



**REPUBLIKA E SHQIPËRISË  
UNIVERSITETI I TIRANËS  
FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS**

**PROGRAMI I STUDIMIT:  
Metoda Probabilitare, Statistike dhe Metodat e Analizës Numerike**

# **TEZË DOKTORATURE**

**VARËSIA BISHTORE PËR SHPËRNDARJEN –t  
TË ANUAR DHE SHPËRNDARJEN DIRICHLE  
TË ANUAR**

Doktoranti:

**Msc. Faton Merovci**

Udhëheqësi:

**Prof. Dr. Llukan Puka**

Tiranë, 2015



**REPUBLIKA E SHQIPËRISË  
UNIVERSITETI I TIRANËS  
FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS**

**DISERTACION**

**i paraqitur nga**

**Msc. Faton Merovci**

**Udhëhequr nga**

**Prof. Dr. Llukan Puka**

**Për marrjen e gradës shkencore**

**DOKTOR**

**TEZË DOKTORATURE  
VARËSIA BISHTORE PËR SHPËRNDARJEN –t TË ANUAR DHE  
SHPËRNDARJEN DIRICHLE TË ANUAR**

Mbrohet me date .. ...../...../2015 para jurisë

1. Prof. ....Kryetar
2. Prof. ....Anëtar (Oponent)
3. Prof. ....Anëtar (Oponent)
4. Prof. ....Anëtar
5. Prof. ....Anëtar

# Përmbajtja

Lista e Tabelave	vii
Lista e Figurave	viii
Hyrje	x
<b>1 Shpërndarja e beta-Lindley-it: Vetitë dhe aplikimet</b>	<b>1</b>
1.1 Hyrje . . . . .	1
1.2 Disa metoda për gjenerimin e shpërndarjeve të reja . . . . .	1
1.3 Shpërndarja e beta-Lindley-it . . . . .	3
1.4 Përkufizimi i shpërndarjes beta-Lindley-it . . . . .	4
1.5 Momentet . . . . .	7
1.6 Statistikat e renditura . . . . .	10
1.7 Vlerësimi i parametrave . . . . .	11
1.7.1 Metoda e përgjasisë maksimale . . . . .	11
1.7.2 Vlerësimi sipas metodës së Bayes-it . . . . .	13
1.8 Aplikimi . . . . .	16
1.8.1 Simulimi i të dhënave . . . . .	20
<b>2 Shpërndarja Kumaraswamy e Lindley-it: Vetitë dhe aplikimet</b>	<b>24</b>
2.1 Hyrje . . . . .	24
2.2 Gjenerimi i shpërndarjes Kumaraswamy-Lindley . . . . .	25
2.3 Momentet dhe funksioni gjenerues . . . . .	25
2.4 Analiza e besueshmërisë (ang. Reliability Analysis) . . . . .	29
2.5 Statistika e renditur për shpërndarjen Kw-Lindley . . . . .	31
2.6 Vlerësimi parametrave . . . . .	33
2.6.1 Metoda e përgjasisë maksimale . . . . .	33
2.7 Vlerësimi i parametrave sipas Bayes-it . . . . .	37
2.8 Aplikimi i shpërndarjes Kw-Lindley . . . . .	39
<b>3 Shpërndarja e përgjithësuar inverse e Lindley-it</b>	<b>44</b>
3.1 Hyrje . . . . .	44

3.2	Shpërndarje e përgjithësuar inverse e Lindley-it . . . . .	46
3.3	Momentet dhe vlera e dispersionit dhe asimetrisë . . . . .	49
3.4	Kuantilet . . . . .	51
3.5	Renditja stokastike (e rastit) . . . . .	52
3.6	Entropia e Renyi-t . . . . .	53
3.7	Besueshmëria e fuqisë së komponentëve . . . . .	54
3.8	Procedurat e vlerësimit të parametrave . . . . .	55
3.8.1	Metoda e përgjasisë maksimale . . . . .	55
3.8.2	Vlerësimi i parametrave me metodën maksimale të prodhimit të distancave . . . . .	57
3.8.3	Vlerësimi i parametrave me metodën e katrorëve të vegjël . . . . .	57
3.9	Disa përgjithësime . . . . .	58
3.9.1	GILD në fuqi. . . . .	58
3.9.2	Shpërndarja beta-GILD . . . . .	59
3.9.3	Shpërndarja Kumaraswamy-GILD . . . . .	60
3.10	Algoritmet për simulim dhe studim . . . . .	61
3.10.1	Transformimet e ndryshoreve të rastit . . . . .	61
3.10.2	Metoda inverse e CDF . . . . .	61
3.10.3	Simulimet . . . . .	62
3.11	Modelimi me të dhëna reale . . . . .	64
3.12	R-codi për gjenerime të zgjedhjeve . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Shpërndarja e Weibull-Rayleigh-it: Vetitë dhe aplikimet</b>	<b>70</b>
4.1	Hyrje . . . . .	70
4.1.1	Vetitë matematikore. . . . .	73
4.2	Shpërndarja e Weibull-Rayleigh-it . . . . .	73
4.3	Vetitë statistikore . . . . .	74
4.3.1	Funksioni i kuantilit dhe Simulimet . . . . .	74
4.3.2	Asimetria dhe sheshësia . . . . .	74
4.3.3	Momentet . . . . .	75
4.4	Shpërndarja e statistikës së renditur . . . . .	76
4.5	Vlerësimi i parametrave me metodën e katrorëve më të vegjël . . . . .	78
4.6	Vlerësimi i parametrave me metoden e përgjasisë maksimale . . . . .	79

4.7	Aplikimi . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Shpërndarja e anuar normale, <math>t</math>-e anuar dhe Dirichle. Varësia bish-</b>	
	<b>tore</b>	<b>87</b>
5.1	Hyrje . . . . .	87
5.2	Shpërndarja normale e anuar . . . . .	88
5.3	Momentet e shpërndarjes normale të anuar univariate . . . . .	90
5.4	Shpërndarja asimetrike normale me shumë variabla . . . . .	93
5.5	Shpërndarja e anuar $t$ . . . . .	93
5.6	Shpërndarja Dirichle . . . . .	98
	<b>Literatura</b>	<b>102</b>

# Lista e Tabelave

1.1	Koha e dhimbjes (në muaj) e pacientëve me kancer . . . . .	17
1.2	Vlerësimet e parametrave, gabimi standard dhe Log-likelihood si dhe vlerësuesit LSE për të dhënat 1 . . . . .	17
1.3	Kriteret e krahasimit: $\ell$ , AIC dhe CAIC për të dhënat 1 . . . . .	18
1.4	Vlerësimi i parametrave, gabimi standard dhe funksioni i përgjasisë maksimale për të dhënat 2 . . . . .	19
1.5	Kriteret e krahasimit: $-2\ell$ , AIC dhe CAIC për modelet bazuar në të dhënat 2 . . . . .	20
1.6	Vlerësimet e Bayesit dhe intervali 95% HPD . . . . .	21
2.1	Koha e stagnimit të virusit tek pacientët . . . . .	39
2.2	ML, gabimi standard dhe funksioni Log-likelihood për të dhënat 1 . . . . .	40
2.3	Kriteret e krahasimit për të dhënat 1 . . . . .	40
2.4	ML, gabimi standard dhe funksioni Log-likelihood për të dhënat 2 . . . . .	40
2.5	Kriteret e krahasimit për të dhënat 2 . . . . .	41
2.6	Vlerësimet e Bayes-it dhe intervalet kredibile 95% HPD. . . . .	41
3.1	Vlerësimi i parametrave së bashku me gabimet mesatare katrore (në rreshtin e II-të të secilës qelizë) me zgjedhje që kanë vëllime të ndryshme . . . . .	63
3.2	Të dhënat për nivelin e përmytjeve . . . . .	64
3.3	Vlerësimet e parametrave me MLE, Log-likelihoods, AIC, BIC, K-S dhe rangimet [1(më i miri) deri 7( më i keqi)] të modeleve të shqyrtuara . . . . .	66
4.1	Vlerësuesit me metodën e përgjasisë maksimale, katorëve më të vegjël dhe gabimet standarde për të dhënat e shqyrtura . . . . .	83
4.2	Kriteret e krahasimit për Weibull-Rayleigh-in . . . . .	83

# Lista e figurave

1.1	Densiteti i shpërndarjes Beta e Lindley-it për vlera të ndryshme të parametrave. . . . .	5
1.2	Densiteti i shpërndarjes Beta e Lindley-it për vlera të ndryshme të parametrave. . . . .	7
1.3	Densitetet e modeleve për të dhënat 1. . . . .	19
1.4	Densitetet e modeleve për të dhënat 2. . . . .	21
1.5	Densitetet posteriore për të dhënat 1 për parametrat $\alpha, \beta$ dhe $\theta$ . . . .	23
1.6	Densitetet posteriore për të dhënat 2 për parametrat $\alpha, \beta$ dhe $\theta$ . . . .	23
2.1	Densiteti i shpërndarjes Kumaraswamy-Lindley për vlera të ndryshme. . . . .	26
2.2	Funksioni i shpërndarjes Kumaraswamy-Lindley për vlera të ndryshme.. . . .	26
2.3	Funksioni i besueshmërisë për shpërndarjen Kumaraswamy-Lindley . . . . .	30
2.4	Funksioni i Hazardit për shpërndarjen Kumaraswamy-Lindley . . . . .	31
2.5	Densiteti i modeleve për të dhënat 1. . . . .	42
2.6	Densiteti i modeleve për të dhënat 2. . . . .	42
2.7	Densiteti posteriori për parametrat $\alpha, \beta$ dhe $\theta$ për të dhënat 1. . . . .	43
2.8	Densiteti posteriori për parametrat $\alpha, \beta$ dhe $\theta$ për të dhënat 2. . . . .	43
3.1	Densiteti për vlera të ndryshme të parametrave . . . . .	48
3.2	Grafiku i funksionit të Hazardit për vlera të ndryshme të parametrave . . . . .	48
4.1	Funksioni i përgjasisë maksimale për parametrin $\alpha$ për të dhënat . . . . .	85
4.2	Grafikët e densiteteve që paraqesin densitetin empirik me densitetet e shpërndarjeve të shqyrtuara . . . . .	85
4.3	Grafikët PP për Weibull-Rayleigh dhe Weibull për të dhënat . . . . .	86
4.4	Funksionet e shpërndarjes empirike, Weibull-Rayleigh-it, Weibullit në fuqi dhe Weibullit për të dhënat . . . . .	86

5.1	Densiteti i shpërndarjes së anuar normale . . . . .	88
-----	---	----

# Hyrje

Në këtë tezë doktore janë shtjelluar disa metoda për gjenerimin e shpërndarjeve të reja dhe studimin e vetive të tyre. Punimi përmban pesë kapituj, katër prej të cilëve përmbajnë vetëm rezultatet origjinale të autorit.

Në kapitullin e parë kemi përkufizuar një shpërndarje të re të tipit të vazhdueshëm, të quajtur shpërndarja e beta-Lindley-it që bënë zgjerimin e shpërndarjes së Lindley-it. Do të jepen disa veti matematikore të kësaj shpërndarje dhe do të tregohen momentet dhe funksioni gjenerues. Shprehje të ndryshme me të thjeshta do të tregohen për densitetin, momentet e funksionit gjenerues dhe momentet për statistikat e renditura. Vlerësimi i parametrave për këtë shpërndarje do të bëhet me metoda klasike si është ajo e përgjasisë maksimale dhe me metoda bashkëkohore si ajo e Bayesit. Aplikimin e modelit të ri e kemi ilustruar me dy shembuj me të dhëna reale. Shpresojmë se kjo shpërndarje e propozuar do të shërbejë si një model alternativ me shpërndarjet ekzistuese për modelimin e të dhënave reale pozitive në shumë fusha të ndryshme të shkencës.

Në kapitullin e dytë, kemi përkufizuar shpërndarjen e quajtur shpërndarja e Kumaraswamy të Lindley-it. Do të jepen disa veti matematikore të kësaj shpërndarje dhe do të tregohen momentet dhe funksioni gjenerues. Shprehje të ndryshme me të thjeshta do të tregohen për densitetin, momentet e funksionit gjenerues dhe momentet për statistikat e renditura. Vlerësimi i parametrave për këtë shpërndarje do të bëhet me metoda klasike si është ajo e përgjasisë maksimale dhe me metoda bashkëkohore si ajo e Bayesit. Aplikimin e modelit të ri e kemi ilustruar me dy shembuj me të dhëna reale.

Në kapitullin e tretë, kemi futur një version të shpërndarjes inverse të Lindley-it dhe përgjithësimin e saj të quajtur: shpërndarja e përgjithësuar inverse e Lindley-it. Janë paraqitur disa veti statistikore si: momentet, funksioni i kuantiles, entropia,

radhitja stokastike. Tri metoda të vlerësimit: metoda e përgjasisë maksimale, metoda e katrorëve të vegjël dhe metoda e vlerësimit prodhimit maksimal janë përdorur për vlerësimin e parametrave të panjohur tek kjo shpërndarje. Dy algoritme janë propozuar për gjenerimin e mostrave të rastit nga shpërndarja e propozuar dhe kodi në R është dhënë poashtu. Për më tepër, simulimet janë përdorur për të studiuar sjelljen e parametrave të vlerësuar. Në vazhdim kemi dhënë disa përgjithësime të shpërndarjes së përgjithësuar inverse të Lindley-it si GILD në fuqi, beta-GILD dhe Kumaraswamy-GILD janë sugjeruar për përdorim kur shpërndarja e sugjeruar nuk është kompatible për të dhënat që studiohen. Në fund, aplikimi i shpërndarjes së propozuar është demonstruar me një bashkësi të dhënash reale dhe kemi krahasuar me shpërndarjes tjera inverse me dy parametra.

Në kapitullin e katërt, kemi paraqitur modelin e shpërndarjes me tre-parametra të quajtur shpërndarja e Weibull-Rayleigh-it. Do të studiojmë disa nga vetitë matematikore të saj. Për më tepër do të jepen: Momentet, funksioni gjenerues, Statistika e renditur. Metoda e përgjasisë maksimale dhe metoda e katrorëve të vegjël do të merren për të bërë vlerësimin e parametrave kur matrica e informacionit është dhënë. Do të ilustrojmë këtë model përmes aplikimit me të dhëna reale.

Në kapitullin e pestë, kemi dhënë përkufizimet e shpërndarjes normale të anuar, pastaj disa modifikime që janë bërë viteve të fundit si dhe disa veti statistikore të kësaj shpërndarje. Pastaj janë paraqitur shpërndarjet e anuara t dhe Dirichle, si dhe koeficientët e varësisë bishtore të këtyre shpërndarjeve.

**Falenderim:** Falënderoj udhëheqësin tim shkencor Prof. Dr. Llukan Puka për përkrahjen e tij, sugjerimet dhe inkurajimin gjatë hartimit të këtij disertacioni.

# Kapitulli 1

## Shpërndarja e beta-Lindley-it: Vetitë dhe aplikimet

### 1.1 Hyrje

Në shumë shkenca aplikative si mjekësi, inxhinieri dhe financa, dhe shume të tjera, modelimi dhe analizimi i të dhënave janë me rëndësi të veçantë. Shumë shpërndarje të ndryshme kemi për t'i modeluar këto të dhëna. Cilësia e procedurës së përdorur në analizat statistikore varet shumë nga shpërndarja që është zgjedhur për të modeluar këto të dhëna. Megjithatë, ka ende mjaft të dhëna reale që nuk iu përshtatet ndonjë shpërndarje klasike apo ndonjë model standard. Andaj lind nevoja për gjenerimin e shpërndarjeve të reja.

### 1.2 Disa metoda për gjenerimin e shpërndarjeve të reja

Metodat e propozuara për gjenerimin e shpërndarjeve të vazhdueshme mund të përmbledhen si mëposhtë:

- Metoda e ekuacioneve diferenciale:

Kjo metodë e gjenerimit të shpërndarjeve njihet edhe si sistemi i Pearson-it që gjeneron shpërndarjet e reja ashtu që për çdo densitet  $f(x)$  plotësohet ekuacioni

diferencial:

$$\frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} = \frac{a+x}{b_0 + b_1x + b_2x^2} \quad (1.2.1)$$

ku  $a, b_0, b_1$  and  $b_2$  janë parametra.

- Burr propozoi një metodë tjetër, po ashtu të bazuar në ekuacione diferenciale. Sistemi i shpërndarjeve plotëson ekuacionin diferencial:

$$dF(x) = F(1 - F)g(x)dx \quad (1.2.2)$$

ku  $0 \leq F \leq 1$  dhe  $g(x)$  është funksion jonegativ mbi  $x$ . Janë dhënë dy mbëdhjetë zgjidhje në lidhje me (1.2.2) në formë të funksioneve të shpërndarjes.

- Dunning dhe Hanson propozuan përgjithësimin e sistemit të Pearson-it duke marrë ekuacionin diferencial në trajtën

$$\frac{df_X(x)}{dx} = \frac{(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m)f_X(x)}{(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n)}. \quad (1.2.3)$$

- Metoda e transformimeve. Johnson propozoi një sistem për gjenerimin e shpërndarjeve duke përdorur transformimet e normalizimit në trajtë të përgjithshme:

$$Z = \gamma + \delta f\left(\frac{X - \xi}{\lambda}\right) \quad (1.2.4)$$

Ai propozoi tri funksione transformuese

- 1. Familja lognormale:

$$Z = \gamma + \delta \ln(X - \xi), X \geq \xi$$

- 2. Familja e shpërndarjeve të kufizuara:

$$Z = \gamma + \delta \ln\left(\frac{X - \xi}{\xi + \lambda - X}\right), \xi \leq X \leq \xi + \lambda$$

- 3. Familja e shpërndarjeve të pakufizuara:

$$Z = \gamma + \delta \ln \left\{ \frac{X - \xi}{\lambda} + \left[ \left( \frac{X - \xi}{\lambda} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}, \xi \leq X \leq \xi + \lambda$$

- Metoda e kuartileve është përdorur për shpërndarjen lambda:

$$f(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1 - y)^{\lambda_4 - 1}}, \quad x = Q(y) \quad (1.2.5)$$

### 1.3 Shpërndarja e beta-Lindley-it

Në vitin 2002 Eugene e të tjerë [30], propozuan gjenerimin e një shpërndarje të përshtatshme duke iu shtuar dy parametra shtesë. Disa autor botuan punime me këtë lloj metodologjie si Eugene dhe të tjerë [30], Nadarajah dhe Kotz [96], Nadarajah me Gupta [97] dhe Nadarajah me Kotz [98] propozuan shpërndarjet: beta-normale, beta-Gumbel, beta-Frechet dhe beta-eksponenciale, respektivisht. Jones [52] ka bërë një diskutim të përgjithësuar të familjes së shpërndarjes beta të motivuar nga statistikat e renditura dhe ka treguar veti interesante dhe potenciale për aplikime statistikore.

Së fundmi, Barreto-Souza dhe të tjerë [11] kanë propozuar shpërndarjen beta-e përgjithësuar eksponenciale, Pescim dhe të tjerë [113] beta-e përgjithësuar gjysmë normale, Cordeiro dhe të tjerë [19] kanë definuar beta-përgjithësuar Rayleigh me aplikime në të dhëna reale, Merovci dhe Sharma kanë definuar shpërndarjen beta e Lindley-it [71].

Në këtë kapitull do të paraqesim një përgjithësim të ri të shpërndarjes së Lindley-it të quajtur shpërndarja e beta-Lindley-it [71]. Shpërndarja e Lindley-it fillimisht është propozuar nga Lindley në kuadër të statistikës së Bayesit.

**Përkufizimi 1.3.1.** [105] Variabla e rastit themi se ka shpërndarje të Lindley-it me parametrin  $\theta$  nëse densiteti i saj jepet me:

$$f(x, \theta) = \frac{\theta^2}{\theta + 1} (1 + x) e^{-\theta x}, \quad x > 0, \theta > 0. \quad (1.3.1)$$

Funksioni i shpërndarjes jepet me:

$$F(x) = 1 - \frac{\theta + 1 + \theta x}{\theta + 1} e^{-\theta x}, \quad x > 0, \theta > 0 \quad (1.3.2)$$

Ghitany dhe të tjerë [40] kanë diskutuar vetitë statistikore të shpërndarjes së Lindley-it dhe kanë treguar se aplikimi i kësaj shpërndarje me të dhëna reale është me i mirë në krahasim me shpërndarjen eksponenciale.

Ky kapitull është organizuar si me poshtë: Në paragrafin e dytë jepet një hyrje e shpërndarjes së beta-Lindley-it dhe është demonstruar fleksibiliteti i densitetit për vlera të ndryshme të parametrave, funksioni i shpërndarjes dhe hazardit. Momentet dhe statistikat e renditura nga shpërndarja e beta-Lindley-it janë paraqitur ne paragrafët 3 dhe 4, respektivisht. Në paragrafin 5, metoda e përgjasisë maksimale dhe metoda e katrorëve të vegjël së bashku me metodën e Bayesit janë dhënë për vlerësimin e parametrave statistikor. Për të demonstruar aplikimin e shpërndarjes së diskutuar, janë marrë në shqyrtim dy të dhëna reale në paragrafin 6. Algoritmi për simulim është paraqitur po ashtu në paragrafin 6. Një rezyme e këtij kapitulli është dhënë në paragrafin 7.

## 1.4 Përkufizimi i shpërndarjes beta-Lindley-it

Le të jetë  $F(x)$  funksioni i shpërndarjes për ndryshoren e rastit  $X$ , atëherë funksioni i shpërndarjes për familjen e përgjithësuar nga Eugene dhe të tjerë [30], është:

$$G(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^{F(x)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt, \quad 0 < \alpha, \beta < \infty \quad (1.4.1)$$

Densiteti korrespondues në lidhje me  $G(x)$  është:

$$g(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} [F(x)]^{\alpha-1} [1 - F(x)]^{\beta-1} g(x) \quad (1.4.2)$$

ku  $g(x) = dG(x)/dx$  është densiteti bazë, ndërsa  $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$  është funksioni beta. Tani do të përkufizojmë shpërndarjen e beta-Lindley-it (BL) duke zëvendësuar

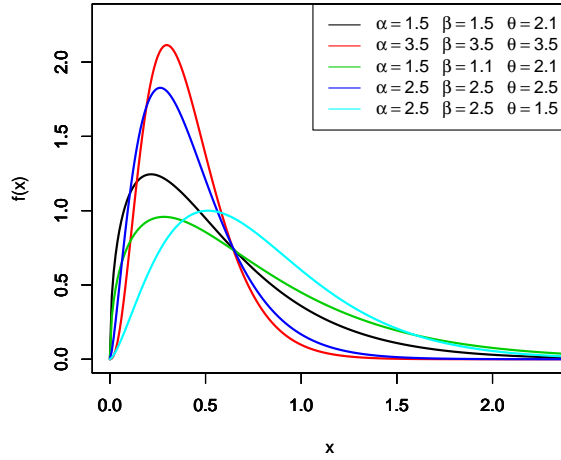


Fig. 1.1: Densiteti i shpërndarjes Beta e Lindley-it për vlera të ndryshme të parametereve.

$G(x)$  të dhënë me (1.4.1) tek funksioni i shpërndarjes (1.3.2). Pra, funksioni i shpërndarjes BL është:

$$G(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^{1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x}} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt, \quad x > 0. \quad (1.4.3)$$

**Përkufizimi 1.4.1.** [71] Themë se ndryshorja e rastit  $X$ , ka shpërndarje beta të Lindley-it nëse densiteti i saj jepet me:

$$g(x) = \frac{\theta^2(\theta+1+\theta x)^{\beta-1}(1+x)e^{-\theta\beta x}}{B(\alpha, \beta)(\theta+1)^\beta} \left[ 1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x} \right]^{\alpha-1} \quad (1.4.4)$$

Figura 1.1 ilustron disa forma të ndryshme të densitetit të shpërndarjes BL për vlera të ndryshme të parametereve  $\alpha, \beta$  dhe  $\theta$ , respektivisht.

