \cap Ae,$$

ku e është njëshi i $\mathcal{Q}_p$ dhe rrjedhimisht kuazi-ideali i përgjithësuar minimal është një kuazi-ideal minimal i zakonshëm i unazës $(A,+,\cdot)$.

Vërtetim. Supozojmë se $\mathcal{Q}_p$ nuk është nënunazë me shumëzim zero e A-së. Meqë $\mathcal{Q}_p$ është kuazi-ideal i përgjithësuar minimal, atëherë është e qartë se $\mathcal{Q}_p\backslash 0$ është një $\mathcal{Q}_p$-klasë. Në këtë rast ekzistojnë elementet a, b të $\mathcal{Q}_p$ të tillë që $ab \neq 0$ dhe kemi barazimet:

$$(a)_{q_p} = (b)_{q_p} = (ab)_{q_p}.$$

Kështu, elementet a, b, ab janë të tre në të njëjtën $\mathcal{Q}_p$-klasë $\mathcal{Q}_p\backslash 0$ të A-së dhe në sajë të Teoremës së Green-it për relacionin e përgjithësuar $\mathcal{Q}_p$ (teorema 3.2.14) $\mathcal{Q}_p\backslash 0$ është një nëngrup i grupit të shumëzimit $(A,\cdot)$ të unazës $(A,+,\cdot)$. Prandaj në këtë rast kuazi-ideali i përgjithësuar minimal $\mathcal{Q}_p$ është një nënunazë me pjesëtim e unazës $(A,+,\cdot)$.

Në rastin e dytë po të shënojmë me e njëshin e $\mathcal{Q}_p$ për çdo translacion të majtë të pranueshëm λ dhe për çdo translacion të djathtë të pranueshëm ρ janë të vërteta barazimet:

$$\lambda e = \lambda(ee) = (\lambda e)e = \lambda_{(0,\lambda e)}e,$$

$$e\rho = (ee)\rho = e(e\rho) = e\rho_{(0,e\rho)}.$$

Nga këto barazime kemi:

$$(e)_{q_p} = e\mathrm{P} \cap \Lambda e = e\mathrm{P}_b \cap \Lambda_b e = eA \cap Ae = eAe.$$

Kështu, $(e)_{q_p}$ nuk është gjë tjetër veçse kuazi-ideal minimal

$$(e)_q = eA \cap Ae = eAe. \blacksquare$$

Në mbyllje të këtij kapitulli po karakterizojmë relacionin e përgjithësuar të Green-it $\mathcal{D}_p$ pa përdorur elementin e ndërmjetëm. Për këtë së pari japim konceptet e A-izomorfizmit fortësisht majtas të dy idealeve të majta të përgjithësuara dhe atë të A-izomorfizmit fortësisht djathtas të dy idealeve të përgjithësuara të djathta.

Përkufizim 3.2.18. A-izomorfizëm fortësisht majtas të idealit të majtë të përgjithësuar L_p në idealin e majtë të përgjithësuar L'_p të unazës A do të quajmë çdo pasqyrim bijektiv $\varphi: L_p \longrightarrow L'_p$ të tillë që:

1) $\forall(a,b) \in {L_p}^2, \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.
2) $\forall(a,\lambda) \in L_p \times \Lambda, \varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$.
3) $\forall a \in L_p, \varphi(a) \in a\mathrm{P}$.
4) $\forall a' \in L'_p, \varphi^{-1}(a') \in a'\mathrm{P}$.

Përkufizim 3.2.19. *A-izomorfizëm fortësisht djathtas të idealit të djathtë të përgjithësuar R_p në idealin e djathtë të përgjithësuar R'_p të unazës A do të quajmë çdo pasqyrim bijektiv $\psi: R_p \longrightarrow R'_p$ të tillë që:*

1) $\forall(a,b) \in {R_p}^2, \psi(a+b) = \psi(a) + \psi(b)$.

2) $\forall(a,\rho) \in R_p \times \mathrm{P}, \psi(a\rho) = \psi(a)\rho.$
3) $\forall a \in R_p, \psi(a) \in a\Lambda.$
4) $\forall a' \in R'_p, \psi^{-1}(a') \in a'\Lambda.$

Nuk është vështirë të bindemi se kur $\varphi[\psi]$ është A-izomorfizëm fortësisht majtas [djathtas] i idealit të majtë [të djathtë] të përgjithësuar $L_p[R_p]$ në idealin e majtë [të djathtë] të përgjithësuar $L'_p[R'_p]$ të unazës A atëherë $\varphi^{-1}[\psi^{-1}]$ është A-izomorfizëm fortësisht majtas [djathtas] i idealit të majtë [të djathtë] të përgjithësuar$L'_p[R'_p]$ në idealin e majtë [të djathtë] të përgjithësuar $L_p[R_p]$ të unazës A. Kështu, që mund të themi thjesht se dy ideale të majta [të djathta] të përgjithësuara $L_pL'_p[R_p, R'_p]$ janë A-izomorfë fortësisht majtas [djathtas] kur ekziston një A-izomorfizëm fortësisht majtas [djathtas] i njërit tek tjetri.

Teoremë 3.2.20. *Elementet a dhe b të unazës A janë $\mathcal{D}_p$-ekuivalentë atëherë dhe vetëm atëherë kur $(a)_{l_p}\left[(a)_{r_p}\right]$ dhe $(b)_{l_p}\left[b_{r_p}\right]$ janë A-izomorfe fortësisht majtas* [*djathtas*].

Vërtetim. Ne do ta bëjmë vërtetimin për idealet e majta të përgjithësuara kryesore $(a)_{l_p}$ dhe $(b)_{l_p}$. Vërtetimi bëhet në mënyrë të ngjashme për idealet e djathta të përgjithësuara kryesore $(a)_{r_p}$ dhe $(b)_{r_p}$. Supozojmë se $a\mathcal{D}_p b$, atëherë ekziston një elemenet $c \in A$ i tillë që $a\mathcal{L}_p c$ dhe $c\mathcal{R}_p b$. Pra, ekzistojnë translacionet e majta të pranueshme λ_1, λ_2 dhe translacionet e djathta të pranueshme ρ_1, ρ_2 të tillë që:

$$c = \lambda_1 a,\ a = \lambda_2 c,\ b = c\rho_1,\ c = b\rho_2. \qquad (1)$$

Në sajë të Lemës së Green-it për relacionin e përgjithësuar $\mathcal{L}_p$ pasqyrimet:

$$\varphi:(a)_{r_p} \xrightarrow[x\mapsto\lambda_1 x]{} (c)_{r_p},\ \ \psi:(c)_{r_p} \xrightarrow[y\mapsto\lambda_2 y]{} (a)_{r_p}$$

janë të anasjellë të njëri-tjetrit.

Po ashtu, në sajë të Lemës së Green-it për relacionin e përgjithësuar të Green-it $\mathcal{R}_p$pasqyrimet:

$$\phi':(c)_{l_p} \xrightarrow[x\mapsto x\rho_1]{} (b)_{l_p}, \psi':(b)_{l_p} \xrightarrow[y\mapsto y\rho_2]{} (c)_{l_p}$$

janë të anasjellë të njëri-tjetrit.

Shënojmë $d = a\rho_1$. Meqë ψ' është i anasjellë i ϕ' kemi $a = d\rho_2$.

Nga (1) kemi:

$$\lambda_1 d = \lambda_1(a\rho_1) = (\lambda_1 a)\rho_1 = c\rho_1 = b.$$

Pra, $b = \lambda_1 d$ dhe meqë ψ është i anasjellë i φ është i vërtetë barazimi $d = \lambda_2 b$. Kështu, janë të vërteta barazimet:

$$d = a\rho_1,\ a = d\rho_2,\ b = \lambda_1 d,\ d = \lambda_2 b.\ (2)$$

Shënojmë:

$$f:(a)_{l_p} \xrightarrow[\lambda a \mapsto \lambda d]{} (b)_{l_p},\ g:(b)_{l_p} \xrightarrow[\lambda b \mapsto \lambda c]{} (a)_{l_p}.$$

Pasqyrimet f dhe g janë të përcaktuar korektësisht sepse nga (1) dhe (2) kemi:

$$\lambda d = \lambda(\lambda_2 b) \in (b)_{l_p},$$

$$\lambda c = \lambda(\lambda_1 a) \in (a)_{l_p}.$$

Tani për çdo $\lambda \in \Lambda$ janë të vërteta barazimet:

$$(g \circ f)(\lambda a) = g\big(f(\lambda a)\big) = g(\lambda d) = g\big(\lambda(\lambda_2 b)\big) = \lambda(\lambda_2 c) = \lambda a,$$

$$(f \circ g)(\lambda b) = f\big(g(\lambda b)\big) = f(\lambda e) = f\big(\lambda(\lambda_1 a)\big) = \lambda(\lambda_1 d) = \lambda b,$$

që garantojnë se pasqyrimet f dhe g janë bijeksione dhe $g = f^{-1}$.

Për më tepër kemi:

$$\forall \lambda \in \Lambda, f(\lambda a) = \lambda d = \lambda f(a),$$

$$f(a) = d = a\rho_1 \in a\mathrm{P},$$

$$f^{-1}(b) = g(b) = c = b\rho_2 \in b\mathrm{P}$$

dhe rrjedhimisht pasqyrimi f është një A-izomorfizëm fortësisht majtas i $(a)_{l_r}$ në $(b)_{l_r}$. Pra, idealet e majta të përgjithësuara $(a)_{l_r}$ dhe $(b)_{l_r}$ janë A-izomorfë fortësisht majtas.

Anasjellas, le të jetë φ një A-izomorfizëm fortësisht majtas i $(a)_{l_p}$ në $(b)_{l_p}$. Shënojmë $\phi(a) = c$. Nga përkufizimi i A-izomorfizmit fortësisht majtas ekzistojnë translacionet e majta të pranueshme $\lambda_1,\ \lambda_2$ dhe translacionet e djathta të pranueshme $\rho_1,\ \rho_2$ të tillë që:

$$c = \lambda_1 b = a\rho_1 \text{ dhe } \varphi^{-1}(b) = \lambda_2 a = b\rho_2.$$

Që këtej, në sajë të përkufizimit 3.2.18 janë të vërteta barazimet:

$$c = \lambda_1 b, b = \varphi(\lambda_2 a) = \lambda_2 \varphi(a) = \lambda_2 c,$$

të cilat tregojnë se $c\mathcal{L}_p b$.

Nga ana tjetër kemi barazimet:

$$c = a\rho_{1,} a = \varphi^{-1}(c) = \varphi^{-1}(\lambda_1 b) = \lambda_1 \varphi^{-1}(b) = \lambda_1(b\rho_2) = (\lambda_1 b)\rho_2 = c\rho_2$$

nga të cilët rrjedh se $a\mathcal{R}_p c$. Kështu, kemi $a\mathcal{D}_p b$.■

Në qoftë se tek përkufizimet 3.2.18 [3.2.19] në vend të idealeve të përgjithësuara të majta marrim idealet e majta dhe në vend të bashkësisë së translacioneve të majta [të djathta] të pranueshmeΛ[P] marrim bashkësinë e translacioneve të majta [të djathta] të brendshme $\Lambda_b[\mathrm{P}_b]$, atëherë kemi përkufizimin e A-izomorfizmit fortësisht majtas [djathtas] të një ideali të majtë [të djathtë] në një ideal të majtë [të djathtë] të një unaze.