Densiteti (1.4.3) mund të shprehet në termat e funksionit hipergjeometrik (shih, Cordeiro dhe Nadarajah [20]) në formën e mëposhtme:

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{F(x)^\alpha}{\alpha B(\alpha, \beta)} {}_2F_1(\alpha, 1-\beta; \alpha+1; F(x)) \\ &= \frac{\left(1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x}\right)^\alpha}{\alpha B(\alpha, \beta)} {}_2F_1\left(\alpha, 1-\beta; \alpha+1; 1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x}\right) \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Do të japim dy forma më të thjeshta për funksionin e shpërndarjes së BL varur nga fakti se parametri  $\beta > 0$  është numër real jo i plotë ose numër i plotë. Së pari nëse  $|z| < 1$  dhe  $\beta > 0$  është numër real jo i plotë, kemi:

$$(1 - z)^{\beta-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - j) j!} z^j. \quad (1.4.6)$$

Duke përdorur shprehjen (1.4.6) në (1.4.3) funksioni i shpërndarjes për BL kur  $\beta > 0$  është numër real jo i plotë:

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{B(\alpha, \beta)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(\beta - j) j!} \int_0^{1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1}} w^{\alpha+j-1} dw \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{B(\alpha, \beta)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(\beta - j)(\alpha + j) j!} \left[ 1 - \frac{\theta + 1 + \theta x}{\theta + 1} e^{-\theta x} \right]^{\alpha+j} \end{aligned}$$

dhe

$$G(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left[ 1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x} \right]^{\alpha+j}}{\Gamma(\beta - j)(\alpha + j) j!} \quad (1.4.7)$$

Duke përdorur shprehjen binomiale në (1.4.3), kur  $\beta > 0$  është i plotë kemi:

$$G(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \sum_{j=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{j} \frac{(-1)^j \left[ 1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x} \right]^{\alpha+j}}{a + j} \quad (1.4.8)$$

**Lemë 1.4.1.** [71] Nëse  $\alpha = \beta = 1$ , BL në ekuacionin (1.4.4) reduktohet në shpërndarjen e Lindley-it me ekuacionin (1.3.1) me parametër  $\theta$ .

**Lemë 1.4.2.** [71] Kur  $\beta = 1$ , BL të dhënë me ekuacionin (1.4.4) reduktohet në shpërndarjen e përgjithësuar të Lindley-it GLD( $\alpha, \theta$ ) propozuar nga Nadarajah dhe të tjerë [99].

**Lemë 1.4.3.** [71] Limiti i densitetit për shpërndarjen e beta-Lindley-it kur  $x \rightarrow \infty$  është 0 dhe limiti kur  $x \rightarrow 0$  është 0.

*Vërtetim.* Rrjedh drejtëpërdrejt duke vepruar me limit tek densiteti i dhënë me (1.4.4).  $\square$

Funksioni i besueshmërisë  $R(t)$ , që paraqet probabilitetin se një njësi nuk dështon deri në kohën  $t$ , përkufizohet me  $R(t) = 1 - F(t)$ . Funksioni i besueshmërisë i

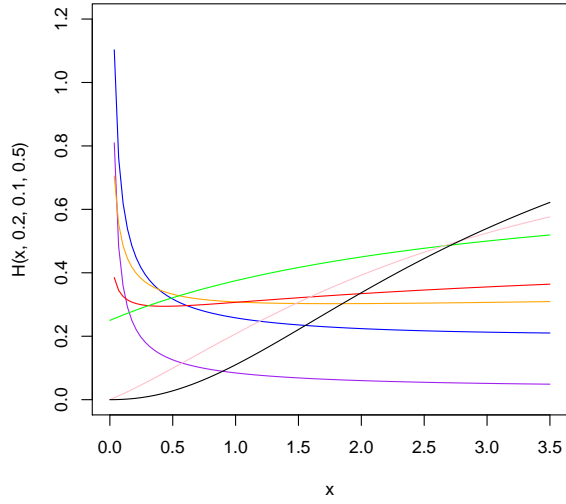


Fig. 1.2: Densiteti i shpërndarjes Beta e Lindley-it për vlera të ndryshme të parametereve.

shpërndarjes beta-Lindley jepet me:

$$R(t, \theta, \alpha, \beta) = 1 - \frac{\left(1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x}\right)^\alpha}{\alpha B(\alpha, \beta)} {}_2F_1\left(\alpha, 1 - \beta; \alpha + 1; 1 - \frac{\theta + 1 + \theta x}{\theta + 1} e^{-\theta x}\right)$$

Karakteristikë tjetër më interes për ndryshoren e rastit është funksioni i raportit të hazardit i përkufizuar me  $h(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$ . Mund të interpretohet si probabiliteti me kusht i dështimit, me kushtin që ka mbijetuar deri në kohën  $t$ . Funksioni i raportit të hazardit për shpërndarjen beta-Lindley-it jepet me

$$h(t, \theta, \alpha, \beta) = \frac{\frac{\theta^2(\theta+1+\theta x)^{\beta-1}(1+x)e^{-\theta\beta x}}{B(\alpha, \beta)(\theta+1)^\beta} \left[1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x}\right]^{\alpha-1}}{1 - \frac{\left(1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x}\right)^\alpha}{\alpha B(\alpha, \beta)} {}_2F_1\left(\alpha, 1 - \beta; \alpha + 1; 1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x}\right)}$$

Figura 1.2 ilustron disa forma të ndryshme të funksionit të hazardit të shpërndarjes së beta-Lindley-it për vlera të ndryshme të parametereve  $\alpha, \beta$  dhe  $\theta$ , respektivisht.

## 1.5 Momentet

**Teoremë 1.5.1.** [71] *Momenti i rendit  $k$ -të  $E(X^k)$  të shpërndarjes beta-Lindley-it për ndryshoren e rastit  $X$  jepet me*

a) Nëse  $\alpha > 0, \beta > 0$  janë numra real jo të plotë:

$$\begin{aligned}
E(X^k) &= \frac{\Gamma^2(\alpha + \beta)}{\Gamma(\beta)\theta^k} \\
&\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j} e^{(\beta+j)(\theta+1)}}{\Gamma(\alpha - j)\Gamma(i - 1)\Gamma(\alpha + \beta - i)(\theta + 1)^{\beta+j-i} j! (\beta + j)^{\alpha+\beta+k-i}} \\
&\times [\theta\Gamma(k - i + \alpha + \beta, (\theta + 1)(\beta + j)) \\
&+ \frac{1}{(\beta + j)}\Gamma(k - i + \alpha + \beta + 1, (\theta + 1)(\beta + j))] \quad (1.5.1)
\end{aligned}$$

b) Nëse  $\alpha > 0, \beta > 0$  janë numra realë të plotë:

$$\begin{aligned}
E(X^k) &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)\theta^k} \sum_{j=0}^{\alpha-1} \sum_{i=0}^{\beta+j-1} \binom{\alpha-1}{j} \binom{\beta+j-1}{i} \frac{(-1)^{i+j} e^{(\beta+j)(\theta+1)}}{(\theta + 1)^{\beta+j-i} j! (\beta + j)^{\alpha+\beta+k-i}} \\
&\times [\theta\Gamma(k - i + \alpha + \beta, (\theta + 1)(\beta + j)) \\
&+ \frac{1}{(\beta + j)}\Gamma(k - i + \alpha + \beta + 1, (\theta + 1)(\beta + j))] \quad (1.5.2)
\end{aligned}$$

Vërtetim.

$$\begin{aligned}
E(X^k) &= \int_0^{\infty} x^k f(x) dx = \frac{\theta^2}{B(\alpha, \beta)(\theta + 1)^\beta} \\
&\cdot \int_0^{\infty} x^k (\theta + 1 + \theta x)^{\beta-1} (1 + x) e^{-\theta\beta x} \left[1 - \frac{\theta + 1 + \theta x}{\theta + 1} e^{-\theta x}\right]^{\alpha-1} dx \\
&= \frac{\theta}{B(\alpha, \beta)(\theta + 1)^\beta} \\
&\cdot \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{\theta}\right)^k (\theta + 1 + t)^{\beta-1} \left(\frac{\theta + t}{\theta}\right) e^{-\beta t} \left[1 - \frac{\theta + 1 + t}{\theta + 1} e^{-t}\right]^{\alpha-1} dt
\end{aligned}$$

a) Nëse  $\alpha > 0, \beta > 0$  janë numra realë jo të plotë duke përdorur (1.4.6) dhe shprehjen e përgjithësuar të binomit, kemi:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{B(\alpha, \beta)\theta^k(\theta + 1)^{\beta+j}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(\alpha - j)j!} \\
&\times \left[ \theta \int_0^{\infty} t^k (\theta + 1 + t)^{\alpha+\beta-1} e^{-(\beta+j)t} dt + \int_0^{\infty} t^{k+1} (\theta + 1 + t)^{\alpha+\beta-1} e^{-(\beta+j)t} dt \right] dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{B(\alpha, \beta)\theta^k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(\alpha - j)(\theta + 1)^{\beta+j}j!} e^{(\beta+j)(\theta+1)} \\
&\times \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta - i)\Gamma(i - 1)} (-1)^i (\theta + 1)^i \\
&\times \left[ \theta \int_{\theta+1}^{\infty} t^{k-i+\alpha+\beta-1} e^{-(\beta+j)t} dt + \int_{\theta+1}^{\infty} t^{k-i+\alpha+\beta} e^{-(\beta+j)t} dt \right] \\
\int_{\theta+1}^{\infty} t^{k-i+\alpha+\beta-1} e^{-(\beta+j)t} dt &= \frac{1}{(\beta + j)^{k-i+\alpha+\beta}} \int_{(\theta+1)(\beta+j)}^{\infty} s^{k-i+\alpha+\beta-1} e^{-s} ds \\
&= \frac{1}{(\beta + j)^{k-i+\alpha+\beta}} \Gamma(k - i + \alpha + \beta, (\theta + 1)(\beta + j))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^k) &= \frac{\Gamma(\alpha)}{B(\alpha, \beta)\theta^k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(\alpha - j)(\theta + 1)^{\beta+j}j!} e^{(\beta+j)(\theta+1)} \\
&\times \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta - i)\Gamma(i - 1)} (-1)^i (\theta + 1)^i \\
&\times \frac{1}{(\beta + j)^{k-i+\alpha+\beta}} \left[ \theta \Gamma(k - i + \alpha + \beta, (\theta + 1)(\beta + j)) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(\beta + j)} \Gamma(k - i + \alpha + \beta + 1, (\theta + 1)(\beta + j)) \right]
\end{aligned}$$

Kështu që,

$$\begin{aligned}
E(X^k) &= \frac{\Gamma^2(\alpha + \beta)}{\Gamma(\beta)\theta^k} \\
&\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j} e^{(\beta+j)(\theta+1)}}{\Gamma(\alpha - j)\Gamma(i - 1)\Gamma(\alpha + \beta - i)(\theta + 1)^{\beta+j-i}j!(\beta + j)^{\alpha+\beta+k-i}} \\
&\times [\theta \Gamma(k - i + \alpha + \beta, (\theta + 1)(\beta + j)) \\
&\quad + \frac{1}{(\beta + j)} \Gamma(k - i + \alpha + \beta + 1, (\theta + 1)(\beta + j))]
\end{aligned}$$

b) Nëse  $\alpha > 0, \beta > 0$  janë numra të plotë duke përdorur të njëjtën metodologji dhe

shprehjen për binomin kemi:

$$\begin{aligned}
E(X^k) &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)\theta^k} \\
&\sum_{j=0}^{\alpha-1} \sum_{i=0}^{\beta+j-1} \binom{\alpha-1}{j} \binom{\beta+j-1}{i} \frac{(-1)^{i+j} e^{(\beta+j)(\theta+1)}}{(\theta+1)^{\beta+j-i} j! (\beta+j)^{\alpha+\beta+k-i}} \\
&\times [\theta \Gamma(k-i+\alpha+\beta, (\theta+1)(\beta+j)) \\
&+ \frac{1}{(\beta+j)} \Gamma(k-i+\alpha+\beta+1, (\theta+1)(\beta+j))]
\end{aligned}$$

□

**Teoremë 1.5.2.** [71] *Le të jetë  $X$  ndryshore e rastit që ka shpërndarje beta-Lindley. Atëherë momentet e funksionit gjenerues të  $X$ , themi  $M_X(t)$ , janë*

$$M_X(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r E(X^r)}{r!}.$$

*Vërtetim.*

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} \exp(tx) f(x) dx & (1.5.3) \\
&= \int_0^{\infty} \left( 1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2!} + \dots + \frac{t^n x^n}{n!} + \dots \right) f(x) dx \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r E(X^r)}{r!}.
\end{aligned}$$

Tani duke zëvendësuar (1.5.1) në (1.5.3) dhe (1.5.2) në (1.5.3) fitojmë momentet e funksionit gjenerues për shpërndrjen beta-Lindley-it. □

## 1.6 Statistikat e renditura

Statistika e renditur e rendit të  $k$ -të nga një mostër është vlera e vogël e saj e  $k$ -të. Për shembull nga mostra me vëllim  $n$ , statistika e renditur e  $n$ -të ose statistika e renditur më e madhe është maksimumi, pra

$$X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$

Amplituda është diferenca në mes maksimumimit dhe minimumit. Pra,

$$\text{range}\{X_1, \dots, X_n\} = X_{(n)} - X_{(1)}.$$

Dijmë që  $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  shënon statistiken e renditur të mostrës së rastit  $X_1, \dots, X_n$  nga një popullim me funksion shpërndarjeje  $F_X(x)$  dhe me densitet  $f_X(x)$ . Atëherë densiteti  $X_{(j)}$  jepet me

$$f_{X_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} f_X(x) (F_X(x))^{j-1} (1 - F_X(x))^{n-j},$$

për  $j = 1, \dots, n$ . Densiteti i  $j$ -të i statistikës së renditur për shpërndarjen e beta-Lindley-it jepet me:

$$f_{X_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \frac{\theta^2(\theta+1+\theta x)^{\beta-1}(1+x)e^{-\theta\beta x}}{B(\alpha, \beta)(\theta+1)^\beta} \left[1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x}\right]^{\alpha-1} \left(\frac{(1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x})^\alpha}{\alpha B(\alpha, \beta)} {}_2F_1(\alpha, 1-\beta; \alpha+1; 1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x})\right)^{j-1} \left(1 - \frac{(1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x})^\alpha}{\alpha B(\alpha, \beta)} {}_2F_1(\alpha, 1-\beta; \alpha+1; 1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x})\right)^{n-j},$$

Kështu që, densiteti i statistikës së renditur  $X_{(n)}$  është

$$f_{X_{(n)}}(x) = n \frac{\theta^2(\theta+1+\theta x)^{\beta-1}(1+x)e^{-\theta\beta x}}{B(\alpha, \beta)(\theta+1)^\beta} \left[1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x}\right]^{\alpha-1} \left(\frac{(1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x})^\alpha}{\alpha B(\alpha, \beta)} {}_2F_1(\alpha, 1-\beta; \alpha+1; 1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x})\right)^{n-1},$$

dhe densiteti i statistikës së renditur  $X_{(1)}$  është:

$$f_{X_{(1)}}(x) = n \frac{\theta^2(\theta+1+\theta x)^{\beta-1}(1+x)e^{-\theta\beta x}}{B(\alpha, \beta)(\theta+1)^\beta} \left[1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x}\right]^{\alpha-1} \left(1 - \frac{(1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x})^\alpha}{\alpha B(\alpha, \beta)} {}_2F_1(\alpha, 1-\beta; \alpha+1; 1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x})\right)^{n-1},$$

## 1.7 Vlerësimi i parametrave

### 1.7.1 Metoda e përgjasisë maksimale

Metoda e përgjasisë maksimale për vlerësimin e parametrave është diskutuar për shpërndarjen e beta-Lindley-it si mëposhtë: Funkcioni i përgjasisë maksimale nga

mostra  $\tilde{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  me vëllim  $n$  që kanë densitet të dhënë me (1.4.4), është:

$$L = \left[ \frac{\theta^2}{B(\alpha, \beta)(\theta + 1)^\beta} \right]^n e^{-\theta \beta \sum_{i=1}^n x_i} \times \prod_{i=1}^n (1 + x_i)(\theta + 1 + \theta x_i)^{\beta-1} \left( 1 - \frac{\theta + 1 + \theta x_i}{\theta + 1} e^{-\theta x_i} \right) \quad (1.7.1)$$

Funksioni korrespondues logaritmik i përgjasisë maksimale është:

$$\begin{aligned} \ell = \ln L &= n(2 \log(\theta) - \log \Gamma(\alpha) - \log \Gamma(\beta) + \log \Gamma(\alpha + \beta) - \beta \log(\theta + 1)) \\ &+ \sum_{i=1}^n \log(1 + x_i) + (\beta - 1) \log(\theta + 1 + \theta x_i) - \theta \beta \sum_{i=1}^n x_i \\ &+ (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log \left( 1 - \frac{\theta + 1 + \theta x_i}{\theta + 1} e^{-\theta x_i} \right) \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

Duke konsideruar

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = 0, \quad \text{dhe} \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0,$$

kemi

$$\begin{aligned} n\psi(\alpha + \beta) - n\psi(\alpha) + \sum_{i=1}^m \ln \left( 1 - \frac{(\theta + 1 + \theta x_i) e^{-\theta x_i}}{\theta + 1} \right) &= 0, \\ n\psi(\alpha + \beta) - n\psi(\beta) - n \log(\theta + 1) + \sum_{i=1}^n \log(\theta + 1 + \theta x_i) - \theta \sum_{i=1}^n x_i &= 0, \\ \frac{2m}{\theta} - \frac{m\beta}{\theta + 1} + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{1 + x_i}{\theta + 1 + \theta x_i} - \beta \sum_{i=1}^m x_i \\ + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\theta x_i} ((\theta + 1)(\theta + 1 + \theta x_i) - 1)}{(\theta + 1)^2 \left( 1 - \frac{\theta + 1 + \theta x_i}{\theta + 1} e^{-\theta x_i} \right)} &= 0, \end{aligned}$$

ku  $\psi(\cdot)$  është funksioni digama. MLE e  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\theta})$  për parametrat  $(\alpha, \beta, \theta)$ , respektivisht fitohet duke zgjidhur sistemet e ekuacioneve jolineare. Preferohet më shumë të përdoret algoritmi për optimizim jolinear si është algoritmi kuazi-Newton për (1.7.1). Duke aplikuar mostra të mëdha, MLE e  $\hat{\lambda} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\theta})$  mund të trajtohet si përafrim i shpërndarjes normale tri-përmasore me mesatare  $\hat{\lambda}$  dhe matricë variance-kovariancë të barabartë me inversen e matricës së informacionit, p.sh.

$$\sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda) \rightarrow N_3(0, nI^{-1}(\lambda))$$

ku  $I^{-1}(\lambda)$  është limiti i matricës variancë-kovariancë i  $\hat{\lambda}$ . Elementet e matricës  $3 \times 3$ ,  $I(\lambda)$  mund të përafrohen me  $I_{ij}(\hat{\lambda}) = -\ell_{\lambda_i \lambda_j} \big|_{\lambda=\hat{\lambda}}$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ .

Elementet e matricës së Hessian-it për funksionin  $\ell$  të dhënë me ekuacionin (1.7.2) janë dhënë mëposhtë ([71]):

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{\partial^2 \ell}{\alpha^2} = n\psi'(\alpha + \beta) - n\psi'(\alpha) \\
I_{12} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \beta} = n\psi'(\alpha + \beta) \\
I_{13} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \theta} = \sum_{i=1}^n -\frac{e^{-\theta x_i} \theta x_i (2 + x_i + \theta + \theta x_i)}{(-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i) (\theta + 1)} \\
I_{22} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta^2} = n\psi'(\alpha + \beta) - n\psi(\beta) \\
I_{23} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \theta} = -\frac{n}{\theta + 1} + \sum_{i=1}^n \frac{1 + x_i}{\theta + 1 + \theta x_i} - \sum_{i=1}^n x_i \\
I_{33} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} = -2\frac{n}{\theta^2} + \frac{n\beta}{(\theta + 1)^2} - (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{(1 + x_i)^2}{(\theta + 1 + \theta x_i)^2} \\
&\quad + (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\theta x_i} x_i (\theta x_i^2 + \theta^3 x_i^2 + 2\theta^2 x_i^2 - 2 - x_i + \theta^3 x_i + 3\theta^2 x_i + \theta x_i)}{(-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i) (\theta + 1)^2} \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \frac{(e^{-\theta x_i})^2 \theta^2 x_i^2 (2 + x_i + \theta + \theta x_i)^2}{(\theta + 1)^2 (-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i)^2}
\end{aligned}$$

Duke përafuar dy anët, intervalet e besimit  $100(1 - \alpha)\%$  për parametrat  $\alpha, \beta$  dhe për  $\gamma$  janë, respektivisht:

$$\hat{\alpha} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{I_{11}^{-1}(\hat{\lambda})}, \quad \hat{\beta} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{I_{22}^{-1}(\hat{\lambda})}, \quad \text{dhe} \quad \hat{\theta} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{I_{33}^{-1}(\hat{\lambda})},$$

ku  $z_\alpha$  është kuartili i rendit  $\alpha$  i shpërndarjes normale standarde. Duke përdorur  $\mathbf{R}$  mund të llogarisim matricën e Hessianit dhe inversen e kësaj matrice, kështu që mund të llogarisim gabimet standarde dhe intervalet asimptotike.

### 1.7.2 Vlerësimi sipas metodës së Bayes-it

Metoda e Bayes-it është përdorur për vlerësimin e parametrave në modelin e shpërndarjes beta-Lindley. Meqë nuk kemi informata të mëhershme rreth kësaj shpërndarje atëherë

për densitetin fillesar(apriori) kemi konsideruar densitetin joinformativ për analizë të Bayesit (Për me shumë rreth densitetit joinformativ, shih [13]). Marrim densitetet joinformative ([109]) për  $\theta$ ,  $\alpha$  dhe  $\beta$  në formën e mëposhtme [71]:

$$\pi_1(\theta) \propto \theta^{-1}; \theta > 0$$

$$\pi_2(\alpha) \propto M_1^{-1}; 0 < \alpha < M_1$$

$$\pi_3(\beta) \propto M_2^{-1}; 0 < \beta < M_2$$

Nuk ka rëndësi zgjedhja e  $M_1$  dhe  $M_2$ , pra mund të marrim thjesht

$$\pi_2(\alpha) \propto 1$$

$$\pi_3(\beta) \propto 1$$

Kështu që, shpërndarja posteriori e  $\theta$ ,  $\alpha$  dhe  $\beta$  jepet me

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \beta, \theta | \underline{x}) &= K \frac{\theta^{2n-1} \exp\left(-\theta\beta \sum_{i=1}^n x_i\right)}{B^n(\alpha, \beta) (1+\theta)^{n\beta}} \\ &\times \prod_{i=1}^n \left[ (1+\theta+\theta x_i)^{\beta-1} \left(1 - \frac{1+\theta+\theta x_i}{1+\theta} e^{-\theta x_i}\right)^{\alpha-1} \right] \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

ku,  $K$  është konstanta normalizuese. Nën konditat e gabimit katror të humbur(ang. square error loss), vlerësuesit e Bayes-it  $\theta$ ,  $\alpha$  dhe  $\beta$  janë mesataret e densiteteve posteriore marginale të tyre të definuara si:

$$\hat{\theta}_B = \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \theta \pi(\alpha, \beta, \theta | \underline{x}) d\beta d\alpha d\theta, \quad (1.7.4)$$

$$\hat{\alpha}_B = \int_{\alpha} \int_{\theta} \int_{\beta} \alpha \pi(\alpha, \beta, \theta | \underline{x}) d\beta d\theta d\alpha \quad (1.7.5)$$

dhe

$$\hat{\beta}_B = \int_{\beta} \int_{\alpha} \int_{\theta} \beta \pi(\alpha, \beta, \theta | \underline{x}) d\theta d\alpha d\beta \quad (1.7.6)$$

respektivisht. Nuk është e lehtë të bëhet vlerësimi sipas metodes së Bayesit duke përdorur ekuacionet (1.7.4), (1.7.5) dhe (1.7.6) kështu që kemi nevojë për përdorimin e

ndonjë softweri për llogaritje. Keshtu që, propozojmë përdorimin e teknikës MCMC (nga angl. Monte Carlo Markov Chain) p.sh algoritmin e Gibbs-it dhe Metropolis Hastings-it (MH), shih [38, 55, 14]. Për të implementuar algoritmin e Gibbs-it, densitetet e plota posteriore të  $\alpha$ ,  $\beta$  dhe  $\theta$  janë dhënë me:

$$\pi_1(\alpha|\beta, \theta, \underline{x}) \propto \frac{\Gamma^n(\alpha + \beta)}{\Gamma^n(\alpha)} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1 + \theta + \theta x_i}{1 + \theta} e^{-\theta x_i}\right)^{\alpha-1} \quad (1.7.7)$$

$$\pi_2(\beta|\alpha, \theta, \underline{x}) \propto \frac{\Gamma^n(\alpha + \beta)}{\Gamma^n(\alpha)} \frac{\exp\left(-\theta\beta \sum_{i=1}^n x_i\right)}{(1 + \theta)^{n\beta}} \prod_{i=1}^n (1 + \theta + \theta x_i)^{\beta-1} \quad (1.7.8)$$

$$\pi_3(\theta|\alpha, \beta, \underline{x}) \propto \frac{\theta^{2n-1} \exp\left(-\theta\beta \sum_{i=1}^n x_i\right)}{(1 + \theta)^{n\beta}} \times \prod_{i=1}^n \left[ (1 + \theta + \theta x_i)^{\beta-1} \left(1 - \frac{1 + \theta + \theta x_i}{1 + \theta} e^{-\theta x_i}\right)^{\alpha-1} \right] \quad (1.7.9)$$

Algoritmi i simulimit ([71]):

**Hapi 1.** Japim pikën fillestare, le të themi  $\alpha^{(0)}$ ,  $\beta^{(0)}$  dhe  $\theta^{(0)}$ , atëherë në fazen e  $i$ -të

**Hapi 2.** Duke përdorur algoritmin MH, gjenerojmë  $\alpha_i \sim \pi_1(\alpha|\beta^{(i-1)}, \theta^{(i-1)}, \underline{x})$

**Hapi 3.** Duke përdorur algoritmin MH, gjenerojmë  $\beta_i \sim \pi_2(\beta|\alpha_i, \theta^{(i-1)}, \underline{x})$

**Hapi 4.** Duke përdorur algoritmin MH, gjenerojmë  $\theta_i \sim \pi_3(\theta|\alpha_i, \beta_i, \underline{x})$

**Hapi 5.** Përsërisim hapat 2 – 4,  $M(= 20000)$  herë për të marrë vëllimin e mostres  $M$ .

**Hapi 6.** Marrim vlerësuesit sipas metodës së Bayes-it për  $\alpha$ ,  $\beta$  dhe  $\theta$  duke përdorur formulat

$$\hat{\alpha}_B = \frac{1}{M-M_0} \sum_{j=M_0+1}^M \alpha_j, \quad \hat{\beta}_B = \frac{1}{M-M_0} \sum_{j=M_0+1}^M \beta_j \quad \text{dhe} \quad \hat{\theta}_B = \frac{1}{M-M_0} \sum_{j=M_0+1}^M \theta_j$$

respektivisht, ku  $M_0(\approx 5000)$  është perioda e "djegies-in" për të gjeneruar zingjirët e Markovit.

**Hapi 7.** Marrim intervalet  $100 \times (1 - \psi)\%$  HPD për  $\alpha$ ,  $\beta$  dhe  $\theta$  duke aplikuar metodologjinë e [16]. Intervalet HPD për  $\alpha$ ,  $\beta$  dhe  $\theta$  janë  $(\alpha_{(j^*)}, \alpha_{(j^*+[(1-\psi)M])})$ ,  $(\beta_{(j^*)}, \beta_{(j^*+[(1-\psi)M])})$  dhe  $(\theta_{(j^*)}, \theta_{(j^*+[(1-\psi)M])})$  respektivisht. Ku  $j^*$  është zgjedhur në menyrë që

$$\alpha_{(j^*+[(1-\psi)M])} - \alpha_{(j^*)} = \min_{1 \leq j \leq M - [(1-\psi)M]} (\alpha_{(j+[(1-\psi)M])} - \alpha_{(j)})$$

$$\beta_{(j^*+[(1-\psi)M])} - \beta_{(j^*)} = \min_{1 \leq j \leq M - [(1-\psi)M]} (\beta_{(j+[(1-\psi)M])} - \beta_{(j)})$$

$$\theta_{(j^*+[(1-\psi)M])} - \theta_{(j^*)} = \min_{1 \leq j \leq M - [(1-\psi)M]} (\theta_{(j+[(1-\psi)M])} - \theta_{(j)})$$

Këtu,  $[x]$  shënon pjesën e plotë të  $x$ .

## 1.8 Aplikimi

Tani do i marrim dy shembuj me të dhëna reale dhe do i vlerësojme parametrat me metodën e përgjasisë maksimale, metodën e katroreve të vegjel si dhe me metodën e Bayesit.

**Të dhënat 1:** Të dhënat në tabelën 1 paraqesin të dhënat e pacensuzuara që i korrespondojnë koha e dhimbjeve për muaj që kanë 128 persona që vuajnë me kancer të paraqitur në librin e Lee dhe Wang ([107]).

**Të dhënat 2:** Paraqesin kohën e mbijetesës së 72 pëllumbave të infektuar me virusin tubercle bacilli, të observuar dhe të paraqitur tek Bjerkedal ([15]). Të dhënat janë paraqitur meposht:

0.1, 0.33, 0.44, 0.56, 0.59, 0.72, 0.74, 0.77, 0.92, 0.93, 0.96, 1, 1, 1.02, 1.05, 1.07, 1.07, 1.08, 1.08, 1.08, 1.09, 1.12, 1.13, 1.15, 1.16, 1.2, 1.21, 1.22, 1.22, 1.24, 1.3, 1.34, 1.36, 1.39, 1.44, 1.46, 1.53, 1.59, 1.6, 1.63, 1.63, 1.68, 1.71, 1.72, 1.76, 1.83, 1.95, 1.96, 1.97, 2.02, 2.13, 2.15, 2.16, 2.22, 2.3, 2.31, 2.4, 2.45, 2.51, 2.53, 2.54, 2.54, 2.78, 2.93, 3.27, 3.42, 3.47, 3.61, 4.02, 4.32, 4.58, 5.55

Matrica e variancë kovariancës  $I(\hat{\lambda})^{-1}$  për të dhënat 1, duke përdorur metoden e

Tabela 1.1: Koha e dhimbjes (në muaj) e pacientëve me kancer

0.08	2.09	3.48	4.87	6.94	8.66	13.11	23.63	0.20	2.23
3.52	4.98	6.97	9.02	13.29	0.40	2.26	3.57	5.06	7.09
9.22	13.80	25.74	0.50	2.46	3.64	5.09	7.26	9.47	14.24
25.82	0.51	2.54	3.70	5.17	7.28	9.74	14.76	26.31	0.81
2.62	3.82	5.32	7.32	10.06	14.77	32.15	2.64	3.88	5.32
7.39	10.34	14.83	34.26	0.90	2.69	4.18	5.34	7.59	10.66
15.96	36.66	1.05	2.69	4.23	5.41	7.62	10.75	16.62	43.01
1.19	2.75	4.26	5.41	7.63	17.12	46.12	1.26	2.83	4.33
7.66	11.25	17.14	79.05	1.35	2.87	5.62	7.87	11.64	17.36
1.40	3.02	4.34	5.71	7.93	11.79	18.10	1.46	4.40	5.85
8.26	11.98	19.13	1.76	3.25	4.50	6.25	8.37	12.02	2.02
3.31	4.51	6.54	8.53	12.03	20.28	2.02	3.36	6.76	12.07
21.73	2.07	3.36	6.93	8.65	12.63	22.69	5.49		

Tabela 1.2: Vlerësimet e parametrave, gabimi standard dhe Log-likelihood si dhe vlerësuesit LSE për të dhënat 1

Modeli	Vlerësimet me ML	Gabimi Standard	LL	LSE vlerësimet
Beta Lindley	$\hat{\alpha} = 1.340$	0.461	-412.802	1.803
	$\hat{\beta} = 0.065$	0.068		0.087
	$\hat{\theta} = 1.861$	1.769		1.630

Tabela 1.3: Kriteret e krahasimit:  $\ell$ , AIC dhe CAIC për të dhënat 1

Modeli	-2LL	AIC	AICC
Lindley.	839.04	841.06	841.091
Beta Eksponenciale	826.378	832.378	832.571
Beta e Lindley-it	825.604	831.604	831.797

përgjasisë maksimale

$$\begin{pmatrix} 0.213 & -0.019 & 0.530 \\ -0.019 & 0.004 & -0.120 \\ 0.530 & -0.120 & 3.131 \end{pmatrix}.$$

Kështu varianca e parametrave  $\alpha, \beta$  dhe  $\theta$  është  $var(\hat{\alpha}) = 0.213$ ,  $var(\hat{\beta}) = 0.004$  dhe  $var(\hat{\theta}) = 3.131$ . Paoshtu, 95% interval besimi për  $\alpha, \beta$  dhe  $\theta$  janë  $[0.435, 2.245]$ ,  $[0, 0.198]$  dhe  $[0, 5.330]$  respektivisht.

Në mënyrë që të krahasojmë dy modelet, konsiderojmë kriteret si  $-2\ell$ , AIC dhe CAIC për të dhënat. Shpërndarja konsiderohet më adekuate nëse ka vlera më të vogla për  $-2\ell$ , AIC dhe CAIC:

$$AIC = 2k - 2\ell, \quad \text{and} \quad AICC = AIC + \frac{2k(k+1)}{n-k-1},$$

ku  $k$  është numri i parametrave në modelin e shpërndarjes,  $n$  vëllimi i mostrës dhe  $\ell$  vlera maksimale e funksionit logaritmik të përgjasisë maksimale të konsideruar në model.

Statistika test e raportit LR për të testuar hipotezat  $H_0 : a = b = 1$  kundrejt  $H_1 : a \neq 1 \vee b \neq 1$  për të dhënat 1 është  $\omega = 13.436 > 5.991 = \chi_{2;0.05}^2$ , pra hedhim poshtë hipotezën fillestare.

Matrica e variancë kovariancë  $I(\hat{\lambda})^{-1}$  për shpërndarjen beta Lindley-it për të dhënat 2 është

$$\begin{pmatrix} 1.013 & -0.734 & 0.845 \\ -0.734 & 0.854 & -0.897 \\ 0.845 & -0.897 & 0.964 \end{pmatrix}.$$

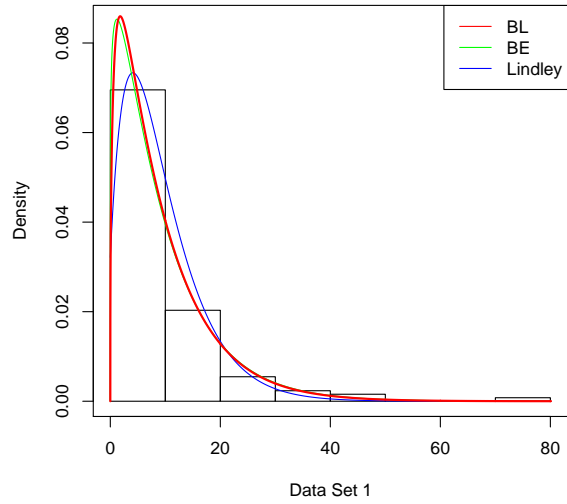


Fig. 1.3: Densitetet e modeleve për të dhënat 1.

Tabela 1.4: Vlerësimi i parametrave, gabimi standard dhe funksioni i përgjasisë maksimale për të dhënat 2

Modeli	Vlerësimi me ML	Gabimi Stan.	-LL	Vlerësimi PSE
Lindley	$\hat{\theta} = 0.868$	0.076	106.928	0.855
Beta eksponenciale	$\hat{\lambda} = 0.736$	1.357	94.167	0.741
	$\hat{\alpha} = 3.345$	1.056		2.966
	$\hat{\beta} = 1.708$	3.877		1.521
Beta e Lindley-it	$\hat{\alpha} = 3.005$	1.006	93.971	2.588
	$\hat{\beta} = 0.949$	0.924		0.943
	$\hat{\theta} = 1.462$	0.981		1.370

Tabela 1.5: Kriteret e krahasimit:  $-2\ell$ , AIC dhe CAIC për modelet bazuar në të dhënat 2

Model	$-2\ell$	AIC	CAIC
Lindley-it	213.857	215.857	215.942
Beta eksponenciale	188.334	194.334	194.646
Beta e Lindley-it	187.942	193.942	194.294

Pra, varianca e  $\alpha, \beta$  dhe  $\theta$  është  $var(\hat{\alpha}) = 1.013$ ,  $var(\hat{\beta}) = 0.854$  dhe  $var(\hat{\theta}) = 0.964$ . Kështu që, 95% intervalet e besimit për  $\alpha, \beta$  dhe  $\theta$  janë  $[1.033, 4.976]$ ,  $[0, 2.76]$  dhe  $[0, 3.384]$  respektivisht.

Statistika test e raportit LR për të testuar hipotezat  $H_0 : a = b = 1$  kundrejt  $H_1 : a \neq 1 \vee b \neq 1$  për të dhënat 1 është  $\omega = 25.915 > 5.991 = \chi_{2,0.05}^2$ , pra hedhim poshtë hipotezën fillestare. Tabelat 1.2 dhe 1.4 na tregojnë vlerësimet e parametrave me metodën e përgjasisë maksimale dhe metodën e katrorëve të vegjël për të dhënat 1 dhe 2, Tabela 1.3 dhe 1.5 tregojnë vlerat e  $-2\log(L)$ , AIC dhe CAIC. Vlerat në tabelat 1.3 dhe 1.5, na tregojnë se shpërndarja e beta Lindley-it është më e fuqishme se modelet tjera që janë marrë në konsideratë këtu për të dhënat 1 dhe 2. Krahasimi i densiteteve të modeleve të konsideruara dhe histogramit empirik për të dhënat janë paraqitur në figurat 1.3 dhe 1.4. Po ashtu vërehet se densiteti i modelit të shpërndarjes beta të Lindley-it është më i mirë se sa modelt tjera të shqyrtuara. Vlerësimet e parametrave me Bayes dhe intervalet HPD të parametrave  $\alpha, \beta$  dhe  $\theta$  janë përmbledhur në tabelën 1.6.

### 1.8.1 Simulimi i të dhënave

Në këtë paragraf, do të japim një algoritëm për të gjeneruar mostra të rastit nga shpërndarja e beta-Lindley-it për vlera të ndryshme të parametrave dhe vëllimit të mostrës  $n$ . Procesi i simulimit realizohet sipas hapave:

**Hapi 1.** Japim  $n$ , dhe  $\Theta = (\theta, \alpha, \beta)$ .

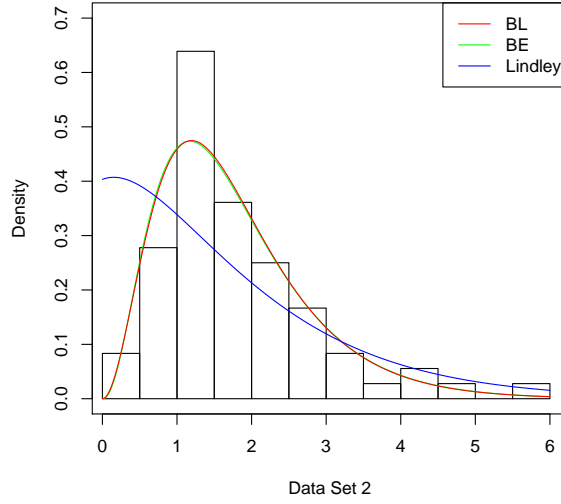


Fig. 1.4: Densitet e modeleve për të dhënat 2.

Tabela 1.6: Vlerësimet e Bayesit dhe intervali 95% HPD .

Të dhënat/ Parameterat		Bayes		
		Vlerësimi	Lower	Upper
Të dhënat 1	$\alpha$	1.198824	0.531175	1.835345
	$\beta$	0.136014	0.002155	0.274293
	$\theta$	1.283892	0.000737	2.544082
Të dhënat 2	$\alpha$	2.933191	1.604314	4.132534
	$\beta$	1.004611	0.000559	1.842176
	$\theta$	1.458197	0.343411	2.517247
Të dhënat 3	$\alpha$	2.581740	0.941880	4.127841
	$\beta$	0.501017	0.004933	1.110172
	$\theta$	2.886923	0.074607	5.401492

**Hapi 2.** Japim vlerën fillestare  $x^0$  për pikën startuese.

**Hapi 3.** Marrim  $j = 1$ .

**Hapi 4.** Gjenerojmë  $U \sim Uniform(0, 1)$ .

**Hapi 5.** Vlerën e  $x^0$  marrim të tillë që

$$x^* = x^0 - \left( \frac{G_{\Theta}(x) - U}{f_{\Theta}(x)} \right) \Big|_{x=x^0}$$

Nëse  $|x^0 - x^*| \leq \epsilon$ , (shumë i vogël,  $\epsilon > 0$  limiti i tolerancës). Atëherë,  $x^*$  do jetë mostra e fituar nga  $F(x)$ .

**Hapi 6.** Nëse  $|x^0 - x^*| > \epsilon$ , atëherë, marrim  $x^0 = x^*$  dhe shkojmë te hapi 5.

**Hapi 7.** Përsërisim hapat 4-7, për  $j = 1, 2, \dots, n$  dhe marrim  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Duke përdorur algoritmin e mësipërm, gjenerojmë një mostër më vëllim 30 nga beta-Lindley për vlerat arbitrare  $\theta = 1.5, \alpha = 2$  dhe  $\beta = 1$ . Të dhënat e simuluar (Të dhënat 3) janë dhënë

$$\left( \begin{array}{l} 0.7230, 0.9211, 1.3350, 2.6770, 0.6035, 2.5947, 3.0801, 1.5572, 1.4727, 0.3013, \\ 0.6116, 0.5550, 1.6320, 0.9438, 1.9079, 1.1693, 1.7259, 4.5494, 0.9360, 1.9373, \\ 2.9493, 0.6233, 1.5323, 0.4515, 0.7262, 0.9476, 0.1333, 0.9405, 2.3910, 0.8615. \end{array} \right)$$

Metoda e përgjasisë maksimale dhe ajo e Bayes-it me intervalet e besimit/kredibile janë llogaritur për mostren e simuluar. MLE e  $(\theta, \alpha, \beta)$  janë  $(2.72966, 2.56457, 0.43766)$  respektivisht. Intervalet asimptotikë të besimit për  $(\theta, \alpha, \beta)$  janë  $(-3.5042 \sim 0, 8.9635)$ ,  $(-0.6445 \sim 0, 5.77373)$  dhe  $(-0.865 \sim 0, 1.74044)$  respektivisht. Vlerësimet e Bayesit me intervalet e besueshmërisë bazuar në të dhënat e simuluar, tregohen në tabelën ??.

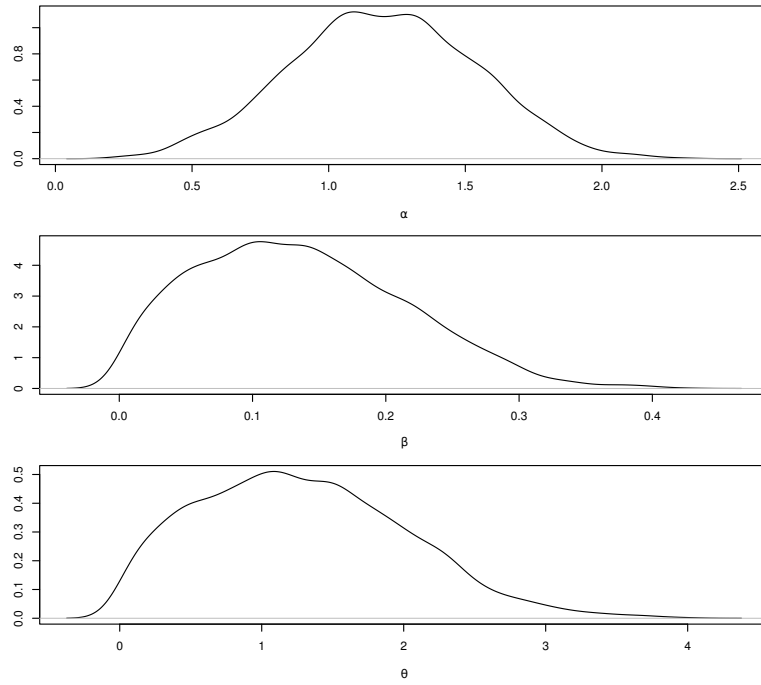


Fig. 1.5: Densitetet posteriore për të dhënat 1 për parametrat  $\alpha, \beta$  dhe  $\theta$ .

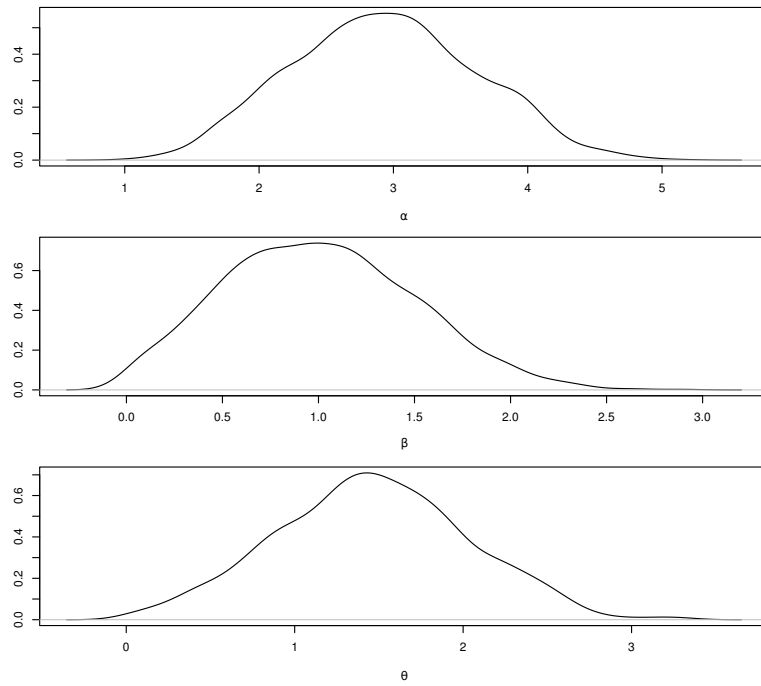


Fig. 1.6: Densitetet posteriore për të dhënat 2 për parametrat  $\alpha, \beta$  dhe  $\theta$ .

# Kapitulli 2

## Shpërndarja Kumaraswamy e Lindley-it: Vetitë dhe aplikimet

### 2.1 Hyrje

Në vitin 1980 Kumaraswamy publikoi një shpërndarje të re të ngjashme me shpërndarjen beta, që më vonë filloi të njihet me emrin shpërndarja e Kumaraswamit. Densiteti i shpërndarjes së Kumaraswamit jepet me:

$$f(x) = a b x^{a-1} [1 - x^a]^{b-1}. \quad (2.1.1)$$

ndërsa funksioni i shpërndarjes jepet me:

$$F(x) = 1 - (1 - x^a)^b, \quad (2.1.2)$$

Shpërndarja e Kumaraswamit nuk ishte studiuar në mënyre sistematike nga viti i publikimit të saj. Si nxitës mjaft i madh për studimin e kësaj shpërndarje konsiderohet punimi i Jones-it [52] i publikuar në vitin 2008. Pas këtij viti filluan mjaft shkencëtar të ndryshëm të studiojnë, të aplikojnë dhe të botojnë modifikime të kësaj shpërndarje. Në vitin 2011, Cordeiro dhe të tjerë [21], përcaktuan një metodë për gjenerimin e shpërndarjeve të tipit Kumaraswamy-G, ku G është një shpërndarje e çfarëdoshme.

Nëse me G shenojmë një funksion të shpërndarjes, atëherë shpërndarja e re e quajtur Kumaraswamy-G, e cila është propozuar nga Cordeiro në vitin 2011 [21], ka

funksion të shpërndarjes:

$$F(x) = 1 - [1 - G(x)^a]^b, \quad (2.1.3)$$

ku  $a > 0$  dhe  $b > 0$  janë dy parametra shtesë.

Densiteti i shpërndarjes së re ka formën

$$f(x) = a b g(x) G(x)^{a-1} [1 - G(x)^a]^{b-1}. \quad (2.1.4)$$

Familja e densiteteve (2.1.4) ka disa veti sikurse klasa e shpërndarjeve beta-G (shih Eugene *me të tjerë*, [30]), por ka disa përparësi meqë nuk përmban ndonjë funksion special sikurse funksioni beta që e përmban shpërndarja beta.