Vëmë re se në rastin e idealeve të zakonshme të majta [të djathta] L, L' $[R, R']$ të një unaze A, A-izomorfizmat fortësisht majtas [djathtas] së pari janë A-izomorfizma të zakonshme të $L[R]$ në L' $[R']$. Kështu, për shembull, përkufizimi i A-izomorfizmit fortësisht të majtë të idealit L në idealin L' mund të jepet thjesht:

A-izomorfizëm fortësisht i majtë i idealit L në idealin L' quhet çdo A-izomorfizëm φ i A-modulit të majtë L në A-modulin e majtë L' i tillë që:

$$\forall a \in L, \varphi(a) \in a\mathrm{P} \text{ dhe } \forall a' \in L', \varphi^{-1}(a') \in a'\mathrm{P}.$$

Pikërisht, kjo gjë përligj në një farë mase përdorimin e termit A-izomorfizëm edhe në rastin e idealeve të përgjithësuara të majta apo të djathta.

Më tej të njëjtën mënyrë si vërtetimi i teoremës 3.2.20, duke përdorur translacionet e djathta të brendshme vërtetojmë teoremën e mëposhtme e cila te [16] është provuar në mënyrë direkte:

Teoremë 3.2.21. *Elementet a dhe b të unazës A janë $\mathcal{D}$-ekuivalente atëherë dhe vetëm atëherë kur idealet e majta* [*të djathta*] *kryesore a_l $[a_r]$ dhe b_l $[b_r]$ janë A-izomorfë fortësisht majtas* [*djathtas*].

Nga teoremat 3.2.20 dhe 3.2.21 kemi përkufizime ekuivalente të relacionit të përgjithësuar (të zakonshëm) $\mathcal{D}_p$ $(\mathcal{D})$ në një unazë pikërisht:

Relacion i përgjithësuar (i zakonshëm) në unazën A quhet relacioni $\mathcal{D}_p$ $(\mathcal{D})$ i tillë që dy elemente çfarëdo a, b të A janë $\mathcal{D}_p$ $(\mathcal{D})$ ekuivalentë vetëm në qoftë se idealet e majta [të djathta] të përgjithësuara $(a)_{l_p}$, $(b)_{l_p}$, $\left[(a)_{r_p}, (b)_{r_p}\right]$ (idealet e majta [të djathta] të zakonshme, $(a)_l$, $(b)_l$, $[(a)_r, (b)_r]$) janë A-izomorfe fortësisht majtas [djathtas].

KAPITULLI IV

Γ-UNAZAT E DOBËTA DHE RELACIONET E GREEN-IT NË TO

Në këtë kapitull së pari do të përgjithësojmë në mënyrë të natyrshme Γ-unazat, të cilat nga ana e tyre janë një përgjithësim i atyre që tashmë njihen si Γ-unazat e Nabusawa-së. Γ-unazat e dobëta lidhen me Γ-gjysmëgrupet duke reflektuar lidhjen e unazave të zakonshme me gjysmëgrupet. Kjo gjë lejon që të vendoset një urëkalim më e fuqishme ndërmjet tyre dhe Γ-gjysmëgrupeve. Më tej futen konceptet e Γ-unazës së dobët me pjesëtim dhe Γ-fushat e dobëta si dhe studiohen ato duke përdorur konceptet e idealeve, idealeve të njëanshme dhe kuazi-idealeve. Një nga pikësynimet kryesore të këtij kapitulli është pajisja e Γ-unazave të dobëta me relacionet e Green-it që tashmë janë futur dhe studiuar në Γ-gjysmëgrupet dhe shtrihen një varg rezultatesh për relacionet e Green-it në Γ-gjysmëgrupet dhe në unazat e zakonshme. Ato shërbejnë si mjete efikase për të zgjidhur në mënyrë komode disa probleme që lidhen me Γ-unazat e dobëta dhe që pa përdorimin e tyre do të ishte e vështirë zgjidhja e tyre.

§ 1. Γ-UNAZAT E DOBËTA DHE Γ-UNAZAT E DOBËTA ME PJESËTIM.

Duke mbajtur në mëndje që bashkekzistenca e Γ-unazave më të përgjithëshme me Γ-gjysmëgrupet t'i ngjasojë bashkëekzistencës së unazave të zakonshme me gjysmëgrupet e zakonshme që lejon difuzimin e teorive përkatëse po dobësojmë përkufizimin e Γ-unazave të dhënë nga Barnes-i duke futur kështu ato që ne do ti quajmë Γ-unazat e dobëta (Ne do të dëshironim që këto që ne po përkufizojmë të quheshin thjesht Γ-unaza dhe ato të përkufizuar nga Barnes të emërtoheshin Γ-unazat e Barnesit, kurse ato që ka futur Nabusawa të titulloheshin Γ-unazat e Nabusawa-së!)

Përkufizim 4.1.1. *Γ-unazë e dobët quhet çdo treshe e radhitur $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$, ku M dhe Γ janë dy bashkësi jo boshe, $+$ është mbledhja në M, $(\cdot)_\Gamma$ është një Γ-shumëzim në M të tillë që*:

1) $(M,+)$ *është grup abelian.*
2) $(M,(\cdot)_\Gamma)$ *është Γ-gjysmëgrup.*
3) $\forall(a,b,c,\gamma)\in M^3\times\Gamma,\ a\gamma(b+c)=a\gamma b+a\gamma c$ *dhe* $(a+b)\gamma c=a\gamma c+b\gamma c.$

Sipas këtij përkufizimi është e qartë se çdo Γ-unazë e Nabusawa-së dhe çdo Γ-unazë e Barnes-it janë Γ-unaza të dobëta. Unazat e zakonshme, unazat ternare të Hestenes-it [29], unazat ternare [30], unazat kubike të cilat janë Γ-unaza të Nabusawa-së janë gjithashtu Γ-unaza të dobëta dhe këto të fundit janë Γ-gati-unaza [27], [28], të cilat kanë nxitur këtë përkufizim. Por ne do të ndërtojmë Γ-unaza të dobëta, të cilat nuk janë Γ-unaza dhe rrjedhimisht nuk janë as Γ-unaza të Nabusawa-së. Si fillim këtë gjë e ilustron ky shembull.

Shembull 4.1.2 .Le të jetë M bashkësia e matricave me $m\times n$ përmasa mbi një fushë F dhe Γ një bashkësi joboshe $n\times m$ matricash përsëri mbi fushën F. Përcaktojmë në M një Γ-shumëzim $(\cdot)_\Gamma$ me anë të produktit $A\cdot C\cdot B$ për çdo dy matrica A, B nga M-ja dhe për çdo matricë C nga Γ. Me llogaritje të thjeshta bindemi se treshja e radhitur $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$, ku $+$ është mbledhja e zakonshme e matricave nga M-ja, është një Γ-unazë e dobët. Kjo Γ-unazë e dobët nuk është një Γ-unazë e Barnes-it, rrjedhimisht as Γ-unazë e Nabusawa-së, meqë në përgjithësi marrim si Γ një bashkësi joboshe $n\times m$

matricash me elementë nga fusha F, e cila nuk është detyrimisht një nënunazë e unazës së zakonshme të $n \times m$ matricave.

Le të jetë M një Γ-unazë e dobët dhe A, B dy nënbashkësi jo boshe të M-së. Përcaktojmë $A + B$ si bashkësi të shumave $a + b$, ku $a \in A$ dhe $b \in B$, të cilën e quajmë shumë të bashkësive A dhe B. Gjithashtu përcaktojmë:

$$A\Gamma B = \{\sum_{i=1}^{n} a_i \gamma_i b_i \in M \mid a_i \in A, b_i \in B, \gamma_i \in \Gamma, n \in \mathbb{N}\}.$$

Për thjeshtësi për çdo $a \in M$ dhe çdo $\gamma \in \Gamma$ shkruajmë:

$$M\gamma a = \{m\gamma a \in M \mid m \in M\},$$

$$a\gamma M = \{a\gamma m \in M \mid m \in M\}.$$

Përkufizim 4.1.3. *Ideal i djathtë* [*i majtë*] *i Γ-unazës së dobët $(M, +, (\cdot)_\Gamma)$ quhet çdo nëngrup R $[L]$ i grupit $(M, +)$ i tillë që*

$$R\Gamma M \subseteq R \ [M\Gamma L \subseteq L].$$

Përkufizim 4.1.4. *Ideal i një Γ-unaze të dobët $(M, +, (\cdot)_\Gamma)$ quhet çdo nëngrup I i grupit $(M, +)$ i tillë që*

$$I\Gamma M \subseteq M \text{ dhe } M\Gamma I \subseteq I.$$

Pra, I është ideal i Γ-unazës së dobët M vetëm atëherë kur ai është njëherësh ideal i majtë dhe ideal i djathtë i M-së.

Përkufizim 4.1.5. *Kuazi-ideal i një Γ-unaze të dobët $(M, +, (\cdot)_\Gamma)$ quhet çdo nëngrup Q i grupit $(M, +)$ i tillë që*

$$Q\Gamma M \cap M\Gamma Q \subseteq Q.$$

Prerja e të gjitha idealeve [idealeve të djathta, idealeve të majta, kuazi-idealeve] të Γ-unazës së dobët M që përmbajnë elementin $a \in M$ është ideal [ideal i djathtë, ideal i majtë, kuazi-ideal] i M-së i cili shënohet (a) $\left[(a)_r, (a)_l, (a)_q\right]$ dhe quhet ideal [ideal i djathtë, ideal i majtë, kuazi-ideal] kryesor i M-së i përftuar nga elementi a.

Nuk është e vështirë të bindemi për vërtetësinë e këtyre pohimeve:

Pohim 4.1.6. *Për çdo element m të Γ-unazës së dobët M dhe për çdo $\gamma \in \Gamma$, bashkësia $m\gamma M$ $[M\gamma m, m\gamma M \cap M\gamma m]$ është ideal i djathtë* [*ideal i majtë, kuazi-ideal*] *i M-së.*

Pohim 4.1.7. *Për çdo element a të Γ-unazës së dobët $(M, +, (\cdot)_\Gamma)$ janë të vërteta barazimet*:

(4.1.1) $$(a)_l = \mathbb{Z}a + M\Gamma a,$$

(4.1.2) $$(a)_r = \mathbb{Z}a + a\Gamma M,$$

(4.1.3) $$(a)_q = \mathbb{Z}a + a\Gamma M \cap M\Gamma a,$$

(4.1.4) $$(a) = \mathbb{Z}a + +a\Gamma M + M\Gamma a + M\Gamma a\Gamma M.$$

Përkufizim 4.1.8. *Le të jetë $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$ një Γ-unazë e dobët. Për një $\gamma \in \Gamma$ elementi $a \in M$ quhet γ-i thjeshtueshëm majtas* [*djathtas*] *në qoftë se për çdo dy elemente b, c të M-së kemi*:

$$(a\gamma b = a\gamma c) \Longrightarrow b = c.$$

$$[(b\gamma a = c\gamma a) \Longrightarrow b = c].$$

Elementi $a \in M$ i cili është njëherësh γ-i thjeshtueshëm majtas dhe γ-i thjeshtueshëm djathtas quhet element γ-i thjeshtueshëm.