## 2.2 Gjenerimi i shpërndarjes Kumaraswamy-Lindley

Nga mënyra e gjenerimit të shpërndarjes Kumaraswamy-G, mund të vërejmë se nëse në vend të  $G$  marrim funksionin e shpërndarjes së Lindleyit, fitojmë shpërndarjen Kumaraswamy Lindley me funksion të shpërndarjes

$$F(x) = 1 - \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{\theta + 1 + \theta x}{\theta + 1} e^{-\theta x} \right)^a \right\}^b, \quad 0 < a, b < \infty \quad (2.2.1)$$

dhe densitet

$$f(x) = ab \frac{\theta^2}{\theta + 1} (1 + x) e^{-\theta x} \left( 1 - \frac{\theta + 1 + \theta x}{\theta + 1} e^{-\theta x} \right)^{a-1} \times \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{\theta + 1 + \theta x}{\theta + 1} e^{-\theta x} \right)^a \right\}^{b-1}. \quad (2.2.2)$$

Figurat 2.1 dhe 2.2 ilustrojnë disa forma të mundshme të densitetit dhe funksionit të shpërndarjes për shpërndarjen Kw-Lindley.

**Lemë 2.2.1.** [72] *Kur  $a = b = 1$ , shpërndarja Kw-L reduktohet në shpërndarjen e Lindley-it me parameter  $\theta$ .*

## 2.3 Momentet dhe funksioni gjenerues

**Teoremë 2.3.1.** [72] *Momenti i renditk,  $E(X^k)$ , i shpërndarjes Kw-L jepet me*

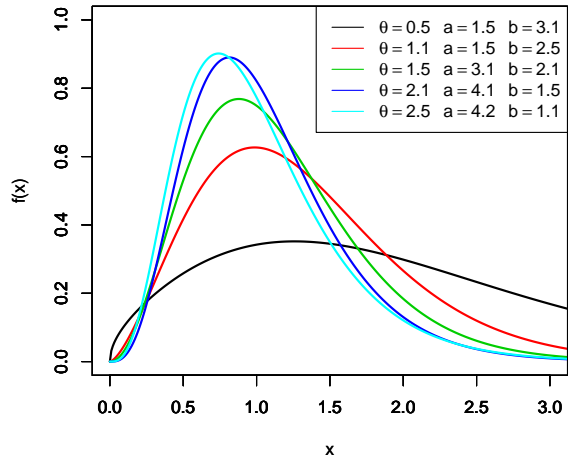


Fig. 2.1: Densiteti i shpërndarjes Kumaraswamy-Lindley për vlera të ndryshme.

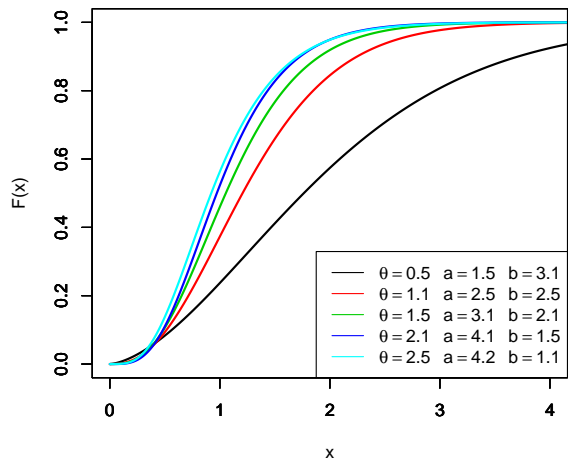


Fig. 2.2: Funkzioni i shpërndarjes Kumaraswamy-Lindley për vlera të ndryshme..

a) Nëse  $\alpha > 0, \beta > 0$  numra real jo të plotë:

$$E(X^k) = \frac{\Gamma(\alpha)}{B(\alpha, \beta)\theta^k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(\alpha - j)(\theta + 1)^{\beta+j} j!} e^{(\beta+j)(\theta+1)} \quad (2.3.1)$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta - i)\Gamma(i - 1)} (-1)^i (\theta + 1)^i \frac{1}{(\beta + j)^{k-i+\alpha+\beta}} \\ & \times [\theta \Gamma(k - i + \alpha + \beta, (\theta + 1)(\beta + j)) \\ & + \frac{1}{(\beta + j)} \Gamma(k - i + \alpha + \beta + 1, (\theta + 1)(\beta + j))] \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

b) Nëse  $\alpha > 0, \beta > 0$  numra real të plotë:

$$E(X^k) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)\theta^k} \sum_{j=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha-1}{j} \frac{(-1)^j}{(\theta + 1)^{\beta+j} j!} e^{(\beta+j)(\theta+1)} \quad (2.3.3)$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{i=0}^{\beta+j-1} \binom{\beta+j-1}{i} (-1)^i (\theta + 1)^i \frac{1}{(\beta + j)^{k-i+\alpha+\beta}} \\ & \times [\theta \Gamma(k - i + \alpha + \beta, (\theta + 1)(\beta + j)) \\ & + \frac{1}{(\beta + j)} \Gamma(k - i + \alpha + \beta + 1, (\theta + 1)(\beta + j))] \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Vërtetim.

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \int_0^{\infty} x^k f(x) dx = \frac{\theta^2}{B(\alpha, \beta)(\theta + 1)^\beta} \\ & \cdot \int_0^{\infty} x^k (\theta + 1 + \theta x)^{\beta-1} (1 + x) e^{-\theta \beta x} \left[ 1 - \frac{\theta + 1 + \theta x}{\theta + 1} e^{-\theta x} \right]^{\alpha-1} dx \\ &= \frac{\theta}{B(\alpha, \beta)(\theta + 1)^\beta} \\ & \cdot \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{\theta}\right)^k (\theta + 1 + t)^{\beta-1} \left(\frac{\theta + t}{\theta}\right) e^{-\beta t} \left[ 1 - \frac{\theta + 1 + t}{\theta + 1} e^{-t} \right]^{\alpha-1} dt \end{aligned}$$

a) Nëse  $\alpha > 0, \beta > 0$  janë numra real jo të plotë duke përdorur (1.4.6) kemi:

$$\begin{aligned} &= \frac{\Gamma(\alpha)}{B(\alpha, \beta)\theta^k(\theta + 1)^{\beta+j}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(\alpha - j)j!} \\ & \times \left[ \theta \int_0^{\infty} t^k (\theta + 1 + t)^{\alpha+\beta-1} e^{-(\beta+j)t} dt + \int_0^{\infty} t^{k+1} (\theta + 1 + t)^{\alpha+\beta-1} e^{-(\beta+j)t} dt \right] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{B(\alpha, \beta)\theta^k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(\alpha - j)(\theta + 1)^{\beta+j}j!} e^{(\beta+j)(\theta+1)} \\
&\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta - i)\Gamma(i - 1)} (-1)^i (\theta + 1)^i \\
&\times \left[ \theta \int_{\theta+1}^{\infty} t^{k-i+\alpha+\beta-1} e^{-(\beta+j)t} dt + \int_{\theta+1}^{\infty} t^{k-i+\alpha+\beta} e^{-(\beta+j)t} dt \right] \\
\int_{\theta+1}^{\infty} t^{k-i+\alpha+\beta-1} e^{-(\beta+j)t} dt &= \frac{1}{(\beta + j)^{k-i+\alpha+\beta}} \int_{(\theta+1)(\beta+j)}^{\infty} s^{k-i+\alpha+\beta-1} e^{-s} ds \\
&= \frac{1}{(\beta + j)^{k-i+\alpha+\beta}} \Gamma(k - i + \alpha + \beta, (\theta + 1)(\beta + j))
\end{aligned}$$

Pra,

$$\begin{aligned}
E(X^k) &= \frac{\Gamma(\alpha)}{B(\alpha, \beta)\theta^k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(\alpha - j)(\theta + 1)^{\beta+j}j!} e^{(\beta+j)(\theta+1)} \\
&\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta - i)\Gamma(i - 1)} (-1)^i (\theta + 1)^i \\
&\times \frac{1}{(\beta + j)^{k-i+\alpha+\beta}} \left[ \theta \Gamma(k - i + \alpha + \beta, (\theta + 1)(\beta + j)) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(\beta + j)} \Gamma(k - i + \alpha + \beta + 1, (\theta + 1)(\beta + j)) \right]
\end{aligned}$$

b) Nëse  $\alpha > 0, \beta > 0$  janë numra real të plotë, kemi:

$$\begin{aligned}
E(X^k) &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)\theta^k} \sum_{j=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha-1}{j} \frac{(-1)^j}{(\theta + 1)^{\beta+j}j!} e^{(\beta+j)(\theta+1)} \\
&\sum_{i=0}^{\beta+j-1} \binom{\beta+j-1}{i} (-1)^i (\theta + 1)^i \\
&\times \frac{1}{(\beta + j)^{k-i+\alpha+\beta}} \left[ \theta \Gamma(k - i + \alpha + \beta, (\theta + 1)(\beta + j)) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(\beta + j)} \Gamma(k - i + \alpha + \beta + 1, (\theta + 1)(\beta + j)) \right]
\end{aligned}$$

□

**Teoremë 2.3.2.** [72] *Le të jetë  $X$  ndryshore e rastit që ka shpërndarje Kw-Lindley, atëherë funksioni gjenerues  $M_X(t)$ , është*

a) Nëse  $\alpha > 0, \beta > 0$  janë numra real jo të plotë:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \frac{\Gamma(\alpha)}{B(\alpha, \beta)\theta^k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(\alpha - j)(\theta + 1)^{\beta+j}j!} e^{(\beta+j)(\theta+1)} \\ &\times \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta - i)\Gamma(i - 1)} (-1)^i (\theta + 1)^i \frac{1}{(\beta + j)^{k-i+\alpha+\beta}} \\ &\cdot [\theta\Gamma(k - i + \alpha + \beta, (\theta + 1)(\beta + j)) \\ &+ \frac{1}{(\beta + j)}\Gamma(k - i + \alpha + \beta + 1, (\theta + 1)(\beta + j))] \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

b) Nëse  $\alpha > 0, \beta > 0$  janë numra real të plotë:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \frac{1}{B(\alpha, \beta)\theta^k} \sum_{j=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha-1}{j} \frac{(-1)^j}{(\theta + 1)^{\beta+j}j!} e^{(\beta+j)(\theta+1)} \\ &\times \sum_{i=0}^{\beta+j-1} \binom{\beta+j-1}{i} (-1)^i (\theta + 1)^i \frac{1}{(\beta + j)^{k-i+\alpha+\beta}} \\ &\cdot [\theta\Gamma(k - i + \alpha + \beta, (\theta + 1)(\beta + j)) \\ &+ \frac{1}{(\beta + j)}\Gamma(k - i + \alpha + \beta + 1, (\theta + 1)(\beta + j))] \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

*Vërtetim.*

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} \exp(tx)f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \left( 1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \dots + \frac{t^nx^n}{n!} + \dots \right) f(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i E(X^i)}{i!}. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Pas zëvendësimit (2.3.1) në (2.3.7) dhe (2.3.3) në (2.3.7) fitojmë (2.3.5) dhe (2.3.6), respektivisht.  $\square$

## 2.4 Analiza e besueshmërisë (ang. Reliability Analysis)

Funksioni i besueshmërisë (ang. The reliability function)  $R(t)$ , përkufizohet si  $R(t) = 1 - F(t)$ . Funksioni i besueshmërisë për shpërndarjen Kw-L është:

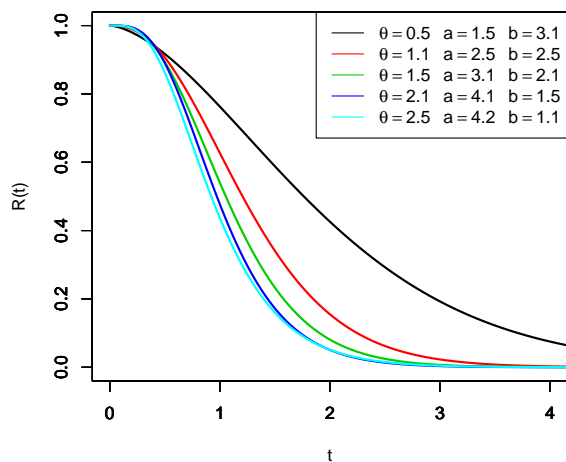


Fig. 2.3: Funkzioni i besueshmërisë për shpërndarjen Kumaraswamy-Lindley .

$$R(t, \theta, a, b) = \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{\theta + 1 + \theta t}{\theta + 1} e^{-\theta t} \right)^a \right\}^b .$$

Funksioni i Hazardit jepet me:

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} .$$

Funksioni i Hazardit për shpërndarjen Kw-Lindley jepet me

$$h(t, \theta, \alpha, \beta) = \frac{ab \frac{\theta^2}{\theta+1} (1+t) e^{-\theta t} \left( 1 - \frac{\theta+1+\theta t}{\theta+1} e^{-\theta t} \right)^{\alpha-1}}{\left\{ 1 - \left( 1 - \frac{\theta+1+\theta t}{\theta+1} e^{-\theta t} \right)^\alpha \right\}}$$

Figurat 2.3 dhe 2.4 ilustrjnë format e ndryshme të funksionit të besueshmërisë dhe funksionit të Hazardit për vlera të ndryshme të parametrave  $a, b$  dhe  $\theta$ , respektivisht.

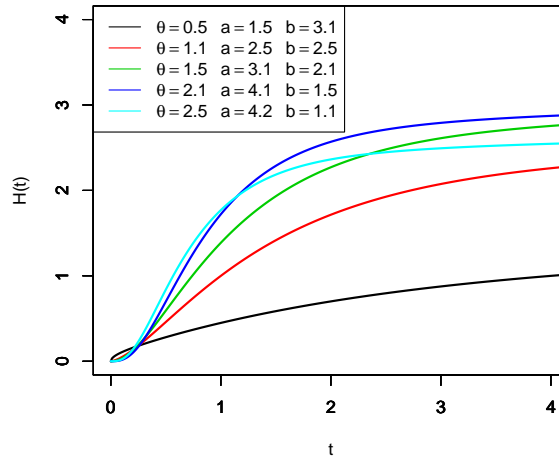


Fig. 2.4: Funkzioni i Hazardit për shpërndarjen Kumaraswamy-Lindley

## 2.5 Statistika e renditur për shpërndarjen Kw-Lindley

Statistika e renditur e rendit  $k$  e një mostre është vlera më e vogël e  $k$ -të. Për mostrën me vëllim  $n$ , statistika e renditur e rendit  $n$  është maksimumi, pra

$$X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$

Rangu është diferenca në mes maksimumit dhe minimumit

$$\text{range}\{X_1, \dots, X_n\} = X_{(n)} - X_{(1)}.$$

Nëse  $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  shënon statistikën e renditur nga mostra  $X_1, \dots, X_n$  nga popullimi me funksion të shpërndarjes  $F_X(x)$  dhe densitet  $f_X(x)$  atëherë densiteti i  $X_{(j)}$  jepet me

$$f_{X_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} f_X(x) (F_X(x))^{j-1} (1 - F_X(x))^{n-j},$$

për  $j = 1, \dots, n$ . Densiteti i  $j$ -të i statistikës së renditur për shpërndarjen Kw-Lindley jepet me:

$$\begin{aligned}
f_{X_{(j)}}(x) &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} ab \frac{\theta^2}{\theta+1} (1+x)e^{-\theta x} \left(1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x}\right)^{a-1} \\
&\cdot \left\{1 - \left(1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x}\right)^a\right\}^{b-1} \\
&\cdot \left(1 - \left\{1 - \left(1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x}\right)^a\right\}^b\right)^{j-1} \\
&\cdot \left(\left\{1 - \left(1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x}\right)^a\right\}^b\right)^{n-j}
\end{aligned}$$

Kështu densiteti i statistikës më të madhe  $X_{(n)}$  është

$$\begin{aligned}
f_{X_{(n)}}(x) &= nab \frac{\theta^2}{\theta+1} (1+x)e^{-\theta x} \left(1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x}\right)^{a-1} \\
&\cdot \left\{1 - \left(1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x}\right)^a\right\}^{b-1} \\
&\cdot \left(1 - \left\{1 - \left(1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x}\right)^a\right\}^b\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

dhe densiteti i statistikës së renditur më të vogël  $X_{(1)}$  jepet me

$$\begin{aligned}
f_{X_{(1)}}(x) &= nab \frac{\theta^2}{\theta+1} (1+x)e^{-\theta x} \left(1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x}\right)^{a-1} \\
&\cdot \left\{1 - \left(1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x}\right)^a\right\}^{b-1} \\
&\cdot \left(\left\{1 - \left(1 - \frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1} e^{-\theta x}\right)^a\right\}^b\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

## 2.6 Vlerësimi parametrave

### 2.6.1 Metoda e përgjasisë maksimale

Funksioni i përgjasisë maksimale për densitetin e shpërndarjes Kw-L jepet me

$$L = \left( ab \frac{\theta^2}{\theta + 1} \right)^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n (1 + x_i) \left( 1 - \frac{\theta + 1 + \theta x_i}{\theta + 1} e^{-\theta x_i} \right)^{a-1} \cdot \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{\theta + 1 + \theta x_i}{\theta + 1} e^{-\theta x_i} \right)^a \right\}^{b-1} \quad (2.6.1)$$

Pas logaritimit kemi:

$$\begin{aligned} \ell = \ln L &= n \log a + n \log b + 2n \log \theta - n \log(\theta + 1) - \theta \sum_{i=1}^n x_i \\ &+ \sum_{i=1}^n \log(1 + x_i) + (a - 1) \sum_{i=1}^n \log \left( 1 - \frac{\theta + 1 + \theta x_i}{\theta + 1} e^{-\theta x_i} \right) \\ &+ (b - 1) \sum_{i=1}^n \log \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{\theta + 1 + \theta x_i}{\theta + 1} e^{-\theta x_i} \right)^a \right\} \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

Tani,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial b} = 0, \quad dhe \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0,$$

kemi

$$\begin{aligned} \frac{n}{a} + \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 - \frac{(\theta + 1 + \theta x_i) e^{-\theta x_i}}{\theta + 1} \right) \\ - (b - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\left( 1 - \frac{(\theta + 1 + \theta x_i) e^{-\theta x_i}}{\theta + 1} \right)^a \ln \left( 1 - \frac{(\theta + 1 + \theta x_i) e^{-\theta x_i}}{\theta + 1} \right)}{\left( 1 - \left( 1 - \frac{(\theta + 1 + \theta x_i) e^{-\theta x_i}}{\theta + 1} \right)^a \right)} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{n}{b} + \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 - \left( 1 - \frac{(\theta + 1 + \theta x_i) e^{-\theta x_i}}{\theta + 1} \right)^a \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2n}{\theta} - \frac{n}{\theta+1} - \sum_{i=1}^n x_i - (a-1) \\
& \times \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\theta x_i} \theta x_i (2 + \theta + \theta x_i + x_i)}{(-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i) (\theta + 1)} - (b-1) \\
& \times \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\theta x_i} \theta x_i (2 + \theta + \theta x_i + x_i) a \left( -\frac{-\theta-1+e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i}{\theta+1} \right)^a}{\left( -1 + \left( -\frac{-\theta-1+e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i}{\theta+1} \right)^a \right) \cdot K_i} = 0 \\
& K_i = (-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i) (\theta + 1)
\end{aligned}$$

MLE për parametrat  $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{\theta})$  e  $(a, b, \theta)$ , fitohet duke i zgjidhur këto ekuacione jolineare. Duke aplikuar mostrën e madhe, MLE e  $\hat{\varphi} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{\theta})$  mund të trajtohet si shpërndarje normale trivariate  $\hat{\lambda}$  matrica e variancës, kovariancës

$$\sqrt{n}(\hat{\varphi} - \varphi) \rightarrow N_3(0, nI^{-1}(\varphi))$$

ku elementet e matricës  $3 \times 3$ ,  $I(\varphi)$  mund të vlerësohen me  $I_{ij}(\hat{\varphi}) = -\ell_{\varphi_i \varphi_j} |_{\varphi=\hat{\varphi}}$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ .

Elementet e matricës së Hessian-it jepen me:

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{\partial \partial^2 \ell}{\theta^2} = -2 \frac{n}{\theta^2} + \frac{n}{(\theta + 1)^2} + (a - 1) \cdot A - (b - 1) \sum_{i=1}^n (A_i + B_i - C_i + D_i) \\
A &= - \sum_{i=1}^n \frac{(-2 + \theta^4 x_i^2 + \theta^4 x_i - 2\theta + 2e^{-\theta x_i} - x_i + 4\theta^2 x_i + A_{11}) e^{-\theta x_i} x_i}{(-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i)^2 (\theta + 1)^2} \\
A_{11} &= (3\theta^2 x_i^2 + \theta x_i^2 + 4\theta^3 x_i + 3\theta^3 x_i^2 + 2e^{-\theta x_i} \theta + 2e^{-\theta x_i} \theta x_i + e^{-\theta x_i} x_i) e^{-\theta x_i} x_i \\
A_i &= - \frac{\theta^2 x_i^2 (2 + \theta + \theta x_i + x_i)^2 (e^{-\theta x_i})^2 a^2}{(\theta + 1)^2 (-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i)^2} \\
A_{i1} &= \left( - \frac{-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i}{\theta + 1} \right)^a \\
A_{i2} &= \left( -1 + \left( - \frac{-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i}{\theta + 1} \right)^a \right) \\
B_i &= - \frac{x_i (-2 + \theta^3 x_i^2 + 2\theta^2 x_i^2 + \theta x_i^2 + 3\theta^2 x_i + \theta x_i + \theta^3 x_i - x_i) e^{-\theta x_i} a}{\left( -1 + \left( - \frac{-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i}{\theta + 1} \right)^a \right) B_{i2}} \\
B_{i1} &= \left( - \frac{-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i}{\theta + 1} \right)^a \\
B_{i2} &= (-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i)^{-1} (\theta + 1)^2 \\
C_i &= - \frac{\theta^2 x_i^2 (2 + \theta + \theta x_i + x_i)^2 (e^{-\theta x_i})^2 a \cdot C_{i1}}{(\theta + 1)^2 (-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i)^2 \cdot C_{i2}} \\
C_{i1} &= \left( - \frac{-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i}{\theta + 1} \right)^a \\
C_{i2} &= \left( -1 + \left( - \frac{-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i}{\theta + 1} \right)^a \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_i &= \frac{\theta^2 x_i^2 (2 + \theta + \theta x_i + x_i)^2 (e^{-\theta x_i})^2 a^2 \cdot D_{i1}}{D_{i2} \cdot (-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i)^2 (\theta + 1)^2} \\
D_{i1} &= \left( \left( -\frac{-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i}{\theta + 1} \right)^a \right)^2 \\
D_{i2} &= \left( -1 + \left( -\frac{-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i}{\theta + 1} \right)^a \right)^2 \\
I_{12} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial a} = - \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\theta x_i} \theta x_i (2 + \theta + \theta x_i + x_i)}{(-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i) (\theta + 1)} + (b - 1) \\
&\quad \cdot \sum_{i=1}^n \frac{K_{ia} \cdot K_{i1}}{K_{i2} \cdot \left( -1 + \left( -\frac{-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i}{\theta + 1} \right)^a \right)^2 (\theta + 1)} \\
K_{i1} &= (2 + \theta + \theta x_i + x_i) \theta x_i e^{-\theta x_i} \left( -\frac{-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i}{\theta + 1} \right)^a \\
K_{ia} &= \left( a \ln \left( -\frac{-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i}{\theta + 1} \right) + 1 - \left( -\frac{-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i}{\theta + 1} \right)^a \right) \\
K_{i2} &= (-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i) \\
I_{13} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial b} = \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\theta x_i} \theta x_i (2 + \theta + \theta x_i + x_i) a \left( -\frac{-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i}{\theta + 1} \right)^a}{I_{3i} \cdot (-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i) (\theta + 1)} \\
I_{3i} &= \left( -1 + \left( -\frac{-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i}{\theta + 1} \right)^a \right) \\
I_{22} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial a^2} = -\frac{n}{a^2} - (b - 1) \\
&\quad \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\left( -\frac{-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i}{\theta + 1} \right)^a \left( \ln \left( -\frac{-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i}{\theta + 1} \right) \right)^2}{\left( -1 + \left( -\frac{-\theta - 1 + e^{-\theta x_i} \theta + e^{-\theta x_i} + e^{-\theta x_i} \theta x_i}{\theta + 1} \right)^a \right)^2} \\
I_{23} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial a \partial b} = - \sum_{i=1}^n \frac{\left( 1 - \frac{(\theta + 1 + \theta x_i) e^{-\theta x_i}}{\theta + 1} \right)^a \ln \left( 1 - \frac{(\theta + 1 + \theta x_i) e^{-\theta x_i}}{\theta + 1} \right)}{\left( 1 - \left( 1 - \frac{(\theta + 1 + \theta x_i) e^{-\theta x_i}}{\theta + 1} \right)^a \right)} \\
I_{33} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial b^2} = -\frac{n}{b^2}
\end{aligned}$$

## 2.7 Vlerësimi i parametrave sipas Bayes-it

Për të kryer vlerësimin e parametrave me metodën e Bayes-it ne duhet të kemi fillimisht densitet apriori, atëherë marrim densitetet apriori joinformative si

$$\pi_1(\theta) \propto \theta^{-1}; \theta > 0$$

$$\pi_2(\alpha) \propto M_1^{-1}; 0 < \alpha < M_1$$

$$\pi_3(\beta) \propto M_2^{-1}; 0 < \beta < M_2$$

Nuk ka rëndësi zgjedhja e  $M_1$  dhe  $M_2$  kështu që marrim thjesht

$$\pi_2(\alpha) \propto 1$$

$$\pi_3(\beta) \propto 1$$

Densiteti posteriori i parametrave  $\theta$ ,  $\alpha$  dhe  $\beta$  jepet me

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \beta, \theta | \tilde{x}) &= K \frac{\theta^{2n-1} \exp\left(-\theta\beta \sum_{i=1}^n x_i\right)}{B^n(\alpha, \beta) (1+\theta)^{n\beta}} \\ &\prod_{i=1}^n \left[ (1+\theta+\theta x_i)^{\beta-1} \left(1 - \frac{1+\theta+\theta x_i}{1+\theta} e^{-\theta x_i}\right)^{\alpha-1} \right] \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

ku,  $K$  konstanta e normalizimit. Vlerësimet e Bayes-it për parametrat  $\theta$ ,  $\alpha$  dhe  $\beta$  janë

$$\hat{\theta}_B = \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \theta \pi(\alpha, \beta, \theta | \tilde{x}) d\beta d\alpha d\theta, \quad (2.7.2)$$

$$\hat{\alpha}_B = \int_{\alpha} \int_{\theta} \int_{\beta} \alpha \pi(\alpha, \beta, \theta | \tilde{x}) d\beta d\theta d\alpha \quad (2.7.3)$$

dhe

$$\hat{\beta}_B = \int_{\beta} \int_{\alpha} \int_{\theta} \beta \pi(\alpha, \beta, \theta | \tilde{x}) d\theta d\alpha d\beta \quad (2.7.4)$$

respektivisht. Nuk është e lehtë të llogariten ekuacionet (2.7.2), (2.7.3) dhe (2.7.4), andaj për këtë arsye përdoren përafritmet numerike me metodat Monte Carlo Markov

Chain (MCMC) ku njëra prej tyre është metoda e Gibbs-it dhe algoritmi Metropolis Hastings. Densitetet posteriori për parametrat  $\alpha$ ,  $\beta$  dhe  $\theta$  janë dhënë me

$$\pi_1 \left( \alpha | \beta, \theta, \tilde{x} \right) \propto \frac{\Gamma^n(\alpha + \beta)}{\Gamma^n(\alpha)} \prod_{i=1}^n \left( 1 - \frac{1 + \theta + \theta x_i}{1 + \theta} e^{-\theta x_i} \right)^{\alpha-1} \quad (2.7.5)$$

$$\pi_2 \left( \beta | \alpha, \theta, \tilde{x} \right) \propto \frac{\Gamma^n(\alpha + \beta)}{\Gamma^n(\alpha)} \frac{\exp \left( -\theta \beta \sum_{i=1}^n x_i \right)}{(1 + \theta)^{n\beta}} \prod_{i=1}^n (1 + \theta + \theta x_i)^{\beta-1} \quad (2.7.6)$$

$$\pi_3 \left( \theta | \alpha, \beta, \tilde{x} \right) \propto \frac{\theta^{2n-1} \exp \left( -\theta \beta \sum_{i=1}^n x_i \right)}{(1 + \theta)^{n\beta}} \prod_{i=1}^n \left[ (1 + \theta + \theta x_i)^{\beta-1} \left( 1 - \frac{1 + \theta + \theta x_i}{1 + \theta} e^{-\theta x_i} \right)^{\alpha-1} \right] \quad (2.7.7)$$

Algoritmi i simulimit jepet si

**Hapi 1.** Marrim pikën fillestare, themi  $\alpha^{(0)}$ ,  $\beta^{(0)}$  dhe  $\theta^{(0)}$ , atëherë në hapin e  $i$ -të

**Hapi 2.** Gjatë përdorimit të algoritmit të MH, gjenerojmë  $\alpha_i \sim \pi_1 \left( \alpha | \beta^{(i-1)}, \theta^{(i-1)}, \tilde{x} \right)$

**Hapi 3.** Gjatë përdorimit të algoritmit të MH, gjenerojmë  $\beta_i \sim \pi_2 \left( \beta | \alpha_i, \theta^{(i-1)}, \tilde{x} \right)$

**Hapi 4.** Gjatë përdorimit të algoritmit të MH, gjenerojmë  $\theta_i \sim \pi_3 \left( \theta | \alpha_i, \beta_i, \tilde{x} \right)$

**Hapi 5.** Përsërisim hapat 2 – 4,  $M (= 20000)$  herë për të fituar mostrën me vëllim  $M$ .

**Hapi 6.** Vlerësimet e Bayes-it për parametrat  $\alpha$ ,  $\beta$  dhe  $\theta$  i marrim duke shfrytëzuar formulat

$$\hat{\alpha}_B = \frac{1}{M-M_0} \sum_{j=M_0+1}^M \alpha_j, \hat{\beta}_B = \frac{1}{M-M_0} \sum_{j=M_0+1}^M \beta_j \text{ dhe } \hat{\theta}_B = \frac{1}{M-M_0} \sum_{j=M_0+1}^M \theta_j \text{ respektivisht, ku } M_0 (\approx 5000).$$

**Hapi 7.** Marrim  $100 \times (1 - \psi)\%$  HPD intervalet për parametrat  $\alpha$ ,  $\beta$  dhe  $\theta$  në bazë të:  $(\alpha_{(j^*)}, \alpha_{(j^*+[(1-\psi)M])})$ ,  $(\beta_{(j^*)}, \beta_{(j^*+[(1-\psi)M])})$  and  $(\theta_{(j^*)}, \theta_{(j^*+[(1-\psi)M])})$  respektivisht. Ku,  $j^*$  është zgjedhur si:

$$\alpha_{(j^*+[(1-\psi)M])} - \alpha_{(j^*)} = \min_{1 \leq j \leq M - [(1-\psi)M]} \left( \alpha_{(j+[(1-\psi)M])} - \alpha_{(j)} \right)$$

Tabela 2.1: Koha e stagnimit të virusit tek pacientët

0.08	2.09	3.48	4.87	6.94	8.66	13.11	23.63	0.20	2.23
3.52	4.98	6.97	9.02	13.29	0.40	2.26	3.57	5.06	7.09
9.22	13.80	25.74	0.50	2.46	3.64	5.09	7.26	9.47	14.24
25.82	0.51	2.54	3.70	5.17	7.28	9.74	14.76	26.31	0.81
2.62	3.82	5.32	7.32	10.06	14.77	32.15	2.64	3.88	5.32
7.39	10.34	14.83	34.26	0.90	2.69	4.18	5.34	7.59	10.66
15.96	36.66	1.05	2.69	4.23	5.41	7.62	10.75	16.62	43.01
1.19	2.75	4.26	5.41	7.63	17.12	46.12	1.26	2.83	4.33
7.66	11.25	17.14	79.05	1.35	2.87	5.62	7.87	11.64	17.36
1.40	3.02	4.34	5.71	7.93	11.79	18.10	1.46	4.40	5.85
8.26	11.98	19.13	1.76	3.25	4.50	6.25	8.37	12.02	2.02
3.31	4.51	6.54	8.53	12.03	20.28	2.02	3.36	6.76	12.07
21.73	2.07	3.36	6.93	8.65	12.63	22.69	5.49		

$$\beta_{(j^*+[(1-\psi)M])} - \beta_{(j^*)} = \min_{1 \leq j \leq M - [(1-\psi)M]} (\beta_{(j+[(1-\psi)M])} - \beta_{(j)})$$

$$\theta_{(j^*+[(1-\psi)M])} - \theta_{(j^*)} = \min_{1 \leq j \leq M - [(1-\psi)M]} (\theta_{(j+[(1-\psi)M])} - \theta_{(j)})$$

## 2.8 Aplikimi i shpërndarjes Kw-Lindley

Në këtë paragraf, do të përdorim të dhëna reale për të parë se si shpërndarja Kw=L është model më i mirë se shpërndarja e Lindley-it.

Të dhënat 1: Të dhënat në tabelën 2.1 paraqesin të dhënat e pacenzoruara që korrespondojnë me të prekurin nga kanceri i gjakut dhe janë gjithsejt 128 pacientë që janë studiuar në punimin e Lee dhe Wang [107]:

Të dhënat 2: Të dhënat paraqesin kohën e mbijetesës për 72 pëllumba të infektuar me virusin virulent tubercle bacilli, shih Bjerkedal [15]. Të dhënat janë:

0.1, 0.33, 0.44, 0.56, 0.59, 0.72, 0.74, 0.77, 0.92, 0.93, 0.96, 1, 1, 1.02, 1.05, 1.07, 1.07, 1.08, 1.08, 1.08, 1.09, 1.12, 1.13, 1.15, 1.16, 1.2, 1.21, 1.22, 1.22, 1.24, 1.3, 1.34, 1.36, 1.39, 1.44, 1.46, 1.53, 1.59, 1.6, 1.63, 1.63, 1.68, 1.71, 1.72, 1.76, 1.83, 1.95, 1.96, 1.97, 2.02, 2.13, 2.15, 2.16, 2.22, 2.3, 2.31, 2.4, 2.45, 2.51, 2.53, 2.54, 2.54, 2.78, 2.93, 3.27, 3.42, 3.47, 3.61, 4.02, 4.32, 4.58, 5.55

Tabela 2.2: ML, gabimi standard dhe funksioni Log-likelihood për të dhënat 1

Modeli	ML Vlerësimi	Gabimi standard	-LL
Lindley	$\hat{\theta} = 0.196$	0.012	419.529
Kw- Lindley	$\hat{\theta} = 0.503$	0.098	414.229
	$\hat{a} = 0.978$	0.222	
	$\hat{b} = 0.280$	0.060	

Tabela 2.3: Kriteret e krahasimit për të dhënat 1

Modeli	-2LL	AIC	AICC
Lindley.	839.04	841.06	841.091
Kw-Lindley	828.458	834.458	834.651

Matrica variancë kovariancë  $I(\hat{\lambda})^{-1}$  e MLE për shpërndarjen Kw- Lindley për të dhënat 1

$$\begin{pmatrix} 0.009 & 0.011 & -0.005 \\ 0.011 & 0.049 & -0.004 \\ -0.005 & -0.004 & 0.003 \end{pmatrix}.$$

Kështu që , varianca e  $\theta, a$  dhe  $b$  është  $var(\hat{\theta}) = 0.009, var(\hat{a}) = 0.049$  dhe  $var(\hat{b}) = 0.003$ . Tani, intervalet e besimit 95% për  $\theta, a$  dhe  $b$  janë  $[0.310, 0.697], [0.541, 1.415]$  dhe  $[0.162, 0.398]$ , respektivisht.

Statistika test LR për hipotezat  $H_0 : a = b = 1$  kundrejt  $H_1 : a \neq 1 \vee b \neq 1$  për të dhënat 1 është  $\omega = 21.164 > 5.991 = \chi_{2,0.05}^2$ , pra hedhim poshtë hipotezën  $H_0$ .

Tabela 2.4: ML, gabimi standard dhe funksioni Log-likelihood për të dhënat 2

Modeli	ML Vlerësimi	Gabimi St.	-LL
Lindley	$\hat{\theta} = 0.868$	0.076	106.928
Kw- Lindley	$\hat{\theta} = 1.345$	0.677	93.967
	$\hat{a} = 2.878$	1.040	
	$\hat{b} = 1.077$	0.827	

Tabela 2.5: Kriteret e krahasimit për të dhënat 2

Model	-2LL	AIC	AICC
Lindley.	213.857	215.857	215.942
Kw-Lindley	187.935	193.935	194.128

Matrica variancë kovariancë  $I(\hat{\lambda})^{-1}$  për Kw- Lindley e të dhënave 2 është

$$\begin{pmatrix} 0.458 & 0.640 & -0.548 \\ 0.640 & 1.082 & -0.717 \\ -0.548 & -0.717 & 0.684 \end{pmatrix}.$$

Pra, varianca e  $\theta, a$  dhe  $b$  është  $var(\hat{\theta}) = 0.458, var(\hat{a}) = 1.082$  dhe  $var(\hat{b}) = 0.684$ . Kështu që, intervalet e besimit 95% për  $\theta, a$  dhe  $b$  janë  $[0.017, 2.672], [0.838, 4.917]$  dhe  $[0, 3.384]$ , respektivisht.

Statistika test LR  $H_0 : a = b = 1$  kundrejt  $H_1 : a \neq 1 \vee b \neq 1$  për të dhënat 2 është  $\omega = 25.922 > 5.991 = \chi_{2,0.05}^2$ , pra hedhim poshtë hipotezën fillestare. Tabelat 2.2 dhe 2.4 tregojnë parametrat e vlerësuar me metodën e përgjasisë maksimale për të dhënat 1 dhe 2, Tabelat 2.3 dhe 2.5 tregojnë vlerat e  $-2\log(L)$ , AIC dhe AICC. Vlerat në tabelat 2.3 dhe 2.5, na sugjerojnë se shpërndarja Kw- Lindley është më efikase për të dhënat se sa modeli tjetër.

Vlerësimi i Bayes-it për të dhënat 1 dhe 2 është dhënë me:

Tabela 2.6: Vlerësimet e Bayes-it dhe intervalet kredibile 95% HPD.

Data/ Parameter	Bayes			
	Estimate	Lower	Upper	
Data 1	$\alpha$	1.198824	0.531175	1.835345
	$\beta$	0.136014	0.002155	0.274293
	$\theta$	1.283892	0.000737	2.544082
Data 2	$\alpha$	2.933191	1.604314	4.132534
	$\beta$	1.004611	0.000559	1.842176
	$\theta$	1.458197	0.343411	2.517247

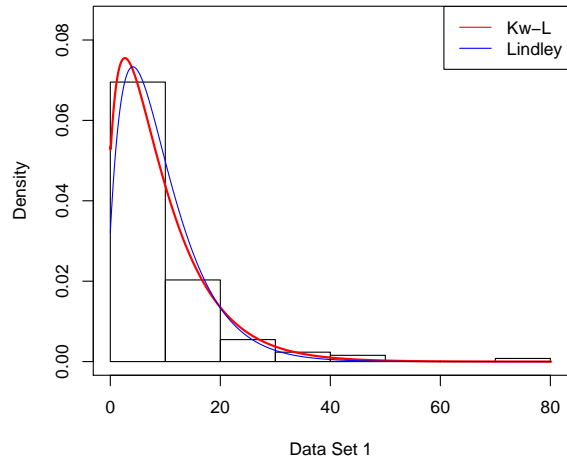


Fig. 2.5: Densiteti i modeleve për të dhënat 1.

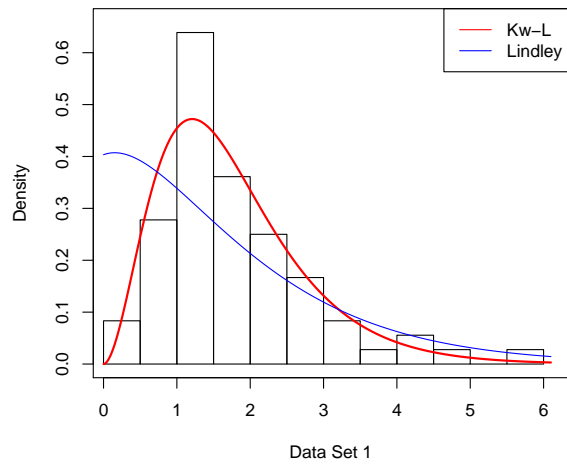


Fig. 2.6: Densiteti i modeleve për të dhënat 2.

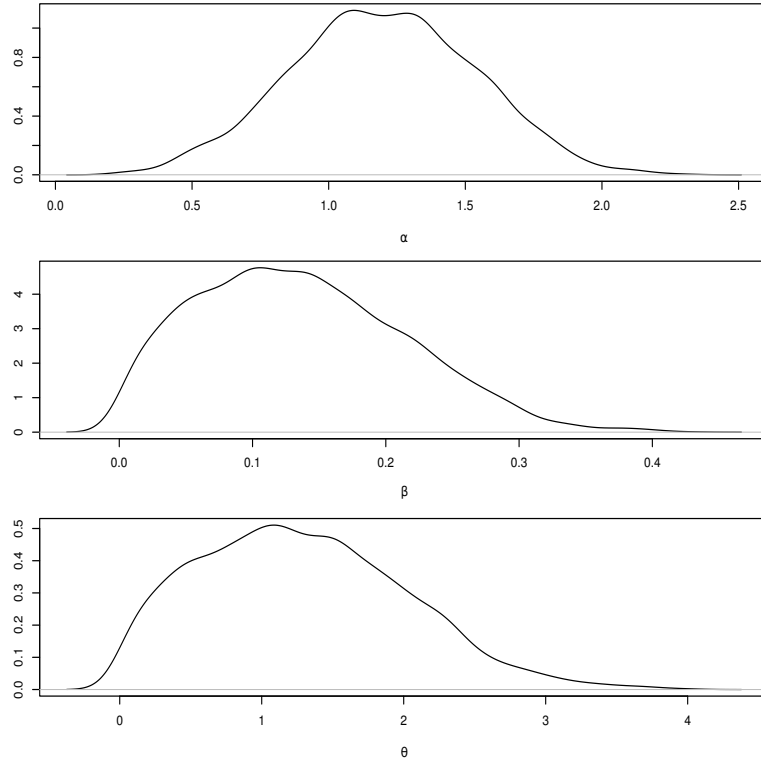


Fig. 2.7: Densiteti posteriori për parametrat  $\alpha$ ,  $\beta$  dhe  $\theta$  për të dhënat 1.

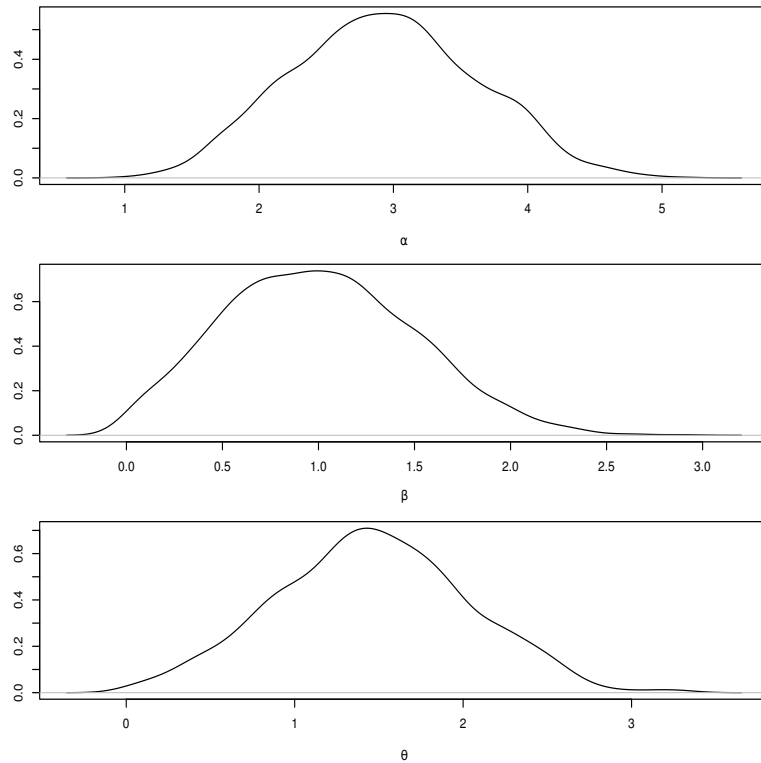


Fig. 2.8: Densiteti posteriori për parametrat  $\alpha$ ,  $\beta$  dhe  $\theta$  për të dhënat 2.

# Kapitulli 3

## Shpërndarja e përgjithësuar inverse e Lindley-it

### 3.1 Hyrje

Në studimet e statistikave të mbijetesës, të dhënat janë të kategorizuara nga procesi i dështimit siç janë: monotone (konstant, jorritës dhe jozvogëlues) dhe jo-monotone (unimodale), shih [25] dhe analizat statistikore përkatëse, shih [101, 104]. Janë bërë përpjekje të mëdha në drejtim të gjetjes së shpërndarjes adekuate për atë modelim ku ndër të tjerë janë edhe autorët [114, 35, 34] etj. [44] ka studiuar modelin probabilitar të quajtur shpërndarja e Gompertz-it dhe ka patur një aplikim mjaft të madh në demografi dhe shkencat aktuaristike, ku të dhënat kanë funksionin e raportit të Hazardit me rritje eksponenciale. Weibulli ([132]) për herë të parë ka studiuar një shpërndarje të re që sot njihet me emrin Shpërndarja e Weibullit, e cila sot ka një aplikim mjaft të madh tek analizat statistikore të mbijetesës. Shpërndarja e Weibullit ka patur një përdorim të gjërë në analizat statistikore të mbijetesës, kur të dhënat, kanë funksionin e raportit të Hazardit monoton, megjithatë ka një përdorim shumë më të vogël të kësaj shpërndarje, kur të dhënat funksionin e raportit të Hazardit e kanë jomonoton. Për këtë arsye, hulumtuesit shkencorë kanë rritur studimet statistikore kur të dhënat kanë funksionin e raportit të Hazardit monoton. Në [68, 130, 131]

është bërë zgjerimi i shpërndarjes së Weibullit për të bërë këtë shpërndarje më kompatible për modele të ndryshme të të dhënave. Për një diskutim më të zgjeruar rreth diskutimit të kësaj shpërndarje lexuesi mund të hasë më tepër tek [67]. Edhe në [17] poashtu jepet shpërndarjen me dy parametra që ka funksionin e raportit të Hazardit monoton për analiza statistikore të mbijetesës.

Janë disa variante të aplikimit ku të dhënat kanë funksionin e raportit të Hazardit të tipit monoton. Për shembull, në [12] bëhet analiza statistike e të dhënave eksperimentale për kancerin e mushkërive, dhe tregohet se funksioni i raportit të dështimit për grupet me status të ulët dhe të lartë të kancerit kanë formë unimodale. Në [103] janë studiuar të dhënat e 3878 rasteve të kancerit të gjirit në Edinburgh prej 1954 deri më 1964 dhe është vërejtur se vdekshmëria e tyre ka qenë e ulët në vitin e parë për të vazhduar me një ngritje në vitet vijuese dhe më pas me një rënie të vdekshmërisë.

Disa shpërndarje inverse për studimet e këtyre fenomeneve janë: shpërndarja inverse e Weibull (IW), inverse e Gaussit (IG) dhe inverse gamma (IGm), etj. Këto shpërndarje kanë një përdorim të gjërë në variantet e aplikimeve reale. Në [67] është përshkruar në detaje përdorimi i shpërndarjes IW dhe aplikimet përkatëse të statistikës së vendimmarrjes. Shpërndarja IW është model i përshtatshëm për përshkrimin e fenomeneve të erozionit të komponenteve mekanike, si komponentet dinamike të motorëve me djegie të brendshme (motorët diesel). Erto dhe Rapone (1984) kanë treguar se modeli IW ka një përshtatje të mirë të paraqitjes së të dhënave të mbijetesës (dështimit) shih [101]. Calabria dhe Pulcini (1994) kanë provuar të bëjnë interpretimin e shpërndarjes IW në kontekstin e relacioneve për fuqinë (ang. load-strength) e komponenteve. Shpërndarja inverse e Gaussit ka zbatim në përshkrimin e fenomeneve si, në rritjen e popullsisë, në aplikimet e studimeve në klinika, etj. Për më shumë detaje shih botimet [119] dhe [64]. Në [49] është propozuar shpërndarja inverse gama si një shpërndarje për studimin e modelimit të studimeve të mbijetesës.