Le të jetë $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$ një Γ-unazë e dobët dhe γ një element i fiksuar i Γ. Përcaktojmë në M veprimin $\circ_\gamma$ me anë të barazimit

$$a \circ_\gamma b = a\gamma b$$

për çdo dy elemente a, b të M-së. Është e qartë se $(M,+,\circ_\gamma)$ është një unazë, që e shënojmë thjesht M_γ. Në përgjithësi, në qoftë se për një $\gamma \in \Gamma$ unaza $(M,+,\circ_\gamma)$ është unazë me pjesëtim, atëherë jo për çdo $\gamma \in \Gamma$ unaza $(M,+,\circ_\gamma)$ është unazë me pjesëtim. Për këtë shërben shembulli i mëposhtëm:

Shembull 4.1.9. Le të jetë $(H,+)$ grupi i mbledhjes i kuaternioneve dhe $\Gamma = H$. Është e lehtë të tregohet që, në qoftë se $(\cdot)_\Gamma$ është një Γ-shumëzim në H i tillë që për çdo dy elemente a, b të H-së dhe për çdo element $\gamma \in H\backslash\{1\}$, $a\gamma b$ është prodhimi i zakonshëm i kuaternioneve a, γ, b kurse për $\gamma = 1$ $a\gamma b = 0$, atëherë $(H,+,(\cdot)_\Gamma)$ është një Γ-unazë e dobët. Është e qartë se për çdo $\gamma \in \Gamma\backslash\{0,1\}$ unaza H_γ është unazë me pjesëtim, kurse për $\gamma = 0$ dhe $\gamma = 1$ unazat H_0 dhe H_1 nuk janë unaza me pjesëtim.

Përkufizim 4.1.10. *Le të jetë $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$ një Γ-unazë e dobët. Elementi $\gamma \in \Gamma$, quhet Γ-zero në qoftë se për çdo dy elemente a, b të M-së kemi $a\gamma b = 0$.*

Në Γ-unazën e dobët $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$ bashkësinë e elementeve të Γ që nuk janë Γ-zero do ta shënojmë Γ_0. Për Γ-unazën e dobët $(H,+,(\cdot)_\Gamma)$ të shembullit 4.1.9 kemi $\Gamma_0 = \Gamma\backslash\{0,1\}$. Shembulli 4.1.9 tregon se ka Γ-unaza të dobëta në të cilat kemi Γ-zero dhe për më tepër mund të kemi më shumë se një Γ-zero.

Në qoftë se një Γ-unazë e dobët është Γ-unazë e Nabusawa-së, atëherë nga kushti 3) i përkufizimit 1.2.1 rrjedh se ajo ka vetëm një Γ-zero, pikërisht zeron e grupit abelian. Barnes e ka mënjanuar kushtin 3) që plotëson një Γ-unazë e Nabusawa-së nga përkufizimi 1.2.1 i Γ-unazës. Shembulli i mëposhtëm tregon se në përgjithësi në një Γ-unazë të dobët mund të kemi më tepër se një Γ-zero, madje një pafundësi Γ-zerosh.

Shembull 4.1.11. Shënojmë:

$$M = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R}\right\} \text{ dhe } \Gamma = \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, b, c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Këto dy bashkësi janë pjesë të qëndrueshme të bashkësisë së matricave të rendit dy me elemente reale dhe formojnë grupe abeliane në lidhje me mbledhjet e induktuara në to. Me llogaritje të thjeshta tregohet që, në qoftë se $(\cdot)_\Gamma$ është Γ-shumëzim në M i

tillë që për çdo element $\gamma \in \Gamma$, $A\gamma B$ është prodhimi i zakonshëm i matricave A, γ, B, atëherë $(M, +, (\cdot)_\Gamma)$ është një Γ-unazë e dobët dhe se për këtë Γ-unazë të dobët kemi:

$$\Gamma_0 = \Gamma \backslash \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Kështu, Γ-unaza e dobët M ka një pafundësi Γ-zerosh.

Përkufizim 4.1.12. *Një Γ-unazë e dobët $(M, +, (\cdot)_\Gamma)$ quhet Γ-unazë e dobët me pjesëtim në qoftë se $\Gamma_0 \neq \phi$ dhe për çdo element $\gamma \in \Gamma_0$ unaza $(M, +, \circ_\gamma)$ është unazë me pjesëtim.*

Për çdo unazë me pjesëtim $(M, +, \cdot)$, për shembull për unazën me pjesëtim të kuaternioneve, dhe për çdo bashkësi Γ elementesh të M të cilët janë të ndryshëm nga zero mund të përftojmë një Γ-unazë të dobët me pjesëtim. Vërtet, përcaktojmë Γ-shumëzimin në M të tillë që për çdo $\gamma \in \Gamma$ dhe çdo dy elemente a, b të M, $a\gamma b$ është prodhimi i elementeve a, γ, b të unazës me pjesëtim $(M, +, \cdot)$. Është e lehtë të tregohet se $(M, +, (\cdot)_\Gamma)$, ku $+$ është mbledhja e unazës me pjesëtim $(M, +, \cdot)$, është Γ-unazë e dobët dhe për çdo $\gamma \in \Gamma$, $(M, +, \circ_\gamma)$ është unazë me pjesëtim.

Është e qartë se Γ-unaza e dobët e shembullit 4.1.9, $(H, +, (\cdot)_\Gamma)$ është një Γ-unazë e dobët me pjesëtim.

Gjithashtu Γ-unaza e dobët e shembullit 4.1.11, $(M, +, (\cdot)_\Gamma)$ është Γ-unazë e dobët me pjesëtim sepse për çdo $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$ që i përket Γ_0, domethënë $c \neq 0$, unaza $(M, +, \circ_\gamma)$ është unazë me pjesëtim meqë matrica $I_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 \end{pmatrix}$ është njësh i kësaj unaze kurse për matricën $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ matrica $\begin{pmatrix} \frac{1}{ac^2} & 0 \\ \frac{1}{ac^2} & 0 \end{pmatrix} \in M$ është e anasjellë e matricës A

Duke përdorur përkufizimin 4.1.10 dhe pohimin 1.1.14 është e lehtë të vërtetohen këto dy pohime:

Pohim 4.1.13. *Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që një Γ-unazë e dobët $(M, +, (\cdot)_\Gamma)$, e cila ka të paktën dy elemente, dhe $\Gamma_0 \neq \phi$ të jetë një Γ-unazë e dobët me pjesëtim është*

$$\forall (m, \gamma) \in M^* \times \Gamma_0, m\gamma M = M,$$

ku $M^* = M \backslash 0$.

Pohim 4.1.14. *Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që një Γ-unazë e dobët $(M, +, (\cdot)_\Gamma)$, e cila ka të paktën dy elemente, dhe $\Gamma_0 \neq \phi$ të jetë një Γ-unazë e dobët me pjesëtim është*

$$\forall (m, \gamma) \in M^* \times \Gamma_0, M\gamma m = M,$$

ku $M^* = M \backslash 0$.

Nga dy pohimet e mësipërme marrim dy përkufizime ekuivalente të Γ–unazës së dobët me pjesëtim. Pikërisht:

Një Γ-unazë e dobët $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$ quhet Γ-unazë e dobët me pjesëtim në qoftë se ka të paktën dy elemente, $\Gamma_0 \neq \phi$ dhe për çdo element $m \in M^* = M\backslash 0$ dhe për çdo element $\gamma \in \Gamma_0$, $m\gamma M = M$ $[M\gamma m = M]$.

Le të jetë $(M,(\cdot)_\Gamma)$ një Γ-grup, M_1 një nënbashkësi e M dhe Γ_1 një nënbashkësi e Γ. Shënojmë

$$M_1\Gamma_1 M_1 = \{a\gamma b \in M | a \in M_1, b \in M_1, \gamma \in \Gamma_1\}.$$

Në qoftë se $M_1\Gamma_1 M_1 \subseteq M_1$, atëherë në M_1 mund të përcaktojmë një Γ_1-shumëzim duke i bashkuar çdo tresheje të radhitur (a_1,γ_1,b_1) elementin $a_1\gamma_1 b_1$ të M_1 të llogaritur sipas Γ-shumëzimit në M. Këtë Γ_1-shumëzim në M_1 do ta quajmë Γ_1-shumëzim të induktuar në M_1 nga Γ-shumëzimi $(\cdot)_\Gamma$ në M sipas Γ_1.

Tani mund të zbulojmë lidhjen e natyrshme të Γ-unazave të dobëta me pjesëtim dhe Γ-grupeve që imiton lidhjen ndërmjet unazave të zakonshme me pjesëtim dhe grupeve të zakonshme. Pikërisht, nuk është vështirë të vërtetohet pohimi i mëposhtëm, i cili tregon një tjetër kusht të nevojshëm dhe të mjaftueshëm që një Γ-unazë e dobët të jetë Γ-unazë e dobët me pjesëtim dhe që prej tij rrjedh një tjetër përkufizim ekuivalent me përkufizimin e Γ-unazës së dobët me pjesëtim.

Pohim 4.1.15. *Një Γ–unazë e dobët $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$ është Γ–unazë e dobët me pjesëtim atëherë dhe vetëm atëherë kur ka të paktën dy elemente, $\Gamma_0 \neq \phi$ dhe është e tillë që $M^*\Gamma_0 M^* \subseteq M^*$, ku $M^* = M\backslash 0$, dhe $\left(M^*,(\cdot)_{\Gamma_0}\right)$, ku $(\cdot)_{\Gamma_0}$ është Γ_0-shumëzim i induktuar në M^* nga Γ-shumëzimi në M sipas Γ_0, është Γ_0-grup.*

Vëmë re se në rastin kur një Γ–unazë e dobët është Γ–unazë, atëherë përkufizimi 4.1.10 i Γ–unazës së dobët me pjesëtim përputhet me përkufizimin 1.2.4 të Γ–unazës me pjesëtim vetëm kur $\Gamma_0 = \Gamma\backslash\{0\}$. Γ–unazat e shembujeve 4.1.9 dhe 4.1.11 janë Γ–unaza të dobëta me pjesëtim por ato nuk janë Γ–unaza me pjesëtim sepse për to kemi $\Gamma_0 \neq \Gamma\backslash\{0\}$. Pra koncepti i Γ–unazës së dobët me pjesëtim është «më i gjerë» se koncepti i Γ–unazës me pjesëtim. Është e qartë se kur një Γ–unazë e dobët është Γ–unazë e Nabuswa-së, atëherë koncepti i Γ–unazës së dobët me pjesëtim përputhet me konceptin e Γ–unazës me pjesëtim.

Pohimi 4.1.15 na ndihmon të gjejmë të gjitha Γ–unazat e dobëta të tilla që për secilën prej tyre të kemi një pohim që ngjason me pohimin 1.2.6. Pikërisht kemi këtë pohim:

Pohim 4.1.16. *Le të jetë $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$ një Γ-unazë e dobët që ka të paktën dy elemente dhe $\Gamma_0 \neq \phi$. Pohimet*:

1) *Ekziston një $\gamma \in \Gamma_0$ e tillë që $\left(M,+,\circ_\gamma\right)$ është unazë me pjesëtim.*
2) *Për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ unaza $\left(M,+,\circ_\gamma\right)$ është unazë me pjesëtim.*

janë ekuivalente atëherë dhe vetëm atëherë kur $M^*\Gamma_0 M^* \subseteq M^*$ ku $M^* = M\backslash\{0\}$.

Vërtetim. Supozojmë se pohimet 1) dhe 2) janë pohime ekuivalente. Në qoftë se do të ekzistonte ndonjë $\gamma \in \Gamma_0$ e tillë që për çdo dy elemente a, b të $M^* = M\backslash\{0\}$ të kishim $a\gamma b \notin M^*$, atëherë unaza $\left(M,+,\circ_\gamma\right)$ nuk do të ishte me pjesëtim dhe do të kishim kështu një kontradiksion. Pra, $M^*\Gamma_0 M^* \subseteq M^*$.

Anasjellas, supozojmë se M^* është e tillë që $M^*\Gamma_0 M^* \subseteq M^*$. Në qoftë se pohimi 1) është i vërtetë, atëherë $(M^*, \circ_\gamma)$ është grup meqë $(M, +, \circ_\gamma)$ është unazë me pjesëtim. Kështu $(M^*, (\cdot)_{\Gamma_0})$ është Γ_0-grup. Tani pohimi 4.1.14 implikon që $(M, +, (\cdot)_\Gamma)$ është Γ-unazë e dobët me pjesëtim dhe rrjedhimisht është i vërtetë pohimi 2).