Për shkak të aplikimit të madh të shpërndarjeve inverse ne do të propozojmë

një shpërndarje inverse të quajtur: shpërndarja inverse e Lindley-it. Shpërndarja e Lindley-it është propozuar nga [105], dhe ka densitetin

$$f(y, \alpha, \theta) = \frac{\theta^2}{(1 + \theta)} (1 + y) e^{-\theta y}, y > 0, \theta > 0 \quad (3.1.1)$$

Në [42] është paraqitur një trajtim matematik i vetive statistike të shpërndarjes së Lindley-it. Ata po ashtu kanë treguar se shpërndarja e Lindley-it është më e përshtatshme për modelime të të dhënave se sa shpërndarja eksponenciale. Në [63] tregohet gjithashtu se shpërndarja e Lindley-it është më e përshtatshme për modelimin e të dhënave reale se sa shpërndarja eksponenciale, gama dhe log-normale dhe ka treguar epërsinë e përdorimit të kësaj shpërndarje në hulumtimet e besueshmërisë. Në [41] dhe [99] së fundmi është propozuar përgjithësimi i shpërndarjes së Lindley-it duke e përgjithësuar nga një parametër në dy parametra dhe janë emërtuar si shpërndarja e përgjithësuar e Lindley-it dhe shpërndarja fuqi e Lindley-it, përkatësisht. Këto përgjithësime mund të shihen si modele alternative të përgjithësimin të shpërndarjeve të trajtës eksponenciale si shpërndarja gama dhe shpërndarja e Weibull-it.

Densiteti  $z = 1/y$ , i shpërndarjes inverse të Lindley-it jepet me:

$$f(z, \alpha, \theta) = \frac{\theta^2}{(1 + \theta)} \frac{(1 + z)}{z^3} e^{-\frac{\theta}{z}}, z > 0, \theta > 0 \quad (3.1.2)$$

Shpërndarja inverse e Lindley-it ka vetëm një parametër. Megjithatë parametri që ndikon në formën e lakores ka një rol themelor që densitetet të jenë fleksibile. Kundu ka dhënë gjashtë metoda për të shtuar edhe parametrin e formës/asimetrisë në modelin bazë. Këtu, ne kemi përdorur transformimin fuqi  $x = z^{\frac{1}{\alpha}}$  për të shtuar parametrin e formës së lakores tek shpërndarja inverse e Lindley-it. Shembuj të mirë të kësaj shpërndarje janë shpërndarjet e tipit të Weibull-it dhe shpërndarjet fuqi të Lindley-it.

## 3.2 Shpërndarje e përgjithësuar inverse e Lindley-it

**Përkufizimi 3.2.1.** [124] Nëse  $Y$  është ndryshore e rastit që ka densitetin (3.1.1), atëherë ndryshorja e rastit  $X = Y^{-\frac{1}{\alpha}}$  themi se ka shpërndarje të përgjithësuar inverse

të Lindley-it me densitet

$$f(x, \alpha, \theta) = \frac{\alpha\theta^2}{(1+\theta)} \left[ \frac{1+x^\alpha}{x^{2\alpha+1}} \right] e^{-\frac{\theta}{x^\alpha}}, x > 0, \alpha > 0, \theta > 0 \quad (3.2.1)$$

dhe funksion shpërndarjeje

$$F(x, \alpha, \theta) = \left[ 1 + \frac{\theta}{1+\theta} \frac{1}{x^\alpha} \right] e^{-\frac{\theta}{x^\alpha}}, x > 0, \alpha > 0, \theta > 0 \quad (3.2.2)$$

ku,  $\theta$  është parametri statistikor i dispersionit, parametri  $\alpha$  kontrollon formën e lakores.

**Lemë 3.2.1.** [124] Densiteti  $f(x)$  në (3.2.1) i shpërndarjes GILD është:

- i. rritës për  $x \in (0, x_1)$ ,
- ii. zvogëlues për  $x \in (x_1, \infty)$ .

ku,  $x_1$  mund të merret si zgjidhje e  $f'(x) = 0$  si:

$$x_1 = \left( \frac{\alpha\theta - 2\alpha - 1 + \sqrt{\alpha^2\theta^2 + 2\alpha\theta + 4\alpha^2 + 4\alpha + 1}}{2(\alpha + 1)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Funksioni i densitetit (3.2.1) mund të paraqitet në termat e shpërndarjes mikse si mëposhtë

$$\begin{aligned} f(x, \alpha, \theta) &= \frac{\theta}{1+\theta} f_1(x, \alpha, \theta) + \frac{1}{1+\theta} f_2(x, \alpha, \theta) \\ &= \frac{\theta}{1+\theta} \left\{ \frac{\alpha\theta}{x^{\alpha+1}} e^{-\frac{\theta}{x^\alpha}} \right\} + \frac{1}{1+\theta} \left\{ \frac{\alpha\theta^2}{x^{2\alpha+1}} e^{-\frac{\theta}{x^\alpha}} \right\} \end{aligned}$$

ku,  $f_1(\cdot)$  dhe  $f_2(\cdot)$  janë densiteti i shpërndarjes inverse të Weibull-it dhe densiteti i shpërndarjes inverse gama, respektivisht, dy anëtarë të familjes së shpërndarjes së përgjithësuar gama të dhënë kohëve të fundit nga [69]. Kështu që, shpërndarja e përgjithësuar inverse e Lindley-it mund të konsiderohet si kombinim i dy shpërndarjeve të përgjithësuar inverse gama me proporcionet  $\theta/(1+\theta)$  dhe  $1/(1+\theta)$ . Në anën tjetër, variabla e rastit  $X$  themi se ka shpërndarje të përgjithësuar inverse të Lindley-it nëse  $X^{-1}$  ka shpërndarje të Lindley-it fuqi të propozuar nga [41].

Funksioni i Hazardit për shpërndarjen e përgjithësuar inverse të Lindley-it mund të përcaktohet si:

$$h(x, \alpha, \theta) = \frac{f(x, \alpha, \theta)}{1 - F(x, \alpha, \theta)} = \frac{\alpha\theta^2(1+x^\alpha)}{x^{\alpha+1} \left[ (1+\theta)x^\alpha \left( e^{\frac{\theta}{x^\alpha}} - 1 \right) - \theta \right]} \quad (3.2.3)$$

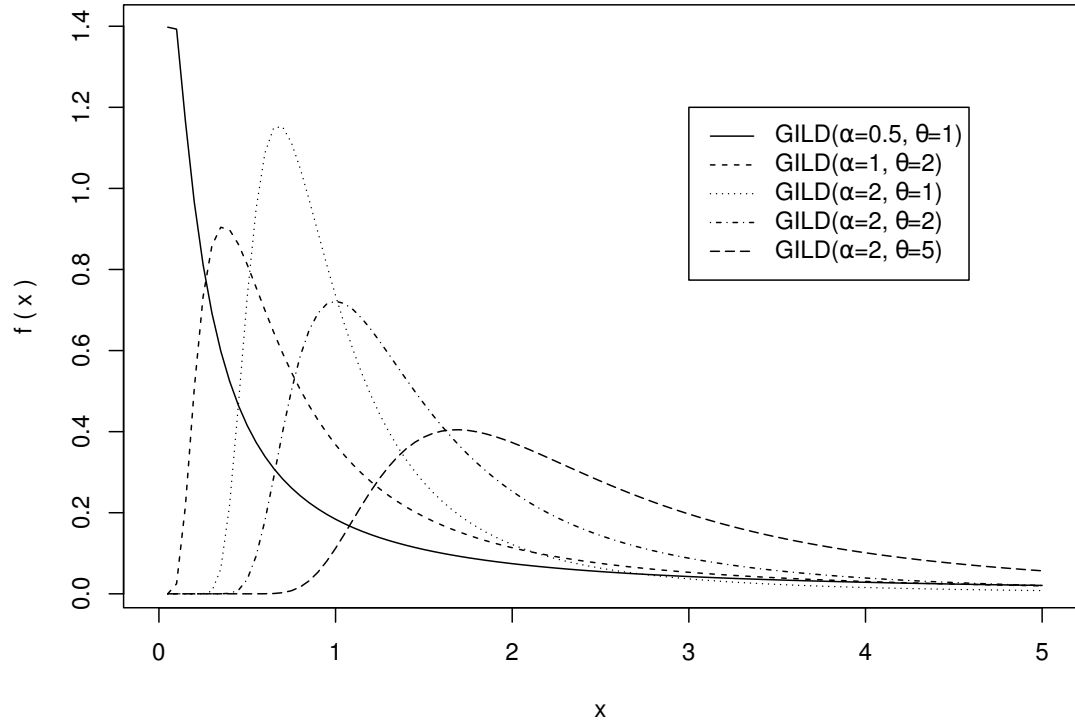


Fig. 3.1: Densiteti për vlera të ndryshme të parametrave

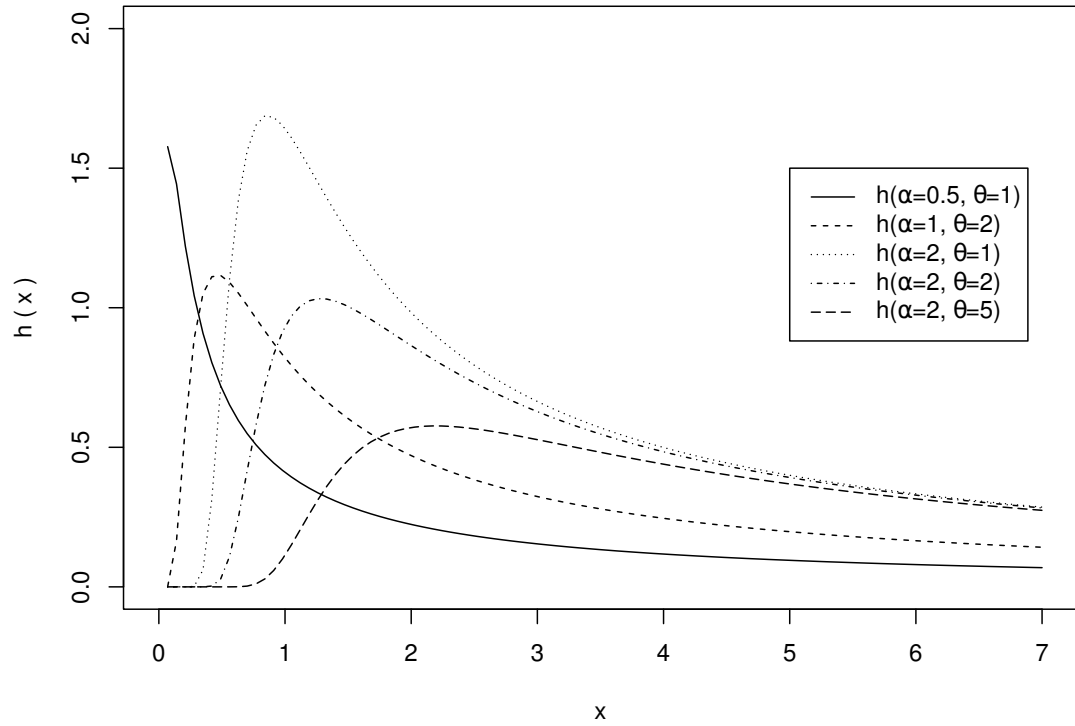


Fig. 3.2: Grafiku i funksionit të Hazardit për vlera të ndryshme të parametrave

Grafiku i densitetit (3.2.1) dhe funksionit të Hazardit (3.2.3), me vlera të ndryshme të parametrave, janë paraqitur në figurat 3.1 dhe 3.2, respektivisht. Në figura shohim që  $f(\cdot)$  dhe  $h(\cdot)$  janë monotono-zvogëluese nëse  $0 < \alpha < 1$ , dhe uni-modale për  $\alpha \geq 1$  dhe vlera të ndryshme të  $\theta$ . Gupta [48] ka përdorur shprehjen  $\eta(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}$  për të përcaktuar monotoninë e funksionit të Hazardit. Për GILD, kemi

$$\eta(x) = \left[ -\frac{\alpha\theta}{x^{\alpha+1}} + \frac{\alpha+1}{x} + \frac{\alpha}{x(1+x^\alpha)} \right]$$

e  $\eta(x)$  dhe  $h(x)$  posedojnë veti të njëjta, kështu që, nëse  $h(x)$  është uni-modale (called upside bathtub (UBT)), do të kemi:

$$h'(x) > 0 \text{ for } x \in (0, x_0), h'(x_0) = 0 \text{ and } h'(x) < 0 \text{ for } x > x_0$$

dhe poashtu

$$\eta'(x) > 0 \text{ for } x \in (0, x_0), \eta'(x_0) = 0 \text{ and } \eta'(x) < 0 \text{ for } x > x_0,$$

ku,  $x_0$  mund të fitohet duke zgjidhur ekuacionin

$$\alpha\theta x^{2\alpha+2} + 2\alpha\theta x^{\alpha+2} - x^{2\alpha} + (2-\alpha)x^\alpha + \alpha\theta x^2 - \alpha = 0 \quad (3.2.4)$$

### 3.3 Momentet dhe vlera e dispersionit dhe asimetrisë

**Teoremë 3.3.1.** [124] Nëse  $X$  është ndryshore rasti me densitet (3.2.1), atëherë momenti i rendit  $r$ , fillestar i ndryshorës  $X$  do të jetë

$$\mu'_r = \frac{\theta^{\frac{r}{\alpha}}}{\alpha(1+\theta)} \Gamma\left(\frac{\alpha-r}{\alpha}\right) (\alpha(1+\theta) - r), \alpha > r$$

*Vërtetim.* Konsiderojmë,

$$\begin{aligned} E[X^r] &= \frac{\alpha\theta^2}{1+\theta} \int_0^\infty \frac{1+x^\alpha}{x^{2\alpha-r+1}} e^{-\frac{\theta}{x^\alpha}} dx \\ &= \frac{\alpha\theta^2}{1+\theta} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{x^{2\alpha-r+1}} + \frac{1}{x^{\alpha-r+1}} \right] e^{-\frac{\theta}{x^\alpha}} dx \end{aligned}$$

Duke zëvendësuar  $x^\alpha = t$ , marrim

$$= \frac{\alpha\theta^2}{1+\theta} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{y^{3-\frac{r}{\alpha}}} + \frac{1}{x^{2-\frac{r}{\alpha}}} \right] e^{-\frac{\theta}{y}} dy$$

Nga përkufizimi i shpërndarjes inverse gama, kemi

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{x^{b+1}} dx = \frac{\Gamma(b)}{a^b}$$

Duke përdorur përkufizimin e mësipërm, do të kemi:

$$E[X^r] = \frac{\theta^{\frac{r}{\alpha}}}{\alpha(1+\theta)} \Gamma\left(\frac{\alpha-r}{\alpha}\right) (\alpha(1+\theta) - r), \alpha > r$$

□

Kështu që, pritja matematike dhe dispersioni i ndryshores së rastit  $X$  mund të llogaritet me formulën e mëposhtme

$$\mu = \frac{\theta^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha(1+\theta)} \Gamma\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) (\alpha(1+\theta) - 1), \alpha > 1$$

$$\sigma^2 = \left[ \frac{\theta^{1/\alpha}}{\alpha(1+\theta)} \right]^2 \cdot A,$$

ku

$$A = \left[ \alpha(1+\theta) (\alpha(\theta+1) - 2) \left( \Gamma\left(\frac{\alpha-2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) \right) - \Gamma^2\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) \right], \alpha > 2$$

Duke përdorur teoremën 3.3.1, asimetria dhe sheshësia(sh) mund të llogariten si mëposhtë:

$$Asimetria = \frac{\mu'_3 - 3\mu'_3\mu + 2\mu^3}{\sigma^3}, \alpha > 3$$

$$sh = \frac{\mu'_4 - 4\mu'_3\mu + 6\mu'_2\mu^2 - 3\mu^4}{\sigma^4}, \alpha > 4.$$

**Lemë 3.3.2.** [124] *Le të jetë*  $I(a, \alpha, \theta) = \int_a^\infty x f(x, \alpha, \theta) dx$ .

*Kemi*

$$I(a, \alpha, \theta) = \frac{\theta^{\frac{1}{\alpha}+1}}{(1+\theta)} \left[ \Gamma\left(\theta a^{-\alpha}, \frac{2\alpha-1}{\alpha}\right) + \theta \Gamma\left(\theta a^{-\alpha}, \frac{\alpha-1}{\alpha}\right) \right], \alpha > 1,$$

ku,  $\Gamma(x, a) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt$ , është funksioni i cinguar gama.

Shmangia mesatare absolute rreth mesatares dhe mesorës përcaktohet si:

$$M_1(X) = \int_0^{\infty} |x - \mu| f(x) dx$$

dhe

$$M_2(X) = \int_0^{\infty} |x - \tilde{\mu}| f(x) dx$$

respektivisht. Ku,  $\tilde{\mu} = Median(X)$  paraqet mesoren. Madhësia  $M_1(X)$  dhe  $M_2(X)$  mund të llogaritet nga relacionet e mëposhtme,

$$M_1(X) = 2 \int_{\mu}^{\infty} x f(x) dx + 2\mu F(\mu) - 2\mu$$

$$M_2(X) = 2 \int_{\tilde{\mu}}^{\infty} x F(x) dx - \mu$$

Duke përdorur lemën 3.3.2, do të kemi

$$M_1(X) = 2I(\mu, \alpha, \theta) + 2\mu F(\mu) - 2\mu$$

$$M_2(X) = 2I(\tilde{\mu}, \alpha, \theta) - \mu$$

## 3.4 Kuantilet

**Teoremë 3.4.1.** [124] Nëse  $X$  ka densitet (3.2.1) për  $a, b, \theta > 0$ , kuantili i rendit  $p$  është

$$Q(p) = \left[ -1 - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} W_{-1} \left( -\frac{(1+\theta)p}{\exp(1+\theta)} \right) \right]^{(-\frac{1}{\alpha})},$$

ku,  $p \in (0, 1)$  dhe  $W_{-1}$  është funksioni i anasjelltë i Lambertit.

*Vërtetim.* Konsiderojmë,

$$Q(p) = F^{-1}(p), p \in (0, 1)$$

Kuantili të themi  $q(p)$ , i përkufizuar me  $G(Q(p)) = p$  është rrënjë e ekuacionit

$$\left[ 1 + \frac{\theta}{\theta + 1} \frac{1}{Q(p)^\alpha} \right] e^{-\theta/Q(p)^\alpha} = p$$

Duke shumëzuar të dya anët e ekuacionit me  $-e^{-(1+\theta)}$ , marrim

$$-\left(1 + \theta + \frac{\theta}{Q(p)^\alpha}\right) e^{-(1+\theta+\frac{\theta}{Q(p)^\alpha})} = -p(1 + \theta) e^{-(1+\theta)} \quad (3.4.1)$$

Vërejmë se  $\left(1 + \theta + \frac{\theta}{Q(p)^\alpha}\right) > 1, \forall \theta, \alpha, q(p) > 0$ , duke përdorur funksionin  $W$  të Lambertit, të përkufizuar si zgjidhje e  $W(z) e^{W(z)} = z$ , ekuacioni i mësipërm mund të shkruhet si

$$W_{-1}(-p(1 + \theta) e^{-(1+\theta)}) = -\left(1 + \theta + \frac{\theta}{Q(p)^\alpha}\right)$$

ku,  $W_{-1}(\cdot)$  është funksioni i anasjelltë i funksionit  $W$  të Lambert-it dhe përfundimisht kemi

$$Q(p) = \left[-1 - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} W_{-1}\left(-\frac{(1 + \theta)p}{\exp(1 + \theta)}\right)\right]^{(-\frac{1}{\alpha})}.$$

□

Nëse,  $\alpha = 1$ , kuantili i rendit  $p$  për shpërndarjen e anasjelltë të Lindley-it përkufizohet si mëposhtë

$$Q(p) = \left[-1 - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} W_{-1}\left(-\frac{(1 + \theta)p}{\exp(1 + \theta)}\right)\right]^{(-1)}.$$

Në veçanti, nëse  $p = 0.5$ , mediana e  $X$  është dhënë me

$$x_m = \left[-1 - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} W_{-1}\left(-\frac{(1 + \theta)}{2 \exp(1 + \theta)}\right)\right]^{(-\frac{1}{\alpha})}$$

### 3.5 Renditja stokastike (e rastit)

Ndryshorja e rastit  $X$  themi se është stokastikisht më e madhe se  $Y$ , ( $Y \leq_{st} X$ ) nëse  $F_X(x) \leq F_Y(x)$  për çdo  $x$ . Në mënyrë të ngjashme,  $X$  thuhet se është stokastikisht më e madhe se  $Y$ , ( $X \leq_{st} Y$ ) nëse

- renditja e raportit të Hazardit ( $Y \leq_{hr} X$ ) nëse  $h_X(x) \leq h_Y(x)$  për çdo  $x$
- renditja e rezidualëve mesatare jetësore (ang. mean residual life order) ( $Y \leq_{mlr} X$ ) nëse  $m_X(x) \leq m_Y(x)$  për çdo  $x$
- renditja e raportit të përgjasisë ( $Y \leq_{lr} X$ ) nëse  $\frac{f_X(x)}{f_Y(x)}$  është një funksion rritës i variables  $x$

**Teoremë 3.5.1.** [124] *Le të jenë  $X$  dhe  $Y$  dy variabla të rastit që kanë shpërndarje të pergjithësuar inverse të Lindley-it me parameter të formes së lakores të perbashkët  $\alpha$  dhe parametrat e shkallës  $\theta_1$  dhe  $\theta_2$  respektivisht. Nëse  $\theta_2 > \theta_1$ , atëherë  $(Y \leq_{lr} X)$  për çdo  $x$ .*

*Vërtetim.* Le të jetë

$$Y \sim GILD(\alpha_1, \beta_1) \text{ dhe } X \sim GILD(\alpha_2, \beta_2)$$

Atëherë, raporti i përgjasisë jepet nga

$$\frac{f_X(x)}{f_Y(x)} = \frac{\alpha_2 \theta_2^2 (1 + \theta_1)}{\alpha_1 \theta_1^2 (1 + \theta_2)} \left( \frac{1 + x^{\alpha_2}}{1 + x^{\alpha_1}} \right) \left( \frac{x^{\alpha_1}}{x^{\alpha_2}} \right)^2 \exp \left\{ - \left( \frac{\theta_2}{x^{\alpha_2}} - \frac{\theta_1}{x^{\alpha_1}} \right) \right\}$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ , atëherë

$$\frac{f_X(x)}{f_Y(x)} = \frac{\theta_2^2 (1 + \theta_1)}{\theta_1^2 (1 + \theta_2)} \exp \left\{ - \left( \frac{\theta_2 - \theta_1}{x^\alpha} \right) \right\}$$

i cili është rritës për  $x$  me parametrat  $\theta_2 > \theta_1$ . Pra, nëse  $\alpha_1 = \alpha_2$ , atëherë  $X$  është stokastikisht më i madh se  $Y$  me raportin e përgjasisë, atëherë dhe vetëm atëherë, kur  $\theta_2 > \theta_1$ .  $\square$

[128] caktohet nga rezultatet e radhitjes stokastike si mëposhtë:

$$X \leq_{lr} Y \implies X \underset{X \leq_{st} Y}{\leq_{hr}} Y \implies X \leq_{mrl} Y \quad (3.5.1)$$

**Rrjedhim 3.5.2.** [124] *Nëse  $X \sim GILD(\alpha, \theta_1)$  dhe  $Y \sim GILD(\alpha, \theta_2)$ . Atëherë,  $(Y \leq_{lr} X)$  përderisa  $\theta_2 > \theta_1$  kështu që  $(Y \leq_{hr} X)$ ,  $(Y \leq_{mrl} X)$  dhe  $(Y \leq_{st} X)$ .*

## 3.6 Entropia e Renyi-t

Entropia është masë e variacionit të pasigurisë në shpërndarjen e ndryshores së rastit.

Entropia e Renyi-t, [118], përcaktohet si

$$e(\gamma) = \frac{1}{1 - \gamma} \log \left\{ \int f^\gamma(x) dx \right\},$$

ku,  $\gamma > 0$  dhe  $\gamma \neq 1$ . Duke zëvendësuar (3.2.1) në shprehjen e mësipërme, kemi

$$e(\gamma) = \frac{1}{1 - \gamma} \log \left\{ \left( \frac{\alpha \theta^2}{1 + \theta} \right)^\gamma \int_0^\infty \frac{1}{x^{\gamma(1+\alpha)}} (1 + x^{-\alpha})^\gamma e^{\frac{\theta\gamma}{x^\alpha}} dx \right\}.$$

Për  $|z| < 1$  dhe  $\gamma > 0$ , kemi

$$(1+z)^\gamma = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\gamma}{j} z^j$$

Duke përdorur shprehjen e mësipërme, kemi

$$e(\gamma) = \frac{1}{1-\gamma} \log \left\{ \left( \frac{\alpha\theta^2}{1+\theta} \right)^\gamma \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\gamma}{j} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha(j+\gamma)+\gamma}} e^{\frac{\theta\gamma}{x^\alpha}} dx \right\}.$$

Duke kryer transformimet,  $1/x^\alpha = t$ , dhe duke zgjidhur integralin, përfundimisht do të kemi

$$e(\gamma) = \frac{1}{1-\gamma} \log \left\{ \frac{\alpha^{\gamma-1}\theta^{2\gamma}}{(1+\theta)^\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\gamma}{j} \frac{\Gamma(j+\gamma+\frac{\gamma-1}{\alpha})}{(\theta\gamma)^{(j+\gamma+\frac{\gamma-1}{\alpha})}} \right\}.$$

### 3.7 Besueshmëria e fuqisë së komponentëve

Besueshmëria e fuqisë së komponentëve ( ang.Stress-strength reliability) është një matje e performancës së sistemit nën konditat e rrepta dhe mund të përkufizohet si  $R = P[X > Y]$

Besueshmëria e fuqisë së komponentëve mund të llogaritet sipas formulës

$$\begin{aligned} R(\alpha, \theta) &= \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^x g_y(x) dy \right\} g_x(x) dx \\ &= \frac{\alpha\theta_1^2}{(1+\theta_1)(1+\theta_2)} \int_0^{\infty} (\theta_2 + x(1+\theta_2)) \frac{1+x^\alpha}{x^{2\alpha+2}} \exp\left(-\frac{(\theta_1+\theta_2)}{x^\alpha}\right) dx \end{aligned}$$

Duke përdorur densitetin e shpërndarjes inverse gama dhe pas kryerjes së disa thjeshtimeve matematikore, do të kemi

$$R(\alpha, \theta) = \frac{\theta_1^2 \cdot R_a}{\alpha(1+\theta_1)(1+\theta_2)(\theta_2+\theta_2)^{(2+1/\alpha)}} \quad (3.7.1)$$

ku,

$$R_a = \left\{ \alpha(1+\theta_1+\theta_2)(1+\theta_2)(\theta_1+\theta_2)^{1/\alpha} + \theta_2\Gamma(1+1/\alpha)[\alpha(\theta_1+\theta_2)+\alpha+1] \right\}$$

Nëse,  $\alpha = 1$ , atëherë besueshmëria e fuqisë së komponentëve për shpërndarjen inverse të Lindley-it jepet me

$$R(\alpha, \theta) = \frac{\theta_1^2 \{2\theta_2 + (1 + 2\theta_2)(\theta_1 + \theta_2) + (1 + \theta_2)(\theta_1 + \theta_2)^2\}}{\alpha(1 + \theta_1)(1 + \theta_2)(\theta_2 + \theta_2)^3} \quad (3.7.2)$$

## 3.8 Procedurat e vlerësimit të parametrave

### 3.8.1 Metoda e përgjasisë maksimale

Le të jetë  $x_1, x_2, \dots, x_n$  një (iid) zgjedhje e rastit e vrojtuar e madhësisë  $n$  prej shpërndarjes GILD (3.2.1). Atëherë, funksioni i përgjasisë i bazuar në zgjedhjen e vrojtuar përcaktohet si

$$\ell(x, \alpha, \theta) = \frac{\alpha^n \theta^{2n}}{(1 + \theta)^n} \prod_{i=1}^n (1 + x_i^\alpha) \prod_{i=1}^n x_i^{(-2\alpha-1)} e^{\theta \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}} \quad (3.8.1)$$

Funksioni korrespondues i përgjasisë (3.8.1), është

$$\begin{aligned} \log \ell &= n \ln(\alpha) + 2n \ln(\theta) - n \ln(1 + \theta) + \sum_{i=1}^n \ln(1 + x_i^\alpha) \\ &\quad - (2\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - \theta \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

Vlerësuesit maksimal të përgjasisë  $\hat{\alpha}_{ML}$  dhe  $\hat{\theta}_{ML}$  të  $\sigma$  dhe  $\lambda$ , respektivisht mund të merren si zgjidhje e ekuacioneve jolineare të mëposhtme:

$$\frac{\partial \log \ell}{\partial \alpha} = 0 = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \frac{\ln(x_i) x_i^\alpha}{1 + x_i^\alpha} - 2 \sum_{i=1}^n \ln(x_i) + \theta \sum_{i=1}^n \ln(x_i) x_i^{-\alpha} \quad (3.8.3)$$

$$\frac{\partial \log \ell}{\partial \theta} = 0 = \frac{2n}{1 + \theta} - \frac{n}{1 + \theta} - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \quad (3.8.4)$$

Duke përdorur (3.8.4), vlerësimi i parametrave me metodën e përgjasisë maksimale i parametrin  $\theta$  mund të merret në formën e termave të parametrin  $\alpha$  si

$$\hat{\theta}(\alpha) = \frac{n - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} + \sqrt{n^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}\right)^2 + 6n \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}}{2 \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}} \quad (3.8.5)$$

Duke zëvendësuar (3.8.5) në (3.8.3), vlerësuesit e parametrat  $\alpha$  me metodën e përgjasisë maksimale mund të caktohet në mënyrë unike si zgjidhje e ekuacioneve jo lineare

$$\frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \frac{\ln(x_i) x_i^\alpha}{1 + x_i^\alpha} - 2 \sum_{i=1}^n \ln(x_i) + \hat{\theta}(\alpha) \sum_{i=1}^n \ln(x_i) x_i^{-\alpha} = 0 \quad (3.8.6)$$

Vërejmë se ekuacionet e mësipërme (3.8.6) nuk mund të zgjidhen në mënyrë analitike kështu që do përdorim metoda numerike për zgjidhjen e tyre, si p.sh. algoritmin e Newton Raphsonit.

Gjetja e saktë e intervalit të besimit për parametrat  $\alpha$  dhe  $\theta$  nuk është detyrë e lehtë meqë vlerësuesit me metodën e përgjasisë maksimale  $\alpha$  dhe  $\theta$  nuk janë në formë të përshtatshme. Kështu që, mund të marrim intervalin e besimit të sjelljes asimptotike për  $\alpha$  dhe  $\theta$ . Duke përdorur teorinë e zgjedhjeve të mëdha të vlerësimit me metodën e përgjasisë maksimale, shpërndarja asimptotike e  $(\hat{\alpha}, \hat{\theta})$  është  $N_2(0, \Delta^{-1})$  ku,  $(\hat{\alpha}, \hat{\theta})$  janë vlerësuesit me ML të  $(\alpha, \theta)$ , dhe  $\Delta$  është matrica e informacionit e Fisherit. Elementet e  $\Delta$  janë

$$\Delta_{11} = \left| -\frac{\partial^2 \log \ell}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha=\hat{\alpha}}, \quad \Delta_{12} = \Delta_{21} = \left| -\frac{\partial^2 \log \ell}{\partial \theta \partial \alpha} \right|_{\alpha=\hat{\alpha}, \theta=\hat{\theta}} \quad \text{and} \quad \Delta_{22} = \left| -\frac{\partial^2 \log \ell}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\hat{\theta}}$$

ku,  $\frac{\partial^2 \log \ell}{\partial \alpha^2} = -\frac{n}{\alpha^2} - \theta \sum_{i=1}^n \ln^2(x_i) x_i^{-\alpha} + \sum_{i=1}^n \frac{\ln^2(x_i) x_i^\alpha}{1+x_i^\alpha}$ ,  $\frac{\partial^2 \log \ell}{\partial \theta^2} = -\frac{2n}{\theta^2} + \frac{n}{(1+\theta)^2}$  dhe  $\frac{\partial^2 \log \ell}{\partial \theta \partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \ln(x_i) x_i^\alpha$ . Matrica e variancë-kovariancës e parametrave  $\alpha$  dhe  $\lambda$  mund të llogaritet duke marrë inversin  $\Delta^{-1}$  si mëposhtë

$$V = \begin{bmatrix} \widehat{Var}(\alpha) & \widehat{Cov}(\alpha, \theta) \\ \widehat{Cov}(\theta, \alpha) & \widehat{Var}(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

Pra, intervali asimptotik i besimit (C.I.)  $100 \times (1 - \psi)\%$  për  $\alpha$  dhe  $\theta$  është

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{\alpha} - z_{\psi/2} \sqrt{\widehat{Var}(\alpha)}, & \hat{\alpha} + z_{\psi/2} \sqrt{\widehat{Var}(\alpha)} \\ \hat{\theta} - z_{\psi/2} \sqrt{\widehat{Var}(\theta)}, & \hat{\theta} + z_{\psi/2} \sqrt{\widehat{Var}(\theta)} \end{array} \right\}$$

ku,  $\widehat{Var}(\alpha)$  dhe  $\widehat{Var}(\theta)$  janë varianca e parametrave  $\alpha$  dhe  $\theta$  respektivisht. Këtu,  $z_{\psi/2}$  është percentili i sipërm  $100 \times (\psi/2)^{th}$  i shpërndarjes normale të standardizuar.

### 3.8.2 Vlerësimi i parametrave me metodën maksimale të prodhimit të distancave

Metoda maksimale e prodhimit të distancave (MPS) është propozuar nga [24]. Kjo metodë është bazuar në idenë se diferencat e pikave të njëpasnjëshme duhet të kenë shpërndarje identike. Mesi gjeometrik i diferencave në fjalë jepet me:

$$GM = \sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n+1} D_i} \quad (3.8.7)$$

ku, diferencat  $D_i$  janë përcaktuar si

$$D_i = \int_{x_{(i-1)}}^{x_{(i)}} f(x, \alpha, \theta) dx; \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (3.8.8)$$

ku,  $F(x_{(0)}, \alpha, \theta) = 0$  dhe  $F(x_{(n+1)}, \alpha, \theta) = 1$ . Vlerësimet MPS të  $\hat{\alpha}_{PS}$  dhe  $\hat{\theta}_{PS}$  të parametrave  $\alpha$  dhe  $\theta$  fitohen duke kryer maksimizimin e mesatares gjeometrike (GM) të diferencave. Zëvendësojmë (3.2.1) në (3.8.8) dhe duke logaritmuar shprehjen e mësipërme, do të kemi:

$$\text{LogGM} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \log [F(x_{(i)}, \alpha, \theta) - F(x_{(i-1)}, \alpha, \theta)] \quad (3.8.9)$$

Vlerësuesit me metodën MPS  $\hat{\alpha}_{PS}$  dhe  $\hat{\theta}_{PS}$  të parametrave  $\alpha$  dhe  $\theta$  mund të merren duke zgjidhur në mënyrë simultante ekuacionet jo-lineare:

$$\frac{\partial \text{LogGM}}{\partial \alpha} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \left[ \frac{F'_\alpha(x_{(i)}, \alpha, \theta) - F'_\alpha(x_{(i-1)}, \alpha, \theta)}{F(x_{(i)}, \alpha, \theta) - F(x_{(i-1)}, \alpha, \theta)} \right] = 0 \quad (3.8.10)$$

$$\frac{\partial \text{LogGM}}{\partial \theta} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \left[ \frac{F'_\theta(x_{(i)}, \alpha, \theta) - F'_\theta(x_{(i-1)}, \alpha, \theta)}{F(x_{(i)}, \alpha, \theta) - F(x_{(i-1)}, \alpha, \theta)} \right] = 0 \quad (3.8.11)$$

ku,

$$F'_\alpha(x, \alpha, \theta) = \frac{\theta}{1+\theta} \frac{\log(x)}{x^\alpha} e^{-\frac{\theta}{x^\alpha}} \quad \text{dhe} \quad F'_\theta(x, \alpha, \theta) = -\frac{\theta}{(1+\theta)^2} \frac{1+\theta(1+x^\alpha)}{x^{2\alpha}} e^{-\frac{\theta}{x^\alpha}}.$$

### 3.8.3 Vlerësimi i parametrave me metodën e katrorëve të vegjël

Le të jetë  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$  zgjedhja e renditur me vëllim  $n$  nga popullimi i shpërndarjes GIL të dhënë me (3.2.1). Atëherë, pritja matematike e funksionit të shpërndarjes së

të dhënave empirike përcaktohet si

$$E [F (X_{(i)})] = \frac{i}{n+1}; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.8.12)$$

Vlerësimet e katrorëve më të vegjël (LSE)  $\hat{\sigma}_{LS}$  dhe  $\hat{\theta}_{LS}$  të parametrave  $\sigma$  dhe  $\theta$ , fitohen duke kryer minimizimin e

$$Z (\alpha, \theta) = \sum_{i=1}^n \left( F (x_{(i)}, \alpha, \theta) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.8.13)$$

Kështu që, vlerësimet  $\hat{\alpha}_{LS}$  dhe  $\hat{\theta}_{LS}$  të parametrave  $\alpha$  dhe  $\theta$  mund të fitohen si zgjidhje e sistemit të ekuacioneve të mëposhtme:

$$\frac{\partial Z (\alpha, \theta)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n F'_{\alpha}(x_{(i)}, \alpha, \theta) \left( F (x_{(i)}, \alpha, \theta) - \frac{i}{n+1} \right) = 0 \quad (3.8.14)$$

$$\frac{\partial Z (\alpha, \theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n F'_{\theta}(x_{(i)}, \alpha, \theta) \left( F (x_{(i)}, \alpha, \theta) - \frac{i}{n+1} \right) = 0 \quad (3.8.15)$$

ku,  $F'_{\alpha}(x_{(i)}, \alpha, \theta)$  dhe  $F'_{\theta}(x_{(i)}, \alpha, \theta)$  janë përcaktuar në paragrafet e mësipërm. Këto ekuacione jolineare mund të zgjidhen duke përdorur metodën e Newtonit. Zgjidhja e optimizimeve jolineare mund të kryhet përmes softverit R ([129]), përkatësisht pake-tave për optimizim *optim()*, *nlm()* dhe *bbmle()* etj. Ne kemi përdorur paketën *nlm()* për optimizimet (3.8.1), (3.8.9) dhe (3.8.13).

## 3.9 Disa përgjithësime

Ne këtë paragraf, do të japim disa densitete që janë versione të përgjithësuara të shpërndarjes GIL. Dekadën e fundit janë studiuar mjaft mirë tri metoda si: metoda e fuqizimit, beta-përgjithësimi dhe Kumaraswamy të përgjithësimi të shpërndarjeve; ideja e tyre ishte të fusnin dy parametra për formën:

### 3.9.1 GILD në fuqi.

Densiteti i kësaj shpërndarje është

$$f_{EGILD}(x, \alpha, \beta, \theta) = \frac{\beta \alpha \theta^2}{1 + \theta} \cdot \frac{x^{\alpha} + 1}{x^{2\alpha+1}} \left[ 1 + \frac{\theta}{1 + \theta} \frac{1}{x^{\alpha}} \right]^{\beta-1} e^{-\frac{\beta \theta}{x^{\alpha}}} \quad (3.9.1)$$

për  $x > 0, \alpha > 0, \theta > 0, \beta > 0$  ku,  $\theta$  është parametri shkallë dhe  $\alpha, \beta$  janë parametrat e formës së lakores. Nëse  $\alpha = 1$ , atëherë densiteti (3.9.1) reduktohet në formën

$$f_{EGILD}(x, \beta, \theta) = \frac{\beta\theta^2}{1+\theta} \cdot \frac{x+1}{x^3} \left[1 + \frac{\theta}{1+\theta} \frac{1}{x}\right]^{\beta-1} e^{-\frac{\beta\theta}{x}} \quad (3.9.2)$$

që mund të quhet shpërndarja inverse e Lindley-it në fuqi si një version invers i shpërndarjes së përgjithësuar të Lindley-it propozuar nga [?]. Funkzioni përkatës i shpërndarjes është, (3.9.2)

$$F_{EGILD}(x, \alpha, \beta, \theta) = \left[ \left(1 + \frac{\theta}{(1+\theta)x^\alpha}\right) e^{-\frac{\theta}{x^\alpha}} \right]^\beta \quad (3.9.3)$$

Funksioni i mbijetesës është

$$S_{EGILD}(x, \alpha, \beta, \theta) = 1 - \left( \left[1 + \frac{\theta}{(1+\theta)x^\alpha}\right] e^{-\frac{\theta}{x^\alpha}} \right)^\beta \quad (3.9.4)$$

dhe funksioni i Hazardit është

$$h_{EGILD}(x, \alpha, \beta, \theta) = \frac{\frac{\beta\alpha\theta^2}{1+\theta} \cdot \frac{x^\alpha+1}{x^{2\alpha+1}} \left[1 + \frac{\theta}{1+\theta} \frac{1}{x^\alpha}\right]^{\beta-1} e^{-\frac{\beta\theta}{x^\alpha}}}{1 - \left( \left[1 + \frac{\theta}{(1+\theta)x^\alpha}\right] e^{-\frac{\theta}{x^\alpha}} \right)^\beta} \quad (3.9.5)$$

### 3.9.2 Shpërndarja beta-GILD

Densiteti i shpërndarjes beta-GIL jepet me:

$$f_{BGILD}(x, \alpha, \theta, a, b) = \frac{\alpha\theta^2}{(1+\theta)B(a, b)} \left[1 + \frac{\theta}{1+\theta} \cdot \frac{1}{x^\alpha}\right]^{a-1} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{\theta}{1+\theta} \cdot \frac{1}{x^\alpha}\right) e^{-\frac{\theta}{x^\alpha}}\right]^{b-1} \left[1 + \frac{x^\alpha}{x^{2\alpha+1}}\right] e^{-\frac{a\theta}{x^\alpha}} \quad (3.9.6)$$

Funksioni korrespondues i shpërndarjes jepet me:

$$F_{BGILD}(x, \alpha, \theta, a, b) = \frac{\left[1 + \frac{\theta}{1+\theta} \cdot \frac{1}{x^\alpha}\right]^a e^{-\frac{a\theta}{x^\alpha}}}{aB(a, b)} {}_2F_1\left(a, 1-b, a+1, \left(1 + \frac{\theta}{1+\theta} \cdot \frac{1}{x^\alpha}\right) e^{-\frac{\theta}{x^\alpha}}\right) \quad (3.9.7)$$

ku  $B(\cdot, \cdot)$  është funksioni beta dhe  ${}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_0^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k$  është funksioni hipergjeometrik.

Funksioni korrespondues i mbijetesës jepet me:

$$S_{BGILD}(x, \alpha, \theta, a, b) = 1 - \frac{1}{aB(a, b)} \left[ 1 + \frac{\theta}{1+\theta} \cdot \frac{1}{x^\alpha} \right]^a e^{-\frac{a\theta}{x^\alpha}} \cdot {}_2F_1 \left( a, 1-b, a+1, \left( 1 + \frac{\theta}{1+\theta} \cdot \frac{1}{x^\alpha} \right) e^{-\frac{\theta}{x^\alpha}} \right) \quad (3.9.8)$$

dhe funksioni i Hazardit jepet me:

$$h_{BGILD}(x, \alpha, \theta, a, b) = \frac{\frac{\alpha\theta^2}{(1+\theta)B(a,b)} \left[ 1 + \frac{\theta}{1+\theta} \cdot \frac{1}{x^\alpha} \right]^{a-1} \cdot \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\theta}{1+\theta} \cdot \frac{1}{x^\alpha} \right) e^{-\frac{\theta}{x^\alpha}} \right]^{b-1} \left[ 1 + \frac{x^\alpha}{x^{2\alpha+1}} \right] e^{-\frac{a\theta}{x^\alpha}}}{1 - \frac{1}{aB(a,b)} \left[ 1 + \frac{\theta}{1+\theta} \cdot \frac{1}{x^\alpha} \right]^a e^{-\frac{a\theta}{x^\alpha}} {}_2F_1 \left( a, 1-b, a+1, \left( 1 + \frac{\theta}{1+\theta} \cdot \frac{1}{x^\alpha} \right) e^{-\frac{\theta}{x^\alpha}} \right)} \quad (3.9.9)$$

### 3.9.3 Shpërndarja Kumaraswamy-GILD

Densiteti i shpërndarjes Kumaraswamy-GIL jepet me:

$$f_{KwGILD}(x, \alpha, \theta, a, b) = \frac{ab\alpha\theta^2}{1+\theta} \left( \frac{1+x^\alpha}{x^{2\alpha+1}} \right) \left[ 1 + \frac{\theta}{1+\theta} \frac{1}{x^\alpha} \right]^{a-1} \times \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\theta}{1+\theta} \frac{1}{x^\alpha} \right)^a e^{-\frac{a\theta}{x^\alpha}} \right]^{b-1} e^{-\frac{a\theta}{x^\alpha}} \quad (3.9.10)$$

Funksioni korrespondues i shpërndarjes jepet me:

$$F_{KwGILD}(x, \alpha, \theta, a, b) = 1 - \left\{ 1 - \left[ 1 + \frac{\theta}{1+\theta} \frac{1}{x^\alpha} \right]^a e^{-\frac{a\theta}{x^\alpha}} \right\}^b \quad (3.9.11)$$

Funksioni korrespondues i mbijetesës jepet me:

$$S_{KwGILD}(x, \alpha, \theta, a, b) = \left\{ 1 - \left[ 1 + \frac{\theta}{1+\theta} \frac{1}{x^\alpha} \right]^a e^{-\frac{a\theta}{x^\alpha}} \right\}^b \quad (3.9.12)$$

dhe funksioni i Hazardit është:

$$h_{KwGILD}(x, \alpha, \theta, a, b) = \frac{ab\alpha\theta^2}{1+\theta} \left( \frac{1+x^\alpha}{x^{2\alpha+1}} \right) \left[ 1 + \frac{\theta}{1+\theta} \frac{1}{x^\alpha} \right]^{a-1} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\theta}{1+\theta} \frac{1}{x^\alpha} \right)^a e^{-\frac{a\theta}{x^\alpha}} \right]^{-1} e^{-\frac{a\theta}{x^\alpha}}$$

## 3.10 Algoritmet për simulim dhe studim

### 3.10.1 Transformimet e ndryshoreve të rastit

Për të gjeneruar zgjedhjen e rastit të madhësisë  $n$  nga  $GILD(\theta)$ , ndjekim hapat e mëposhtëm:

H1p1 1. Japim vlerat për  $\alpha$  dhe  $\theta$ .

H2p2 2. Gjenerojmë,  $U_1$  dhe  $U_2$  nga  $U(0, 1)$ .

H3p3 3. Bëjmë transformimet

$$Z_1 = \sqrt{-2\sigma^2 \ln U_1 \cos(2\pi U_2)}$$

dhe

$$Z_2 = \sqrt{-2\sigma^2 \ln U_1 \sin(2\pi U_2)}, \text{ ku, } \sigma = \sqrt{\frac{\theta}{2}}$$

H4p4 4. Përsërisim hapat 2-3, dhe marrim  $Z_1, Z_2, Z_3$  and  $Z_4$ .

H5p5 5. Përcaktojmë,  $Y = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2$  dhe marrim  $P = \frac{1}{Y^\alpha}$

H6p6 6. Gjenerojmë,  $W$  inverse Weibull si

$$W = \left(-\frac{1}{\theta} \log(U)\right)^{-\frac{1}{\alpha}}, \text{ ku } U \sim U(0, 1)$$

H7p7 7. Nëse  $U \leq \frac{\theta}{1+\theta}$ , pranojmë  $W$  si  $GILD(\alpha, \theta)$  p.sh  $X = W$  përndryshe  $X = P$ .

### 3.10.2 Metoda inverse e CDF

Algoritmi për gjenerimin e mostrave me vëllim  $n$  nga  $GILD(\alpha, \theta)$ :

**Hapi 1.** Japim vlerat për  $n, \alpha, \theta$  dhe vlerën fillestare  $x^0$ .

**Hapi 2.** Gjenerojmë  $U \sim Unif(0, 1)$ .

**Hapi 3.** Caktojmë vlerën e re të  $x^0$  duke përdorur formulën e Newton-it

$$x^* = x^0 - R(x^0, \theta)$$

ku,  $R(x^0, \theta) = \frac{F_X(x^0, \theta) - U}{f_X(x^0, \theta)}$ ,  $F_X(\cdot)$  dhe  $f_X(\cdot)$  janë dhënë me ekuacionet (3.2.2) dhe (3.2.1) respektivisht.

**Hapi 4.** Nëse  $|x^0 - x^*| \leq \epsilon$ , (toleranca shumë e vogël,  $\epsilon > 0$ ), atëherë marrim  $x = x^*$  si mostër prej  $GILD(\alpha, \theta)$ .