Në qoftë se pohimi 2) është i vërtetë, atëherë është e qartë se dhe pohimi 1) është i vërtetë. Pra pohimet 1), 2) janë ekuivalente.■

Nga kjo teoremë marrim menjëherë këtë rrjedhim:

Rrjedhim 4.1.17. *Konditë e nevojshme dhe e mjaftueshme që një Γ-unazë e dobët M të jetë Γ-unazë e dobët me pjesëtim është që të ekzistojë $\gamma \in \Gamma_0$ e tillë që $(M, +, \circ_\gamma)$ të jetë unazë me pjesëtim dhe $M^*\Gamma_0 M^* \subseteq M^*$.*

§ 2. DISA KARAKTERIZIME TË Γ-UNAZAVE TË DOBËTA ME PJESËTIM

Në këtë seksion do të karakterizojmë Γ-unazat e dobëta me pjesëtim me anën e idealeve të majta, idealeve të djathta, kuazi-idealeve, kuazi idealeve minimale dhe idealeve të majta minimale dhe idealeve të djathta minimale.

Teoremë 4.2.1. *Γ-unaza e dobët M është Γ-unazë e dobët me pjesëtim atëherë dhe vetëm atëherë kur*:

1) *Ka të paktën dy elemente dhe $\Gamma_0 \neq \phi$.*
2) *Nuk përmban ideale të majta* [*ideale të djathta*] *të mirëfillta, domethënë ideale të majta* [*të djathta*] *të ndryshme nga zero dhe M-ja*
3) $\forall(m, \gamma) \in M^* \times \Gamma_0, M\gamma m \neq 0$. $[\forall(m, \gamma) \in M^* \times \Gamma_0, m\gamma M \neq 0]$

Vërtetim. Ne do ta bëjmë vërtetimin për idealet e majta, vërtetimi për idealet e djathta bëhet njëlloj. Supozojmë se M është një Γ-unazë e dobët me pjesëtim. Është e qartë se M-ja ka të paktën dy elemente. Le të jetë L ideal i majtë jozero i M-së dhe m një element jozero i L-së. Në sajë të pohimi 4.1.14, për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ dhe çdo $m \in M^* = M\backslash 0$, $M\gamma m \neq 0$.

Anasjellas, supozojmë se Γ-unaza e dobët ka të paktën dy elemente dhe nuk ka ideale të majta të mirëfillta. Meqë për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ dhe për çdo $m \in M^*$ kemi $M\gamma m \neq 0$ nga pohimi 4.1.6 $M\gamma m$ është ideal i majtë i ndryshëm nga zero dhe rrjedhimisht, $M\gamma m = M$. Tani nga pohimi 4.1.14 kemi që M është Γ-unazë e dobët me pjesëtim.■

Një Γ-unazë e dobët M quhet Γ-unazë e dobët pa pjesëtues të zeros në qoftë se

$$\forall(a, \gamma, b) \in M \times \Gamma \times M, (a\gamma b = 0) \Longrightarrow (a = 0 \; ose \; b = 0 \; ose \; \gamma \in \Gamma_0).$$

Nga teorema marrim menjëherë këtë rrjedhim:

Rrjedhim 4.2.2. *Një Γ-unazë e dobët është Γ-unazë e dobët me pjesëtim atëherë dhe vetëm atëherë kur ajo ka të paktën dy elemente, nuk ka ideale të mirëfillta të majta* [*të djathta*] *dhe është pa pjesëtues të zeros*.

Teoremë 4.2.3. *Një Γ-unazë e dobët M është Γ-unazë e dobët me pjesëtim atëherë dhe vetëm atëherë kur*

1) *Ka të paktën dy elemente dhe $\Gamma_0 \neq \phi$.*
2) *Nuk ka ideale të mirëfillta të djathta dhe ideale të mirëfillta të majta*.

3) $\forall\gamma \in \Gamma_0$, $M\gamma M \neq 0$.

Vërtetim. Supozojmë se M është Γ-unazë e dobët me pjesëtim. Është e qartë se M ka të paktën dy elemente.

Le të jetë L një ideal i majtë i M i ndryshëm nga zero dhe m një element jozero i L. Nga pohimi 4.1.14 për çdo element $\gamma \in \Gamma_0$ kemi:

$$M = M\gamma m \subseteq M\Gamma L \subseteq L.$$

Pra, $L = M$ dhe për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ dhe për çdo $m \in M^*$ kemi $M\gamma M \neq 0$.

Në mënyrë të ngjashme provohet se M nuk ka as ideale të mirëfillta të djathta.

Anasjellas, supozojmë se Γ-unaza e dobët M ka të paktën dy elemente, nuk ka ideale të mirëfillta të majta dhe ideale të mirëfillta të djathta dhe për çdo element $\gamma \in \Gamma_0$ kemi $M\gamma M \neq 0$. Kështu, ekziston një element jozero m i M i tillë që $m\gamma M \neq 0$ dhe rrjedhimisht $m\gamma M = M$. Pra, për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ ekziston një $e \in M$ e tillë që $m\gamma e = m$. Që këtej kemi barazimin $m\gamma e\gamma e = m\gamma e$ të cilin e rishkruajmë $m\gamma(e\gamma e - e) = 0$.

Shënojmë

$$M_1 = \{m_1 \in M \mid m\gamma m_1 = 0\}.$$

Nuk është vështirë të bindemi se M_1 është një ideal i djathtë i ndryshëm nga zero i M. Kështu $M_1 = 0$ sepse ndryshe do të kishim $m\gamma M = 0$ në kundërshtim me barazimin $m\gamma M = M$. Tani meqë $e\gamma e - e = m_1$ është një element i tillë që $m\gamma m_1 = 0$ kemi $m_1 = 0$ dhe rrjedhimisht $e\gamma e = e$. Meqë për çdo $\gamma \neq 0$, $e\gamma M$ është ideal i djathtë i ndryshëm nga zero kemi $M = e\gamma M$. Që këtej rrjedh se për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ elementi $e \in M$ është njësh i majtë i unazës $(M, +, \circ_\gamma)$.

Në mënyrë të ngjashme, duke përdorur mungesën e idealeve të mirëfillta të majta provohet ekzistenca e njëshit të djathtë e_1 të unazës $(M, +, \circ_\gamma)$. Tani është e qartë se $e = e_1$ dhe elementi e është njëshi i unazës $(M, +, \circ_\gamma)$. Për çdo $m \neq 0$ kemi $m = m\gamma e$ dhe rrjedhimisht $m\gamma M \neq 0$. Meqë $m\gamma M$ është ideal i djathtë dhe $m\gamma M \neq 0$, atëherë $m\gamma M = M$. Që këtej rrjedh se për çdo $\gamma \neq 0$ dhe për çdo element $m \in M\backslash\{0\}$ ekziston një element $m' \in M$ i tillë që $m\gamma m' = e$. Kështu, per çdo $\gamma \in \Gamma_0$ unaza $(M, +, \circ_\gamma)$ është unazë me pjesëtim dhe rrjedhimisht $(M, +, (\cdot)_\Gamma)$ është Γ-unazë e dobët me pjesëtim.■

Konditat e para të dy teoremave 4.2.1 dhe 4.2.3 janë të njëjta, kondita e dytë e teoremës 4.2.1 plotësohet kur plotësohet kondita e dytë e teoremës 4.2.3 kurse kondita e tretë e teoremës 4.2.3 plotësohet kur plotësohet kondita e tretë e teoremës 4.2.1. Natyrshëm lind pyetja e integrimit të këtyre dy teoremave në një teoremë të vetme «më të fuqishme» që plotëson kushtet «më të dobëta» të tyre. Më saktë këtë po e formulojmë si një problem, të cilin po e lëmë të hapur.

Problem 4.2.4. *A është i vërtetë pohimi: Një Γ-unazë e dobët është Γ-unazë e dobët me pjesëtim atëherë dhe vetëm atëherë kur ka të paktën dy elemente, $\Gamma_0 \neq \phi$ nuk ka ideale të mirëfillta të majta* [*të djathta*] *dhe për çdo $\gamma \in \Gamma_0$, $M\Gamma M \neq 0$.*

Teorema e mëposhtme jep një karakterizim tjetër të Γ-unazave të dobëta me pjesëtim me anë të kuazi-idealeve.

Teoremë 4.2.5. *Γ-unaza e dobët M është Γ-unazë e dobët me pjesëtim atëherë dhe vetëm atëherë kur ajo ka të paktën dy elemente, $\Gamma_0 \neq \phi$ nuk përmban kuazi-ideale të mirëfillta, domethënë kuazi-ideale të ndryshme nga zero dhe vetë M-ja, dhe*

$$\forall(m,\gamma) \in M^* \times \Gamma_0, M\gamma m \neq 0.$$

Vërtetim. Supozojmë se M është Γ-unazë e dobët me pjesëtim. Është e qartë se M ka të paktën dy elemente. Le të jetë Q një kuazi-ideal jozero i M-së dhe m një element jozero i Q-së dhe γ një element i Γ_0. Në sajë të pohimeve 4.1.13 dhe 4.1.14 kemi:

$$M = M\gamma m = m\gamma M = M\gamma m \bigcap m\gamma M \subseteq M\Gamma Q \cap Q\Gamma M \subseteq Q,$$

prandaj $Q = M$.

Anasjellas, supozojmë se M-ja ka të paktën dy elemente, nuk përmban kuazi-ideale të mirëfillta dhe për çdo $m \in M^*$ dhe $\gamma \in \Gamma_0$ kemi $M\gamma m \neq 0$. Meqë çdo ideal i majtë i M-së është kuazi-ideal, atëherë M-ja nuk ka ideale të majta të mirëfillta dhe në sajë të teoremës 4.2.1 Γ-unaza e dobët M është Γ-unazë e dobët me pjesëtim.■

Në mënyrë të ngjashme vërtetohet një teoremë analoge e teoremës 4.2.5 e cila në vend të kushtit $M\gamma m \neq 0$ ka kushtin $m\gamma M \neq 0$.

Dy elemente të ndryshëm nga zero a, b të Γ-unazës së dobët M quhen pjesëtues të zeros në qoftë se për çdo $\gamma \in \Gamma_0$, $a\gamma b = 0$.

Nga teorema 4.2.5 marrim menjëherë këtë rrjedhim:

Rrjedhim 4.2.6. *Një Γ-unazë e dobët M është Γ-unazë e dobët me pjesëtim atëherë dhe vetëm atëherë kur ajo ka të paktën dy elemente, $\Gamma_0 \neq 0$ nuk ka kuazi-ideale të mirëfillta dhe është pa pjesëtues të zeros.*

Një ideal i majtë [ideal i djathtë, kuazi-ideal] L $[R, Q]$ i një Γ-unaze të dobët quhet <u>minimal</u> në qoftë se L $[R, Q]$ nuk përmban ideale të majta [ideale të djathta, kuazi-ideale] të ndryshme nga zero dhe nga vetë ai.

Teoremë 4.2.7. *Γ-unaza e dobët M është Γ-unazë e dobët me pjesëtim atëherë dhe vetëm atëherë kur ajo ka të paktën dy elemente, $\Gamma_0 \neq \phi$ dhe për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ ekziston një element γ- i thjeshtueshëm që përmbahet në një kuazi-ideal minimal të M.*

Vërtetim. Supozojmë se Γ-unaza e dobët M është Γ-unazë e dobët me pjesëtim. Pra, së pari M ka të paktën dy elemente dhe $\Gamma_0 \neq \phi$. Në sajë të teoremës 4.2.5 vetë M është një kuazi-ideal minimal. Për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ unaza $(M, +, \circ_\gamma)$ është unazë me pjesëtim dhe elementi njësh i saj e_γ është një γ-element i thjeshtueshëm që përmbahet në kuazi-idealin minimal M.

Anasjellas, supozojmë se Γ-unaza e dobët M ka të paktën dy elemente $\Gamma_0 \neq \phi$ dhe për çdo $\gamma \in \Gamma_0$, m është një element γ-i thjeshtuehëm që përmbahet në kuazi-idealin minimal Q të M. Meqë $M\gamma m \cap m\gamma M$ është kuazi-ideal i M që përmbahet në Q dhe ka elementin $m\gamma m \neq 0$ të Q, atëherë nga minimaliteti i Q-së kemi $Q = M\gamma m \cap m\gamma M$. Pra ekzistojnë elementet e_γ dhe e'_γ të tilla që

$$m = e_\gamma \gamma m = m\gamma e'_{\gamma.}$$

Që këtej, për çdo element $x \in M$ kemi:

$$x\gamma m = x\gamma e_\gamma \gamma m \text{ dhe } m\gamma x = m\gamma e'_\gamma \gamma x,$$

dhe meqë m është element γ- i thjeshtueshëm janë të vërteta barazimet

$$x = x\gamma e_\gamma = e'_\gamma \gamma x,$$

që tregojnë se elementi e_γ është njësh i unazës $(M, +, \circ_\gamma)$.

Njëlloj si më sipër tregohet se

$$Q = M\gamma m\gamma m \cap m\gamma m\gamma M.$$

Pra, ekzistojnë elementet a, b të M të tillë që

$$e_\gamma \gamma m = m\gamma e_\gamma = m = a\gamma m\gamma m = m\gamma m\gamma b$$

dhe meqë m është γ- i thjeshtueshëm kemi

$$e_\gamma = a\gamma m = m\gamma b \in Q.$$

Tani për çdo $c \in M$, $c = e_\gamma \gamma c = c\gamma e_\gamma \in Q$ dhe rrjedhimisht $Q = M$. Kështu, Γ-unaza e dobët M plotëson kushtet e teoremës 4.2.5 dhe rrjedhimisht është Γ-unazë e dobët me pjesëtim.■

Për të dhënë një karakterizim të Γ-unazave të dobëta me pjesëtim me anë të idealeve të majta minimale dhe të idealeve të djathta minimale na duhet të vërtetojmë pohimin e mëposhtëm, i cili ka edhe vlerë si pohim më vete.

Pohim 4.2.8. *Prerja e çdo ideali minimal të majtë L dhe çdo ideali minimal të djathtë R të një Γ-unaze të dobët M ose është zero ose është një kuazi-ideal minimal i M-së.*

Vërtetim. Është e lehtë të provohet se prerja $L \cap R = Q$ është kuazi-ideal i M-së. Supozojmë se $Q \neq 0$ dhe le të provojmë se ai është një kuazi-ideal minimal i M-së. Le të jetë Q_1 një kuazi-ideal i ndryshëm nga zero i M-së i cili përfshihet në Q dhe rrjedhimisht përfshihet në L. Kështu bashkësia $M\Gamma Q_1$ është ideal i majtë i M-së që përmbahet në L. Meqë L është ideal minimal, atëherë $M\Gamma Q_1 = 0$ ose $M\Gamma Q_1 = L$. Në qoftë se $M\Gamma Q_1 = 0$, atëherë Q_1 është ideal majtë i M-së i ndryshëm nga zero dhe $Q_1 \subseteq L$. Nga minimaliteti i L kemi $Q_1 = L$ dhe rrjedhimisht $Q_1 = Q$. Në qoftë se $M\Gamma Q_1 = L$, atëherë në mënyrë të ngjashme provojmë se $Q_1\Gamma M = 0$ ose $Q_1\Gamma M = R$. Në rastin kur $Q_1\Gamma M = 0$, atëherë Q_1 është ideal i djathtë që përmbahet në R dhe nga minimaliteti i R kemi $Q_1 = R$ dhe rrjedhimisht $Q_1 = Q$. Në rastin kur $Q_1\Gamma M = R$ kemi:

$$Q = L \cap R = Q_1\Gamma M \cap M\Gamma Q_1 \subseteq Q_1$$

dhe përsëri $Q_1 = Q$. Kështu, $Q = L \cap R$ është kuazi-ideal minimal i Γ-unazës së dobët M.■

Tani japim këtë karakterizim të Γ-unazave me pjesëtim me anë të idealeve të majta minimale dhe idealeve të djathta minimale:

Teoremë 4.2.9. *Γ-unaza e dobët M është Γ-unazë e dobët me pjesëtim atëherë dhe vetëm atëherë kur ajo ka të paktën dy elemente, $\Gamma_0 \neq \phi$ dhe për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ ekziston një element γ-i thjeshtueshëm m_γ i tillë që $(m_\gamma)_l$ dhe $(m_\gamma)_r$ janë përkatësisht ideal i majtë kryesor minimal dhe ideal i djathtë kryesor minimal.*

Vërtetim. Supozojmë se Γ-unaza e dobët M ka të paktën dy elemente, $\Gamma_0 \neq \phi$ dhe për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ ekziston një element γ-i thjeshtueshëm m_γ i tillë që ideali i majtë kryesor $(m_\gamma)_l$ dhe ideali i djathtë kryesor $(m_\gamma)_r$ të përftuar nga m_γ janë minimalë. Nga pohimi 4.2.8 prerja $(m_\gamma)_l \cap (m_\gamma)_r = Q$ është kuazi-ideal minimal. Për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ ky kuazi-ideal minimal përmban elementin γ-të thjeshtueshëm m_γ. Kështu, nga teorema 4.2.7 M është Γ-unazë e dobët me pjesëtim.

Anasjellas, në qoftë se M-ja është Γ-unazë e dobët me pjesëtim, atëherë ajo ka të paktën dy elemente dhe nga teorema 4.2.3 nuk ka ideale të mirëfillta të majta dhe ideale të mirëfillta të djathta dhe rrjedhimisht për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ për njëshin e_γ të unazës me pjesëtim $(M, +, \circ_\gamma)$, i cili është γ-i thjeshtueshëm, $(e_\gamma)_r$ dhe $(e_\gamma)_l$ janë përkatësisht ideal i djathtë minimal dhe ideal i majtë minimal.■

Në lidhje me karakterizimet e Γ-unazave të dobëta me pjesëtim të dhëna nga teoremat 4.2.7 dhe 4.2.9 ngrehim këtë problem të cilin po e lëmë të hapur.

Problem 4.2.10. A mbeten të vërteta teoremat 4.2.7 dhe 4.2.9 në qoftë se kërkojmë vetëm ekzistencën e një elementi γ- të thjeshtueshëm?

§ 3. Γ-FUSHAT E DOBËTA

Po e fillojmë këtë paragraf duke i parë Γ-unazat e dobëta nga një këndvështrim tjetër, i ngjashëm me atë të Γ-gati-unazave [27], [28] klasës së të cilave ato i përkasin, të cilin do ta shfrytëzojmë në paragrafin pasues.

Për një Γ-unazë të dobët $(M, +, (\cdot)_\Gamma)$ për çdo $\gamma \in \Gamma$, formuam unazën e zakonshme $(M, +, \circ_\gamma)$ të cilin e shënojmë thjesht M_γ. Këtë unazë do ta shënojmë edhe $(M, +, \gamma)$. Me anë të unazës $(M, +, \gamma)$ për çdo $\gamma \in \Gamma$ kemi mundësi ta përcaktojmë në një mënyrë tjetër Γ-unazën e dobët, të ndryshëm nga përkufizimi 4.1.1 por që sigurisht është ekuivalent me të. Më saktë kemi përkufizimin e mëposhtëm të Γ-unazës së dobët i cili është ekuivalent me përkufizimin 4.1.1.

Përkufizim 4.3.1. *Γ-unazë e dobët quhet çdo treshe e radhitur $(M, +, \Gamma)$ ku*:

1) *$(M, +)$ është grup abelian.*
2) *Γ është një bashkësi jo boshe veprimesh binare në M e tillë që për çdo $\gamma \in \Gamma$ treshja e radhitur $(M, +, \gamma)$ është unazë.*
3) *Për çdo tre elemente a, b, c të M-së dhe për çdo dy elemente α, β të Γ kemi*

$$(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c).$$

Nga ky përkufizim Γ-unazën e dobët M mund ta konsiderojmë si grup abelian me Γ-operatorë. Në këtë rrugë ne kemi mundësi të gjejmë disa rezultate për Γ-unazat e dobëta që lidhen me Γ-homomorfizmat.

Le të jenë $(M,+,\Gamma)$, $(M',+,\Gamma)$ dy Γ-unaza të dobëta. Pasqyrimin $h: M \longrightarrow M'$ do ta quajmë Γ-homomorfizëm të M në M' në qoftë se për çdo dy elemente a, b të M dhe për çdo $\gamma \in \Gamma$ kemi:

$$h(a+b) = h(a) + h(b),$$

$$h(a\gamma b) = h(a)\gamma h(b).$$

Në qoftë se h është pasqyrim injektiv (syrjektiv), atëherë h-në do ta quajmë Γ-monomorfizëm [Γ-epiomorfizëm]. Në qoftë se h është pasqyrim bijektiv, atëherë ai quhet Γ-izomorfizëm i Γ-unazës së dobët $(M,+,\Gamma)$ në Γ-unazën e dobët $(M',+,\Gamma)$ dhe këto dy Γ- unaza të dobëta quhen Γ-izomorfe.

Në qoftë se h është Γ-homomorfizëm i Γ-unazës së dobët M në Γ-unazën e dobët M', atëherë bashkësia e M-së

$$Kerh = \{x \in M \mid h(x) = 0\},$$

quhet bërthamë e h-së. Është e lehtë të provohet se $Kerh$ është një ideal i Γ-unazës së dobët M.

Në qoftë se I është një ideal i Γ-unazës së dobët M, atëherë me kontroll të drejtpërdrejtë bindemi se bashkësia

$$M/I = \{x + I \in \mathcal{P}(M) | x \in M\}$$

e kobashkësive të grupit abelian I formon përsëri Γ-unazë të dobët, në qoftë se veprimet në të i përcaktojmë me anë të barazimeve:

$$(x+I) + (y+I) = (x+y) + I,$$

$$(x+I)\gamma(y+I) = x\gamma y + I.$$

Γ-unaza e dobët $M\ /\ I$ quhet Γ-unazë e dobët faktore e Γ-unazës së dobët M sipas idealit I të saj. Vërtetimi i teoremave të mëposhtme ka vetëm ndryshime të thjeshta nga vërtetimet e teoremave përkatëse për unazat, por ato janë rrjedhime të menjëhershme të teoremave përkatëse për Ω-grupet [31] gjë që përligj mos vërtetimin e tyre.

Teoremë 4.3.2. *Le të jetë I një ideal i Γ-unazës së dobët M dhe $\varphi: M \xrightarrow[x \mapsto x+I]{} M/I$ pasqyrimi kanonik i M-së në M/I. Atëherë φ është një Γ-epiomorfizëm i Γ-unazës së dobët M në Γ-unazën e dobët faktore M/I me bërthamë I. Për më tepër, në qoftë se h është një epiomorfizëm i Γ-unazës së dobët M në Γ-unazën e dobët M', atëherë ekziston vetëm një Γ-izomorfizëm i $M/Kerh$ në M' i tillë që $h = \psi \circ \varphi$.*

Teoremë 4.3.3. *Le të jetë h një Γ-epiomorfizëm i Γ-unazës së dobët M në Γ-unazën e dobët M' me bërthamë I. Atëherë B' është një ideal i M' atëherë dhe vetëm atëherë kur $h^{-1}(B') = B$ është një ideal i M që përmban I-në. Në këtë rast M/B, M'/B' dhe $(M/I)/(B/I)$ janë të gjitha Γ-izomorfe.*

Teoremë 4.3.4. *Le të jenë A, B ideale të Γ-unazës së dobët M dhe dhe $\varphi: M \xrightarrow[x \mapsto x+B]{} M/B$ epiomorfizëm kanonik i B-së në M/B. Atëherë $A + B = \varphi^{-1}(\varphi(A))$ dhe Γ-unazat e dobëta $(A+B)/B$, $A/(A \cap B)$ janë Γ-izomorfe.*

Përkufizim 4.3.5. *Një Γ-unazë e dobët M quhet ndërrimtare në qoftë se për çdo $\gamma \in \Gamma$ dhe për çdo dy elemente a, b të M-së është i vërtetë barazimi $a\gamma b = b\gamma a$.*

Në mënyrë të natyrshme si për fushën e zakonshme japim përkufizimin e Γ-fushës së dobët:

Përkufizim 4.3.6. *Një Γ-unazë e dobët M quhet Γ-fushë e dobët në qoftë se dhe vetëm në qoftë se ajo është ndërrimtare dhe Γ-unazë e dobët me pjesëtim.*

Γ-unaza e dobët $(M, +, (\cdot)_\Gamma)$ e shembullit 4.1.11 është Γ-fushë e dobët meqë me llogaritje të drejtpërdrejta bindemi se për çdo dy matrica A, B të M-së dhe për çdo matricë $\gamma \in \Gamma$ kemi se $A\gamma B = B\gamma A$.

Γ-unaza e dobët me pjesëtim $(H, +, (\cdot)_\Gamma)$ e shembullit 4.1.9 nuk është Γ-fushë e dobët sepse ajo nuk është ndërrimtare.

Vëmë re se në rastin kur një Γ-unazë e dobët është Γ-unazë, atëherë përkufizimi i 4.3.5 i Γ-fushës së dobët përputhet me përkufizimin 1.2.3 të Γ-fushës vetëm kur $\Gamma_0 = \Gamma/\{0\}$. Kështu Γ-fusha e dobët e shembullit 4.1.11 nuk është Γ-fushë. Pra koncepti i Γ-fushës së dobët është më i gjerë se ai i Γ-fushës. Është e qartë se kur një Γ-unazë e dobët është Γ-unazë e Nabusawa-së, atëherë koncepti i Γ-fushës së dobët përputhet me konceptin e Γ-fushës.

Nga pohimet dhe teoremat që kemi shtjelluar në paragrafët 1 dhe 2 të këtij kapitulli, të cilat japin përkufizime ekuivalente me përkufizimin e Γ-unazës së dobët me pjesëtim dhe karakterizimeve të saj me anë të idealeve të njëanshme dhe kuazi-idealeve, përftojmë përkufizime ekuivalente me përkufizimin e Γ-fushës së dobët si dhe karakterizime të saj me anë të idealeve, meqë Γ-unazat e dobëta që përmendëm në to janë ndërrimtare.

Më poshtë po japim vetëm një përkufizim të Γ-fushës së dobët ekuivalent me përkufizimin 4.3.6 dhe një karakterizim të saj, i cili përftohet nga teorema 4.2.3.

Përkufizim 4.3.7. *Γ-unaza e dobët M quhet Γ-fushë e dobët në qoftë se dhe vetëm në qoftë se ajo është ndërrimtare, ka të paktën dy elemente, $\Gamma_0 \neq \phi$ dhe*

$$\forall (m, \gamma) \in M^* \times \Gamma_0, m\gamma M = M,$$

ku $M^* = M/\{0\}$.

Teoremë 4.3.8. *Γ-unaza e dobët M është Γ-fushë e dobët në qoftë se dhe vetëm në qoftë se ajo është ndërrimtare, ka të paktën dy elemente, $\Gamma_0 \neq \phi$, nuk ka ideale të mirëfillta dhe*

$$\forall \gamma \in \Gamma_0, M\gamma M \neq 0.$$

Përkufizim 4.3.9. *Ideali I i Γ-unazës së dobët M quhet maksimal në qoftë se $I \neq M$ dhe për çdo ideal J të M-së kemi*:

$$(I \subseteq J) \Longrightarrow (I = J \vee J = M).$$

Përkufizim 4.3.10. *Γ-unaza e dobët M quhet unitare në qoftë se $\Gamma_0 \neq \phi$ dhe për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ unaza $(M, +, \circ_\gamma)$ është unitare.*

Teoremë 4.3.11. *Le të jetë M një Γ-unazë e dobët që ka të paktën dy elemente, është ndërrimtare, unitare dhe e tillë që $\Gamma_0 \neq \phi$. Ideali I i M-së është maksimal atëherë dhe vetëm atëherë kur Γ-unaza e dobët faktore M/I është Γ-fushë e dobët.*

Vërtetim. Le të jetë I ideal maksimal i M-së. Nuk është vështirë të bindemi se Γ-unaza e dobët faktore M/I ka të paktën dy elemente dhe është ndërrimtare dhe unitare.

Për Γ-unazën e dobët faktore M/I, $\Gamma_0 \neq \phi$, meqë për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ po të jetë e_γ njësh i unazës $(M, +, \circ_\gamma)$ kemi:

$$(e_\gamma + I)\gamma(e_\gamma + I) = e_\gamma \gamma e_\gamma = e_\gamma \notin I$$

Sepse $I \neq M$ dhe I është zerua e M/I.

Për të provuar se M/I është Γ-fushë e dobët marrim një element çfarëdo jo zero $a + I$ të M/I, domethënë $a \notin I$ dhe një element çfarëdo $b + I$ të M/I. Me llogaritje të drejtpërdrejta bindemi se $I + M\gamma a$ është një ideal i M-së që përmban idealin I. Ideali $I + M\gamma a$ është i ndryshëm nga I-ja sepse $a \notin I$, kurse $a \in (I + M\gamma a)$. Kështu, në sajë të maksimalitetit të I-së kemi $I + M\gamma a = I$. Pra, ekzistojnë elementet $m \in I$ dhe $c \in M$ të tillë që $b = m + c\gamma a$. Që këtej kemi:

$b + I = (m + I) + (c + I)\gamma(a + I) = (c + I)\gamma(a + I)$.

Nga këto barazime, në sajë të përkufizimit 4.3.7, Γ-unaza e dobët faktor M/I sipas idealit I është Γ-fushë e dobët.

Anasjellas, supozojmë se M/I është Γ-fushë e dobët dhe J është një ideal i M-së i tillë që $I \subseteq J$. Në qoftë se $I \neq J$, atëherë ekziston një element d i J-së i tillë që $d \notin I$. Kështu, elementi $d + I$ i Γ-fushës së dobët M/I është i ndryshëm nga zero. Nga përkufizimi 4.3.7 për një element çfarëdo $x + I$ të M/I dhe për çdo $\gamma \in \Gamma$ ekziston një element $u + I$ i M/I i tillë që

$(d + I)\gamma(u + I) = x + I$.

Që këtej kemi

$$d\gamma u + I = x + I$$

dhe rrjedhimisht për elementin çfarëdo x ekziston elementi $m_1 \in I \subseteq J$ i tillë që $x = d\gamma u + m_1$. Meqë $a \in J$ dhe $m_1 \in J$, edhe elementi x është element i J-së. Kështu, $J = M$, prandaj ideali I i M-së është maksimal.■

§ 4. RELACIONET E GREEN-IT NË Γ-UNAZAT E DOBËTA

Si për të gjitha strukturat algjebrike në të cilat janë përcaktuar idealet e njëanshme dhe kuazi-idealet për të futur relacionet e Green-it në këto struktura, e para ide që të shkon në mëndje është ajo e përcaktimit të tyre me anë të barazimit të idealeve të njëanshme kryesore apo të kuazi-idealeve kryesore. Kështu në sajë të barazimeve 4.1.1, 4.1.2 dhe 4.1.3 relacionet e Green-it në një Γ-unazë të dobët përcaktohen nga barazimet e mëposhtme:

$$a\mathcal{L}b \Leftrightarrow \mathbb{Z}a + M\Gamma a = \mathbb{Z}b + M\Gamma b,$$

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \mathbb{Z}a + a\Gamma M = \mathbb{Z}b + b\Gamma M,$$

$$aQb \Leftrightarrow \mathbb{Z}a + a\Gamma M \cap M\Gamma a = \mathbb{Z}b + b\Gamma M \cap M\Gamma b.$$

Por, përcaktimi i relacioneve të Green-it në Γ-unazat e dobëta me anë të këtyre barazimeve, të cilët qysh në dukje ngjajnë tepër volumicioze (janë dy bashkësi pranë e pranë) ndesh në pengesa që ne nuk kemi mundur ti kapërcejmë.

Së pari, këto barazime nuk lejojnë të provohet që relacioni i Green-it i barazimit të idealeve të majta kryesore është i përkëmbyeshëm me relacionin e Green-it të barazimit të idealeve të djathta kryesore dhe rrjedhimisht është i pamundur të përcaktohet relacioni që është i barabartë me kompozimin e tyre. Më tej nuk mund të vërtetohet Lema e Green-it për relacionet e barazimit të idealeve të njëanshme. Dhe ç'është më e rëndësishmja duket e pamundur vërtetimi i teoremave të tipit të Green-it për relacionin e barazimit të njëkohshëm të idealeve të njëanshme dhe të kuazi-idealeve kryesore, teorema që kanë impakt për studimin e mikrostrukturave minimale. Të gjitha këto na shtyjnë të kërkojmë rrugë të tjera që na mundësojnë gjetjen e disa prej rezultateve më të përgjithshme që lidhen me relacionet e Green-it në struktura të ndryshme algjebrike.

Ka një ide të paraqitur te [11] për identifikimin e relacioneve të Green-it në Γ-gjysmëgrupe që marrin pjesë në ndërtimin e tyre. Kjo ide jep disa karakterizime në Γ-unazat dhe ajo mund transplantohej menjëherë për Γ-unazat e dobëta. Por, në fund të fundit në çdo Γ-unazë të dobët $(M, +, (\cdot)_\Gamma)$ ne i kemi relacionet e Green-it në Γ-gjysmëgrupin përkatës $(M, (\cdot)_\Gamma)$ dhe askush nuk na ndalon t'i studiojmë ato.

Ne do të ndjekim një rrugë të tretë, e cila na ka dhënë disa rezultate të cilat do t'i shtjellojmë në këtë paragraf.

Le të jetë $(M, +, (\cdot)_\Gamma)$ një Γ-unazë e dobët. Për çdo element të fiksuar $\gamma \in \Gamma$ kemi unazën e zakonshme $(M, +, \gamma)$ ku γ shënon këtu shumëzimin që për çdo dy elemente a, b rezultati sipas tij është $a\gamma b$. Në këtë unazë ne kemi relacionet e Green-it, të cilat i kemi shqyrtuar në kapitullin e dytë. Me ndihmën e tyre përcaktojmë relacionet e Green-it $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$ dhe $\mathcal{Q}$ si më poshtë:

$$a\mathcal{L}b \Leftrightarrow (\forall\gamma \in \Gamma, \mathbb{Z}a + M\gamma a = \mathbb{Z}b + M\gamma b),$$

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow (\forall\gamma \in \Gamma, \mathbb{Z}a + a\gamma M = \mathbb{Z}b + b\gamma M),$$

$$a\mathcal{H}b \Leftrightarrow (\forall\gamma \in \Gamma, \mathbb{Z}a + M\gamma a = \mathbb{Z}b + M\gamma b \wedge \mathbb{Z}a + a\gamma M = \mathbb{Z}b + b\gamma M),$$

$$aQb \Leftrightarrow (\forall\gamma \in \Gamma, \mathbb{Z}a + a\gamma M \cap M\gamma a = \mathbb{Z}b + b\gamma M \cap M\gamma b).$$

Është e qartë se relacionet $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$ dhe $\mathcal{Q}$ janë relacione ekuvalence në M. Klasat e ekuivalencës sipas tyre, që përmbajnë elementin $a \in M$ i shënojmë përkatësisht L_a, R_a, H_a, Q_a.

Ideja e thjeshtë që na ka shtyrë t'i përcaktojmë relacionet e Green-it si më lartë është kjo:

Ashtu si qenia e Γ-unazës së dobët $(M, +, (\cdot)_\Gamma)$ mund të imagjinohet si qenie e njëkohshme e të gjitha unazave të zakonshme $(M, +, \gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, ashtu edhe qëniet e relacioneve të Green-it $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{Q}$ duhet të mendohen si qenit e njëkohshme të

relacioneve të zakonshme të Green-it në unazat $(M,+,\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$. Dhe vërtet po ti shohim më nga afër relacionet $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$ dhe $\mathcal{Q}$ në një Γ-unazë të dobët $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$ vëmë re se:

$$\mathcal{L} = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{L}_\gamma, \quad \mathcal{R} = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{R}_\gamma, \mathcal{H} = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{H}_\gamma, \mathcal{Q} = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{Q}_\gamma,$$

ku për çdo $\gamma \in \Gamma$ $\mathcal{L}_\gamma$, $\mathcal{R}_\gamma$, $\mathcal{H}_\gamma$, $\mathcal{Q}_\gamma$ nuk janë gjë tjetër veçse relacionet e zakonshme të Green-it në unazën e zakonshme $(M,+,\gamma) = \left(M,+,\circ_\gamma\right) = M_\gamma$. Klasat e ekuivalecës që përmbajnë elementin $a \in M$ sipas relacioneve $\mathcal{L}_\gamma$, $\mathcal{R}_\gamma$, $\mathcal{H}_\gamma$, $\mathcal{Q}_\gamma$ do t'i shënojmë përkatësisht $L_\gamma(a)$, $R_\gamma(a)$, $H_\gamma(a)$ dhe $Q_\gamma(a)$. Le të jetë $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$ një Γ-unazë e dobët. Për thjeshtësi për çdo $k \in \mathbb{Z}$, për çdo element $x \in M$, për çdo $\gamma \in \Gamma$ dhe për çdo $m \in M$ shënojmë:

$$(k,m)\gamma x = kx + m\gamma x,$$

$$x\gamma(k,m) = kx + x\gamma m.$$

Me këto shënime për çdo dy elemente a, b të M dhe për çdo $\gamma \in \Gamma$ kemi:

$$a\mathcal{L}b \Leftrightarrow (\forall\gamma \in \Gamma, \exists(k,k',m,m') \in \mathbb{Z}^2 \times M^2, a = (k,m)\gamma b \ \wedge b = (k',m')\gamma a),$$

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \left(\forall\gamma \in \Gamma, \exists(k,k',m,m') \in \mathbb{Z}^2 \times M^2, a = b\gamma(k,m) \ \wedge b = a\gamma(k',m')\right).$$

Le të jetë a një element çfarëdo i Γ-unazës së dobët $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$. Për çdo $\gamma \in \Gamma$ shënojmë $(a)_l^\gamma$ $\left[(a)_r^\gamma, (a)_q^\gamma\right]$ idealin e majtë [idealin e djathtë, kuazi-idealin] kryesor të përftuar nga elementi a në unazën $(M,+,\gamma)$. Me anën e lemave të Green-it për unazën e zakonshme përftojmë menjëherë lemat e mëposhtme që do të ishin lema të Green-it për relacionet $\mathcal{L}$ dhe $\mathcal{R}$ në Γ-unazën e dobët $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$.

Lema 4.4.1. *Le të jenë a, b dy elemente të Γ-unazës së dobët $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$ të tillë që $a\mathcal{L}b$. Në qoftë se $a = (k,m)\gamma b$ dhe $b = (k',m')\gamma a$, ku $k,k' \in \mathbb{Z}$,*

$$\varphi_\gamma : (a)_r^\gamma \xrightarrow[x\mapsto(k',m')\gamma x]{} (b)_r^\gamma, \ \psi_\gamma : (b)_r^\gamma \xrightarrow[y\mapsto(k,m)\gamma y]{} (a)_r^\gamma$$

janë të anasjellë të njëri tjetrit, ruajnë $\mathcal{L}_\gamma$-klasat dhe pasqyrojnë përkatësisht në mënyrë bijektive $R_\gamma(a)$ në $R_\gamma(b)$ dhe $R_\gamma(b)$ në $R_\gamma(a)$.

Lema 4.4.2. *Le të jenë a, b dy elemente të Γ-unazës së dobët $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$ të tillë që $a\mathcal{R}b$. Në qoftë se për elementin çfarëdo $\gamma \in \Gamma$ kemi $a = b\gamma(k,m)$ dhe $b = a\gamma(k',m')$, ku k,k' janë numra të plotë, m, m' elemente të M-së, atëherë pasqyrimet:*

$$\varphi'_\gamma : (a)_l^\gamma \xrightarrow[x\mapsto x\gamma(k',m')]{} (b)_l^\gamma, \ \psi'_\gamma : (b)_l^\gamma \xrightarrow[y\mapsto y\gamma(k,m)]{} (a)_l^\gamma$$

janë të anasjellë të njëri tjetrit, ruajnë $\mathcal{R}_\gamma$-klasat në kuptimin që për çdo $x \in (a)_l^\gamma$ kemi $x\mathcal{R}_\gamma\varphi'_\gamma(x)$ dhe për çdo $y \in (b)_l^\gamma$ kemi $y\mathcal{R}_\gamma\psi'_\gamma(y)$ dhe pasqyrojnë në mënyrë bijektive përkatësisht $R_\gamma(a)$ në $R_\gamma(b)$ dhe $R_\gamma(b)$ në $R_\gamma(a)$.

Në sajë të përcaktimit të relacioneve $\mathcal{H}$ dhe $\mathcal{Q}$ në Γ-unazat e dobëta dhe teoremave të Green-it për unazat përftojmë menjëherë teoremat e mëposhtme që mund t'i quanim dhe ato teorema të Green-it për relacionet $\mathcal{H}$ dhe $\mathcal{Q}$ në Γ-unazat e dobëta.

Teoremë 4.4.3. *Le të jetë $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$ një Γ-unazë e dobët. Në qoftë se për një $\gamma \in \Gamma$ elementet a, b, $a\gamma b$ i përkasin së njëjtës $\mathcal{H}$-klasë H_a të M-së, atëherë H_a përfshihet në nëngrupin $H_\gamma(a)$ të gjysmëgrupit të shumëzimit (M,γ) të unazës $(M,+,\gamma)$.*

Teoremë 4.4.4. *Le të jetë $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$ një Γ-unazë e dobët. Në qoftë se për një $\gamma \in \Gamma$ elementet a, b, $a\gamma b$ i përkasin së njëjtës Q-klasë Q_a të M-së, atëherë Q_a përfshihet në nëngrupin $Q_\gamma(a)$ të gjysmëgrupit të shumëzimit (M,γ) të unazës $(M,+,\gamma)$.*

Nga teorema 4.4.3 kemi këtë rrjedhim:

Rrjedhim 4.4.5. *Le të jetë $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$ një Γ-unazë e dobët e tillë që $\Gamma_0 \neq \phi$. Në qoftë se për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ ekzistojnë elementet a, b të M-së të tillë që a, b, $a\gamma b$ janë në të njëjtën $\mathcal{H}$-klasë H, atëherë për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ ekziston një element $e_\gamma \in M$ i tillë që*

$$\forall x \in H, x = e_\gamma \gamma x = x\gamma e_\gamma.$$

Vërtetim. Meqë për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ elementet a, b, $a\gamma b$ i përkasin të njëjtës $\mathcal{H}$-klasë H, atëherë nga teorema 4.4.3 për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ vetë H-ja përfshihet në grupin $H_\gamma(a)$ të gjysmëgrupit të shumëzimit (M,γ) të unazës $(M,+,\gamma)$. Le të jetë e_γ njëshi i grupit $H_\gamma(a)$. Atëherë për çdo $x \in H$ meqë $x \in H_\gamma(a)$ kemi:

$$x = e_\gamma \gamma x = x\gamma e_\gamma. \blacksquare$$

Në mënyrë analoge nga teorema 4.4.4 marrim këtë rrjedhim:

Rrjedhim 4.4.6. *Le të jetë $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$ një Γ-unazë e dobët e tillë që $\Gamma_0 \neq \phi$. Në qoftë se për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ ekzistojnë elementet a, b të M-së të tillë që a, b, $a\gamma b$ janë në të njëjtën Q-klasë Q, atëherë për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ ekziston një element $e_\gamma \in M$ i tillë që*

$$\forall x \in Q, x = e_\gamma \gamma x = x\gamma e_\gamma.$$

Përkufizim 4.4.7. *Kuazi-ideal Q i Γ-unazës së dobët $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$ quhet minimal në qoftë se ai nuk përmban kuazi-ideale të mirëfillta të M-së, domethënë kuazi-ideale të ndryshme nga zero dhe vetë M-ja.*

Sqarojmë në fillim se çfarë do të nënkuptojmë me Γ-unazë të dobët $(Q,+,(\cdot)_\Gamma)$ të formuar nga kuazi-ideali Q i Γ-unazës së dobët $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$ dhe ç'kuptim ka për të Γ_0.

Kuazi-ideali Q është nëngrup i grupit të mbledhjes $(M,+)$ të Γ-unazës së dobët $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$, prandaj në Q kemi një mbledhje të induktuar, që e shënojmë me të njëjtin simbol, +, me mbledhjen e Γ-unazës së dobët $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$. Po ashtu, për çdo dy elemente a, b të Q-së dhe për çdo element $\gamma \in \Gamma$ elementi $a\gamma b$ i përket Q-së meqenëse

$$a\gamma b \in M\Gamma Q \cap Q\Gamma M \subseteq Q.$$

Pra, në Q mund të përcaktojmë një Γ-shumëzim duke marrë elementin $a\gamma b$ si rezultat të tij për çdo dy elemente a, b të M-së dhe çdo element γ të Γ. Këtë Γ-shumëzim në Q e shënojmë me të njëjtin simbol të Γ-shumëzimit të Γ-unazës së dobët $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$ dhe së bashku me mbledhjen + në Q përftojmë treshen e radhitur $(Q,+,(\cdot)_\Gamma)$. Nuk është e vështirë të bindemi se $(Q,+,(\cdot)_\Gamma)$ është një Γ-unazë e dobët. Pikërisht, këtë Γ-unazë të dobët do ta nënkuptojmë si Γ-unazë të dobët të formuar nga kuazi-ideali minimal. Po

ashtu, vëmë në dukje se Γ_0 për kuazi-idealin Q të parë nën këndvështrimin e Γ-unazës së dobët $(Q,+,(\cdot)_\Gamma)$ nuk është gjë tjetër veçse bashkësia e elementeve $\gamma \in \Gamma$ të tillë që ekzistojnë të paktën dy elemente a, b të Q të tillë që $a\gamma b \neq 0$.

Le të jetë Q një kuazi-ideal minimal i Γ-unazës së dobët $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$. Për çdo element të ndryshëm nga zero $a \in M$ kemi $(a)_q = Q$. Shqyrtojmë klasën e ekuivalencës sipas relacionit Q në Γ-unazën e dobët M që përmban elementin a, Q_a. Në qoftë se $x \in Q_a$, atëherë për çdo element γ të Γ_0, sigurisht që ka lidhje me Q-në, kemi:

$$\mathbb{Z}a + a\gamma M \cap M\gamma a = \mathbb{Z}x + x\gamma M \cap M\gamma x.$$

Nga ky barazim rrjedh se $(a)_q = (x)_q$, prandaj $x \in Q$. Kështu $Q_a \subseteq Q$ dhe për më tepër $Q_a \subseteq Q\backslash\{0\}$. Natyrshëm lind pyetja: Kur është i vërtetë barazimi $Q_a = Q$? Për këtë, së pari supozojmë se $Q_a = Q\backslash\{0\}$ dhe shohim se çfarë ndodh.

Supozojmë se $\Gamma_0 \neq \phi$ për $(Q,+,(\cdot)_\Gamma)$. Le të jetë γ një element nga Γ_0 i Γ-unazës së dobët $(Q,+,(\cdot)_\Gamma)$ dhe për të shqyrtojmë unazën e zakonshme $(Q,+,\gamma)$. Meqë $Q_a = Q\backslash\{0\}$ për çdo $x \in Q\backslash\{0\}$ do të kishim $x \in Q_a$ dhe rrjedhimisht për çdo $\gamma \in \Gamma$ kemi $Q_a\backslash\{0\} = Q \subseteq (a)_q^\gamma$. Meqë

$$(a)_q^\gamma = \mathbb{Z}a + a\gamma M \cap M\gamma a \subseteq \mathbb{Z}a + a\Gamma M \cap M\Gamma a = (a)_q = Q,$$

është i vërtetë barazimi $Q = (a)_q^\gamma$. Tani për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ ekzistojnë dy elemente a, b të tillë që $a\gamma b \neq 0$ dhe rrjedhimisht kemi:

$$(a)_q^\gamma = (b)_q^\gamma = (a\gamma b)_q^\gamma = Q.$$

Nga këto barazime dhe barazimi $Q_a = Q\backslash\{0\}$ rrjedh se $Q_\gamma(a)$ është grup. Kështu unaza $(Q,+,\gamma)$ është unazë me pjesëtim sepse $Q_\gamma(a) = Q\backslash\{0\}$. Pra, Γ-unaza e dobët $(Q,+,(\cdot)_\Gamma)$ është Γ-unazë e dobët me pjesëtim.

Anasjelltas, supozojmë se kuazi-ideali minimal Q është Γ-unazë e dobët me pjesëtim, domethënë Γ-unaza e dobët $(Q,+,(\cdot)_\Gamma)$ është Γ-unazë e dobët me pjesëtim. Pra, për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ kemi që $(Q,+,\gamma)$ është unazë me pjesëtim. Kjo do të thotë se kjo unazë nuk ka kuazi-ideale të mirëfillta. Kështu për çdo $a \in Q\backslash\{0\}$ kemi $(a)_q^\gamma = Q$ dhe rrjedhimisht për çdo $x \in Q\backslash\{0\}$ në sajë të minimalitetit të Q-së kemi $x \in Q_\gamma(a)$. Që këtej rrjedh menjëherë se $Q_a = Q\backslash\{0\}$.

Kështu kemi vërtetuar këtë teoremë:

Teoremë 4.4.8. *Le të jetë $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$ një Γ-unazë e dobët dhe Q një kuazi-ideal minimal i saj i tillë që për Γ-unazën e dobët të formuar prej tij, $(Q,+,(\cdot)_\Gamma)$ kemi $\Gamma_0 \neq \phi$. Kuazi-ideali Q është një Γ-unazë e dobët me pjesëtim atëherë dhe vetëm atëherë kur $Q\backslash\{0\}$ është një Q-klasë e M-së.*

Një lidhje e kuazi-idealit minimal me relacionin $\mathcal{H}$ e ngjashme me atë të teoremës së mësipërme jepet nga teorema e mëposhtme:

Teoremë 4.4.9. *Le të jetë $(M,+,(\cdot)_\Gamma)$ një Γ-unazë e dobët dhe Q një kuazi-ideal minimal i saj i tillë që për Γ-unazën e dobët të formuar prej tij, $(Q,+,(\cdot)_\Gamma)$ kemi $\Gamma_0 \neq \phi$. Kuazi-ideali Q është një Γ-unazë e dobët me pjesëtim atëherë dhe vetëm atëherë kur $Q\backslash\{0\}$ përfshihet në një $\mathcal{H}$-klasë të M-së.*

Vërtetim. Supozojmë se kuazi-ideali Q është Γ-unazë e dobët me pjesëtim domethënë Γ-unaza e dobët $(Q,+,(\cdot)_\Gamma)$ është Γ- unazë e dobët me pjesëtim. Për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ unaza $(Q,+,\gamma)$ është unazë me pjesëtim dhe rrjedhimisht në sajë të pohimit 1.1.14 nuk ka ideale të majta dhe ideale të djathta të mirëfillta. Pra, për çdo element $a \neq 0$ të Q-së kemi:

$$H_\gamma(a) = L_\gamma(a) \cap R_\gamma(a) = Q\backslash\{0\}.$$

Nga këto barazime rrjedh menjëherë se $Q\backslash\{0\} = H_a$.

Anasjellas, supozojmë se $Q\backslash\{0\}$ përfshihet në një $\mathcal{H}$-klasë, H_a, për një element $a \neq 0$ të Q-së. Meqë

$$H_a = \bigcap_{\gamma\in\Gamma_0} H_\gamma(a)$$

për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ kemi përfshirjen$Q_a\backslash\{0\} \subseteq H_\gamma(a)$ dhe Q-ja është një kuazi-ideal minimal i unazës $(Q,+,\gamma)$. Kështu për çdo $\gamma \in \Gamma_0$ unaza me shumëzim jo zero $(Q,+,\gamma)$ është unazë me pjesëtim dhe rrjedhimisht Γ-unaza e dobët $(Q,+,(\cdot)_\Gamma)$ është Γ-unazë e dobët me pjesëtim.■

BIBLIOGRAFIA

[1] Petro, P., Dy teorema të tipit të Grinit për unazat çfarëdo, BSHN, Nr. 2, 1982, 17-22

[2] Petro, P., Kuazi-idealet në disa struktura algjebrike dhe ndikime të këtyre strukturave për modernizimin e lëndës së algjebrës, Tiranë 1986.

[3] Kolibiarova, B., O ciastocne komutativnych periodickych pologrupach, Mat.-fuz. Casop. 9 (1959), 160-172.

[4] Green, J.A. On the structure of semigroups. Ann. of Math. 1951, 163-171.

[5] Steinfeld, O, Quasi-ideal in Rings and Semigroups. Akademiai Kiado, Budapest, 1978.

[6] Steinfeld, O., On canonical quasi-ideal in rings. Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis. Sec. Math. XXXI, 1988, 171-178.

[7] Petro, P. Green relations and minimal quasi-ideals in rings. Communications in Algebra, 2002, vol 30, No 10, pp. 4677-4686.

[8] Petro, P., The characteristic of the minimal ideals and of the generalized ideals in rings, Pregatitur për botim.

[9] Howie J. M., Fundamentals of semigroup theory, Oxford University Press, USA, 1995.

[10] Clifford, A. H., Remarks on minimal quasi-ideals in semigroups, Semigroup Forum, 16, 1978 183-196.

[11] Nain-feng, Zh., Green's equivalences on gamma rings, Journal of Guizhon Natural University Natural Sciences, 20, No4,, 2002, 44-46

[12] Clifford, A. H and Preston, G. B., The Algebraic Theory of Semigroup Amer. Math. Soc. Providence, R. I, Vol I, 1962.

[13] Kapp, K. M., On bi-ideals and quasi-ideals in semigroups, Pub. Math. Debrecent, 16, 179-181, 1969.

[14] Kapp, K. M., Bi-ideals in associative rings and semigroups. Acta Sci. Math (Szged), 33, 307-314, 1972.

[15] Lajos, S and Szasz., F. Bi-ideals in associative rings. Acta Sci. Math. 32, 185-193, 1971.

[16] Petro, P., Unazat $\mathcal{D}$-të thjeshta, pregatitur për botim.

[17] Munn, W. D., Bi-simple rings, Quart. J.Math. Oxford, 32, 181-191, 1981.

[18] Hannah, John., Regular bisimple rings. Edinburgh Math. Soc. (2) 34 No.1, 89-97, 1991.

[19] Hirano, Yasuyuki. Tominaga, Hisao., Some remarks on bisimple rings, Math. J. Okayama Univ. 24, No.1, 15-19, 1982.

[20] Jacobon, N., Structure of the rings, New York, 1956.

[21] Marki, L. and Stenfeld, O., A generalization of Green's relations in semigroups, Semigroup Forum vol . 1, 74-85, 1974

[22] C.E, Clark; J. H., Carruth. Generalized Green's theories. Semigroup Forum. Vol.20, 95-127, 1980

[23] Wallace, A. D., Relative ideals in semigroups. II. Acta. Math. Sci. Hungaricae 14, 137-148, 1963.

[24] Anscombre, J. C., Sur une extension du lemme sde Green, Lincei-Rend. Sc. Fis.mat. e nat. 55, 650-656, 1973.

[25] Pastijn, F., A representation of a semigroup by a semigroup of matrices over a group with zero, Semigroup Forum 10, 238-249, 1975.

[26] Petro, P. Translacionet e brendshme në unaza dhe Grupi i Shuteberzher-it. Pregatitur për botim.

[27] Satyanarayana, Bh., Contributions to near ring theory, Ph.D Thesis, Nagurayana, University, 1984.

[28] Domo, E., Petro, P., Γ-near-fields and their characterizations by quasi-ideals, International Mathematical Forum, 5, No. 3, 109-116, 2010.

[29] Hestenes. M. R., A ternary algebra with applications to matrices and linear transformations, Arch. Rational Mech. Anal., 11 (1962), 138-194.

[30] Lister, W. G., Ternary Rings, Trans. Amer. Math. Soc. 154 (1971), 35-55.

[31] Kurosh, A. G., Lekcii poobshej algebra, Moska, 1962.

[32] Dickson, L. E. On Semigroup and the general isomorphism between infinite groups, Transc. Amez. Math. Soc., 6, 205-208.

[33] Malik, D. S., Mordeson, J. N., Sen, M.K., Fundamentals of Abstract Algebra, New York, 1997.

[34] Petro, P., Strukturat Algjebrike, Tiranë, 2007.

[35] Petro, P., Baza të Algjebrës Moderne, Tiranë, 1985.

[36] Sushkeviç, A.K. Teorija obobshjenih grup, Harkov, Kiev, 1937.

[37] Nabusawa, N., On a generalization of the ring theory. Osaka J. Math. 1, 81-89, 1964.

[38] Barnes, W. E., On the Γ-rings of Nabusawa, Pacific Journal of Mathematics, 18, No.3, 411-422, 1966.

[39] Sen, M. K., On Γ-semigroups. Proceedings of International Conference of Algebra and its Applications, Deceker Publications, New York, 301, 1981.

[40] Sen, M. K. and Saha, N. K., On Γ-semigroups I, Bull. Cal. Math. Soc. 78, 75-80, 1986.

[41] Dutta, T. K., An introduction to Γ-field, Bull. Cal. Math. Soc., 78, 75-80, 1986.

[42] Dutta T. K and Adhikari, N. C., On Γ-division Ring. An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. I a Mat. 36, 4, 313-318, 1990.