**Hapi 5.** Nëse  $|x^0 - x^*| > \epsilon$ , atëherë, marrim  $x^0 = x^*$  dhe shkojmë në hapin 3.

**Hapi 6.** Përsërisim hapat 3-5,  $n$  herë për  $x_1, x_2, \dots, x_n$  respektivisht.

### 3.10.3 Simulimet

Në këtë paragraf do të studiojmë vlerësimin e parametrave në termat e gabimit katror mesatar në bazë të simulimeve nga zgjedhja e marrë prej (3.2.1) me vëllim të ndryshëm të saj. Për këtë qëllim, do të konsiderojmë vlerat e parametrave si  $\alpha = 3$ ,  $\theta = 1$  të çfarëdoshëm dhe  $n = 10, 20, \dots, 100$ . Të gjitha algoritmet janë koduar në ([129]); ne kemi përdorur algoritmin e dhënë në 3.10.2 për qëllimet e simulimit. Kodet në R janë dhënë në fund të kapitullit. U llogaritëm vlerësimet MLE, LSE dhe MPS për parametrat  $\alpha$  dhe  $\theta$  për mbi çdo zgjedhje të gjeneruar. Procesi u përsërit 1000 herë, dhe vlerësimet mesatare dhe gabimet mesatare katrore përkatëse tregohen në Tabelën 3.1.

Nga tabela 3.1, mund të shihet se me rritjen e vëllimit të zgjedhjes zvogëlohet gabimi i mesatares katrore, që provon se vlerësuesit janë konsistent. Metoda maksimale e prodhimit të distancave për vlerësimin e parametrave  $\alpha$  dhe  $\theta$  është përdorur së bashku me metodën e përgjasisë maksimale dhe metodën e katrorëve më të vegjël. Megjithatë, metoda e katrorëve më të vegjël për vlerësimin e parametratit  $\theta$  është më e mirë se sa metoda e përgjasisë maksimale, në anën tjetër, metoda e përgjasisë maksimale për vlerësimin e parametratit  $\alpha$  performon me mirë se sa metoda e katrorëve të vegjël.

Tabela 3.1: Vlerësimi i parametrave së bashku me gabimet mesatare katrore (në rreshtin e II-të të secilës qelizë) me zgjedhje që kanë vëllime të ndryshme

n	$\alpha$			$\theta$		
	MLE	LSE	PSE	MLE	LSE	PSE
10	3.4442	2.9901	2.7470	1.0175	1.0404	1.0532
	1.2717	1.3215	0.6798	0.1300	0.1160	0.0873
20	3.2293	2.9866	2.8240	1.0022	1.0185	1.0302
	0.3925	0.4933	0.2969	0.0507	0.0489	0.0422
30	3.1573	2.9886	2.8583	0.9949	1.0060	1.0181
	0.2298	0.2882	0.1902	0.0307	0.0299	0.0269
40	3.1215	2.9952	2.8805	0.9952	1.0034	1.0146
	0.1590	0.2119	0.1385	0.0224	0.0223	0.0202
50	3.0965	2.9934	2.8932	0.9954	1.0017	1.0123
	0.1252	0.1682	0.1141	0.0184	0.0181	0.0169
60	3.0804	2.9954	2.9031	0.9956	1.0014	1.0106
	0.0998	0.1379	0.0931	0.0148	0.0149	0.0137
70	3.0711	2.9973	2.9140	0.9966	1.0020	1.0101
	0.0852	0.1175	0.0805	0.0125	0.0129	0.0118
80	3.0553	2.9937	2.9138	0.9978	1.0027	1.0100
	0.0691	0.1009	0.0681	0.0106	0.0110	0.0100
90	3.0511	2.9944	2.9219	0.9992	1.0038	1.0104
	0.0619	0.0889	0.0610	0.0095	0.0099	0.0090
100	3.0481	2.9943	2.9290	0.9982	1.0025	1.0087
	0.0565	0.0785	0.0557	0.0087	0.0091	0.0083

### 3.11 Modelimi me të dhëna reale

Në këtë paragraf, do të përdorim të dhënat reale për nivelin e përmytjeve të dhënë në tabelën 3.2, për të provuar aplikimin e shpërndarjes së përgjithësuar inverse të Lindley-it me të dhëna reale. Të dhënat janë marrë nga inxhinieria civile dhe paraqesin maksimumin e nivelit të përmytjeve (në miliona kubik ujë për sekondë) për lumin Susquehanna në Harrisburg, Pennsylvania mbi 20 perioda katërvjeçare prej 1890 deri 1969. Këto të dhëna reale janë diskutuar në ndërtimin (krahasimin) e modeleve dhe analizave të ndryshme të dhëna në literaturë, ku fillimisht ishin studiuar nga Duman [26] në studimin e analizës shumëpërmasore diskriminante të shpërndarjes së Weibullit dhe shpërndarjes log normale. Studimin e këtyre të dhënave në aspektin e Bayesit e kanë dhënë Upadhyay dhe Peshwani [111] duke performuar analizën e Bayesit për krahasimin e modeleve në mes shpërndarjes lognormale dhe asaj të Weibull-it dhe ka gjetur se modeli lognormal është modeli më i mirë se ai i Weibull-it. Maswadah [65] poashtu sygjeron që të përdoret shpërndarja inverse e Weibull-it për këto të dhëna. Së fundmi, Singh dhe të tjerë [125] treguan epërsinë e modelit të shpërndarjes inverse të Weibull-it për të dhënat e konsideruara më parë në krahasim me modelet gamma, Weibull, fleksibile e Weibull-it dhe shpërndarja lognormale. Duke përdorur kriteret bazë për krahasimet e modeleve si: kiteri i informacionit të Akaikes (AIC), kriteri i informacionit të Bayesit dhe vlera e test statistikës së Kolmogorov-Smirnovit(K-S) konkludojmë se shpërndarja inverse e Weibull-it i përshtatet më mirë këtyre të dhënave në krahasim me shpërndarjet e tjera në shqyrtim.

Tabela 3.2: Të dhënat për nivelin e përmytjeve

0.654	0.613	0.315	0.449	0.297
0.402	0.379	0.423	0.379	0.324
0.269	0.740	0.418	0.412	0.494
0.416	0.338	0.392	0.484	0.265

Së pari, ne do të përdorim statistikën test të raportit të përgjasisë maksimale

(LR), që të shikohet se parametri shtesë në shpërndarjen inverse të Lindley-it, do të ketë efekt për modele më të mira në aplikimin e statistikës. Në rastin tonë, hipoteza mund të formulohet si

hipoteza fillestare;  $H_0 : \alpha = 1$

krahas

hipoteza alternative;  $H_1 : \alpha \neq 1$ .

Në rastin tonë, statistika test LR për testimin e  $H_0$  kundrejt  $H_1$  është  $\xi = -2(\ell_0 - \ell_1)$ , ku  $\ell_1$  dhe  $\ell_0$  janë funksionet e përgjasisë maksimale nën hipotezat  $H_1$  dhe  $H_0$ , respektivisht.

Statistika  $\xi$  është asimtotikisht (kur  $n \rightarrow \infty$ ) me shpërndarje  $\chi_k^2$  me  $k$  shkallë lirie, ku  $k$  është numri i parametrave. Testi LR hedh poshtë hipotezën  $H_0$  nëse  $\xi > \chi_k^2(\gamma)$ , ku  $\chi_k^2(\gamma)$  shënon kuartilin  $100\gamma\%$  të shpërndarjes  $\chi_k^2$ . Për bashkësinë e të dhënave reale, vlera e statistikës test LR është  $\xi = 31.12417$ , që është më i madh se  $\chi_1^2(\gamma) = 3.841$ . Nga kjo rrjedh se hidhet poshtë hipoteza fillestare.

Tabela 3.3: Vlerësimet e parametrave me MLE, Log-likelihoods, AIC, BIC, K-S dhe rangimet [1(më i miri) deri 7( më i keqi)] të modeleve të shqyrtuara

Modeli	Vlerësuesit	LogL	AIC	BIC	K-S	Rangimi	
						AIC	K-S
Inv. Lindley( $\theta$ )	$\hat{\theta}=0.63445$	-0.58543	0.8291	0.1302	0.35562	6	6
Inv. Exponential ( $\lambda$ )	$\hat{\lambda}=2.54050$	-2.74032	7.4806	6.7817	0.41253	7	7
Gn. Inv. Lindley( $\alpha, \theta$ )	$\hat{\alpha}=3.07667$ $\hat{\theta}=0.08987$	16.14752	-28.2950	-29.6930	0.09457	1	1
Inv. Weibull( $\alpha, \lambda$ )	$\hat{\alpha}=4.31476$ $\hat{\lambda}=0.01194$	16.09737	-28.1947	-29.5927	0.10605	3	2
Inv. Gamma( $\alpha, \beta$ )	$\hat{\alpha}=14.57815$ $\hat{\beta}=5.73829$	16.14164	-28.2833	-29.6812	0.12716	2	3
Inv. Gaussian( $\mu, \lambda$ )	$\hat{\mu}=0.42315$ $\hat{\lambda}=5.64100$	15.85202	-27.7040	-29.1020	0.14685	4	4
Gn. Inv. Exponential( $\alpha, \lambda$ )	$\hat{\alpha}=37.70078$ $\hat{\lambda}=1.64480$	15.41120	-26.8224	-28.2203	0.15838	5	5

## 3.12 R-codi për gjenerime të zgjedhjeve

---

```
rm(list=ls(all=TRUE))
Algoritmi=function(ss,n,alpha,theta){
f=function(x,alp,th)
{((alp*th^2)/(1+th))*exp(-th/(x^alp))*((1+x^(alp))/(x^(2*alp+1)))}
F=function(x,alp,th)
{(1+(th/((1+th)*(x^alp))))*exp(-th/(x^(alp)))}
A_MLE=rep(NA,ss);T_MLE=rep(NA,ss)
A_LSE=rep(NA,ss);T_LSE=rep(NA,ss)
A_PSE=rep(NA,ss);T_PSE=rep(NA,ss)
for(jj in 1:ss){
set.seed(jj)
print(jj)
#####
u=runif(n)
x=rep(0,n)
for(i in 1:n){
x0=1
xnew=x0-((F(x0,alpha,theta)-u[i])/f(x0,alpha,theta))
while(abs(xnew-x0)>0.0001){
x0=xnew
xnew=x0-((F(x0,alpha,theta)-u[i])/f(x0,alpha,theta))
}
x[i]=xnew
}
x=sort(x)
#####
logL=function(th){
S=0
for(i in 1:n){
S=S+log(f(x[i],th[1],th[2]))
}
return(-S)
}
MLE=nlm(logL,c(.5,1),hessian=T)
#####
LS=function(th){
s=0
for(i in 1:n){
s=s+((F(x[i],th[1],th[2])-(i/(n+1)))^2)
```

```

}
return(s)
}
LSE=nlm(LS,c(alpha,theta))
#*****
PS=function(th){
d1=log(F(x[1],th[1],th[2]))
dn1=log(1-F(x[n],th[1],th[2]))
s=0
for(i in 2:n){
s=s+log(F(x[i],th[1],th[2])-F(x[i-1],th[1],th[2]))
}
D=(s+d1+dn1)/(n+1)
return(-D)
}
PSE=nlm(PS,c(alpha,theta))
#*****
A_MLE[jj]=MLE$estimate[1]
A_LSE[jj]=LSE$estimate[1]
A_PSE[jj]=PSE$estimate[1]
T_MLE[jj]=MLE$estimate[2]
T_LSE[jj]=LSE$estimate[2]
T_PSE[jj]=PSE$estimate[2]
}
Est=data.frame(A_MLE,A_LSE,A_PSE,T_MLE,T_LSE,T_PSE)
M=apply(Est,2,mean)
A_MSE=apply((Est[1:3]-alpha)^2,2,mean)
T_MSE=apply((Est[4:6]-theta)^2,2,mean)
DD1=data.frame(n,alpha,theta,A_MLE=M[1],
               A_LSE=M[2],A_PSE=M[3],T_MLE=M[4],T_LSE=M[5],T_PSE=M[6])
DD2=data.frame(n,alpha,theta,A_MSE[1],
               A_MSE[2],A_MSE[3],T_MSE[1],T_MSE[2],T_MSE[3])
print(M)
print(DD1)
print(DD2)
}
library(compiler)
Algoritmi=cmpfun(Algoritmi)
kk=1000
Algoritmi(kk,10,3,1)

```



# Kapitulli 4

## Shpërndarja e Weibull-Rayleigh-it: Vetitë dhe aplikimet

### 4.1 Hyrje

Shpërndarja e Rayleigh-it konsiderohet si shpërndarja me aplikimin më të madh pas shpërndarjes normale. Aplikimi i kësaj shpërndarje ndër të tjera është tek radarët, vetitë e valëve të tipit sinus me zhurmë etj. Në vitin 1980 Rayleigh fitoi këtë shpërndarje duke punuar në rezultatet e amplitudave të zërit që vijnë nga shumë burime të rëndësishme. Megjithatë në ditët e sotme shpërndarja e Rayleigh-it ka një fushë të gjërë aplikimi duke përfshirë analizën e besueshmerisë(sigurisë) (ang. reliability analysis), eksperimentet e testeve jetësore (ang.life testing experiments), statistikën e aplikuar dhe hulumtimet nëpër klinika universitare.

Meqë shpërndarja e Rayleigh-it ka funksionin e raportit të Hazardit linearisht rritës, atëhere kjo veti e bën të çmuar për të studiuar komponentet që nuk kanë defekte të prodhimit në fabrikë por vjetërsohen shpejt me kohë. Një aplikim kryesor i kësaj shpërndarje është tek analizimi i të dhënave të shpejtësisë së erës. Kjo shpërndarje është një rast special i shpërndarjes së Weibullit ku parametri i formës së lakores është i barabartë me 2. Origjina dhe aspektet e kësaj shpërndarje mund të gjenden në Siddiqui [121], Hirano [59] dhe Howlader & Hossian [60]. Dyer & Whisenand [28] kanë shfaqur rëndësinë e kësaj shpërndarje në komunikimet inxhinierike dhe Polovko

[115] ka paraqitur rëndësinë e aplikimit të saj tek pajisjet me elektrovakum. Disa autorë kanë kontribuar në studimin e këtij modeli si p.sh Sinha & Howlader [122], Ariyawansa & Templeton [8], Howlader [60], Lalitha & Mishra [102] dhe Abd Elfattah dhe të tjerë. [7].

**Përkufizimi 4.1.1.** [86] Ndryshorja e rastit  $X$  ka shpërndarje të Rayleigh-it ( $RD$ ) me parametër  $\theta$  nëse densiteti i saj jepet me:

$$g(x) = \theta x e^{-\frac{\theta}{2}x^2}, x > 0, \theta > 0 \quad (4.1.1)$$

dhe funksioni i shpërndarjes ka formën:

$$G(x, \theta) = 1 - e^{-\frac{\theta}{2}x^2}, x > 0, \theta > 0. \quad (4.1.2)$$

ku me  $\theta$  kemi shënuar parametrin e formës së lakores(ang. shape parameter).

Shpërndarja e Weibull-it është shpërndarje mjaft popullore dhe gjatë dekadave të fundit është përdorur për modelimin e të dhënave në inxhinieri, studimet bilologjike, analiza statistikore të mbijetesës etj. Në përgjithësi është mjaft e përshtatshme për modelimin e të dhënave ku raporti i Hazardit është monoton. Marcelo et al. [66] kanë përkufizuar dhe studiuar familjen e shpërndarjeve njëpermasore me dy parametra shtesë në mënyrë të ngjashme sikurse zgjerimin e shpërndarjes së Weibull-it (Gurvich et al., [45]) dhe shpërndarja Gama ( Zografos and Balakrishnan, [133]), duke përdorur si gjenerator shpërndarjen e Weibullit. Termi gjenerator nënkupton se për çdo shpërndarje bazë  $G$  do të kemi shpërndarje tjetër  $F$ .

Nëse  $G(x)$  është funksioni i shpërndarjes bazë i variablës së rastit  $X$ , me densitet  $g(x)$  dhe me funksion të shpërndarjes së Weibull-it  $F(x, \alpha, \beta) = 1 - e^{-\alpha x^\beta}$  (for  $x > 0$ ) me parametrat pozitivë  $\alpha$  dhe  $\beta$ . Bazuar në këtë densitet, zëvendësojmë  $x$  me  $\frac{G(x)}{\bar{G}(x)}$  ( $\bar{G}(x) = 1 - G(x)$ ). Tani do kemi një shpërndarje të re të quajtur shpërndarja Weibull- G (ose shkurt Wei- G) me dy parametra shtesë  $\alpha$  dhe  $\beta$ . Fillimisht është

përcaktuar në vitin 2014 në punimin e (Marcelo et al. [66]) si më poshtë

$$\begin{aligned} F(x, \alpha, \beta, \zeta) &= \int_0^{\frac{G(x;\zeta)}{1-G(x;\zeta)}} \alpha \beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^\beta} dt \\ &= 1 - e^{\left\{-\alpha \left[\frac{G(x;\zeta)}{\overline{G}(x)}\right]^\beta\right\}}, x \in R; \alpha, \beta > 0, \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

ku  $G(x; \zeta)$  është funksioni i shpërndarjes bazë. Familja e densitetit përkatës ka formën

$$f(x, \alpha, \beta, \zeta) = \alpha \beta g(x; \zeta) \frac{(G(x; \zeta))^{\beta-1}}{(\overline{G}(x))^{\beta+1}} e^{\left\{-\alpha \left[\frac{G(x;\zeta)}{\overline{G}(x)}\right]^\beta\right\}}. \quad (4.1.4)$$

Ndryshorja e rastit  $X$  me densitet (4.1.4) shënohet me  $X \sim Wei-G(\alpha, \beta, \zeta)$ . Parametrat shtesë të fituar nga gjeneratori i shpërndarjes Weibull i japin përparësi të madhe shpërndarjes së re sepse fitohet një shpërndarje me fleksibile. Nëse  $\beta = 1$ , atëherë kemi rastin ku gjenerator është shpërndarja eksponenciale. Një interpretim i familjes së shpërndarjes  $Wei - G$  mund të shihet tek punimi (Cooray, [22] në kontekstin e njejtë. Funksioni i mbijetesës dhe raporti i Hazardit për familjen  $Wei - G$  jepet me

$$R(x, \alpha, \beta, \zeta) = 1 - F(x, \alpha, \beta, \zeta) = e^{\left\{-\alpha \left[\frac{G(x;\zeta)}{\overline{G}(x)}\right]^\beta\right\}}, \quad (4.1.5)$$

dhe

$$\begin{aligned} h(x, \alpha, \beta, \zeta) &= \frac{f(x, \alpha, \beta, \zeta)}{R(x, \alpha, \beta, \zeta)} \\ &= \frac{\alpha \beta g(x; \zeta) (G(x; \zeta))^{\beta-1}}{(\overline{G}(x))^{\beta+1}} = \frac{\alpha \beta (G(x; \zeta))^{\beta-1}}{(\overline{G}(x))^\beta} h(x, \zeta), \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

respektivisht, ku  $h(x, \zeta) = \frac{g(x;\zeta)}{(\overline{G}(x))}$ . Shprehja  $\frac{\alpha \beta (G(x;\zeta))^{\beta-1}}{(\overline{G}(x))^\beta}$  shërben si faktor korigjues për raportin e Hazardit në modelin bazë. Gjeneratori (4.1.3) mund të përdoret në situata të përgjithshme për modelimin e të dhënave të mbijetesës me funksione të ndryshme të raportit të Hazardit.

### 4.1.1 Vetitë matematikore.

Duke përdorur serinë fuqi për funksionin eksponencial marrim

$$e^{\left\{-\alpha \left[\frac{G(x;\zeta)}{\overline{G}(x)}\right]^\beta\right\}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \alpha^i}{i!} \left[\frac{G(x;\zeta)}{\overline{G}(x)}\right]^{i\beta}, \quad (4.1.7)$$

Duke zëvendësuar (4.1.7) në (4.1.4), fitojmë

$$f(x, \alpha, \beta, \zeta) = \alpha \beta g(x; \zeta) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \alpha^i}{i!} \frac{(G(x; \zeta))^{\beta(i+1)-1}}{(\overline{G}(x))^{\beta(i+1)+1}}. \quad (4.1.8)$$

Duke përdorur teoremën e binomit kemi

$$[1 - G(x; \zeta)]^{-(\beta(i+1)+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta(i+1) + j + 1)}{j! \Gamma(\beta(i+1) + 1)} G(x; \zeta)^j. \quad (4.1.9)$$

Pas zëvendësimit të (4.1.9) në (4.1.8), densiteti *Wei* – *G* është

$$f(x, \alpha, \beta, \zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \omega_{i,j} g(x; \zeta) (G(x; \zeta))^{\beta(i+1)+j-1}, \quad (4.1.10)$$

ku

$$\omega_{i,j} = \frac{(-1)^i \alpha^{i+1} \beta \Gamma(\beta(i+1) + j + 1)}{i! j! \Gamma(\beta(i+1) + 1)}.$$

## 4.2 Shpërndarja e Weibull-Rayleigh-it

Në këtë paragraf do të studiojmë shpërndarjen me tre parametra të quajtur shpërndarja e Weibull-Rayleigh (*WR*). Duke zëvendësuar  $G(x)$  dhe  $g(x)$  të dhënë me (4.1.1) and (4.1.2) në (4.1.10) marrim funksionin e shpërndarjes së Weibull-Rayleigh-it

$$F(x, \alpha, \beta, \theta) = 1 - e^{-\alpha \left(e^{\frac{\theta}{2}x^2} - 1\right)^\beta}, \quad x > 0. \quad (4.2.1)$$

Densiteti i *WR* jepet me

$$f(x, \alpha, \beta, \theta) = \alpha \beta \theta x e^{\frac{\theta}{2}x^2} \left(e^{\frac{\theta}{2}x^2} - 1\right)^{\beta-1} e^{-\alpha \left(e^{\frac{\theta}{2}x^2} - 1\right)^\beta}, \quad x > 0, \quad (4.2.2)$$

dhe raporti i funksionit të Hazardit është

$$h(x, \alpha, \beta, \theta) = \alpha \beta \theta x e^{\frac{\theta}{2}x^2} \left(e^{\frac{\theta}{2}x^2} - 1\right)^{\beta-1}.$$

## 4.3 Vetitë statistikore

Në këtë paragraf do të studiojmë vetitë statistikore të shpërndarjes  $WR$ , gjegjësisht funksionin e kuantilit, asimetrisë dhe kurtosis, momentet dhe funksionin e momenteve gjeneruese.

### 4.3.1 Funkzioni i kuantilit dhe Simulimet

Funksioni i kuantilit në lidhje me (4.2.1) është

$$Q(u) = F^{-1}(u) = \sqrt{\frac{2}{\theta} \ln \left[ 1 + \left( \frac{-\ln(1-u)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]} \quad (4.3.1)$$

Simulimin e ndryshoreve të rastit do ta bëjmë si mëposhtë: Le të jetë  $U$  shpërndarja uniforme në intervalin  $(0, 1)$ . Kështu që, duke përdorur transformimet inverse konsiderojmë variablin  $X$  me

$$X = \sqrt{\frac{2}{\theta} \ln \left[ 1 + \left( \frac{-\ln(1-u)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]}, \quad (4.3.2)$$

Nëse zëvendësojmë  $u = 1/2$  në (4.3.2), marrim medianën  $M$  të  $X$

$$M = \sqrt{\frac{2}{\theta} \ln \left[ 1 + \left( \frac{\ln 2}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]}.$$

### 4.3.2 Asimetria dhe sheshësia

Asimetria e Bowley-it (1962) jepet përmes kuantileve:

$$S_K = \frac{Q_{0.75} - 2Q_{0.5} + Q_{0.25}}{Q_{0.75} - Q_{0.25}},$$

dhe sheshësia e Moors-it (1998), jepet me oktile:

$$K_u = \frac{Q_{0.875} - Q_{0.625} - Q_{0.375} + Q_{0.125}}{Q_{0.75} - Q_{0.25}}.$$

ku  $Q(\cdot)$  paraqet kuantilet.

### 4.3.3 Momentet

**Teoremë 4.3.1.** [76] Nëse  $X$  ka shpërndarje  $WR(\theta, \beta, \alpha)$ , atëherë momentet e rendit të  $r$ -të për ndryshoren e rastit  $X$  jepen si mëposhtë

$$\mu'_r = \sum_{i,j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{i,j} (-1)^k \binom{\beta(i+1)+j-1}{k} \frac{\theta \Gamma(1 + \frac{r}{2})}{2 \left[ \frac{2}{\theta(k+1)} \right]^{1+\frac{r}{2}}}. \quad (4.3.3)$$

*Vërtetim.* Fillimisht rikujtojmë se momentet e rendit  $r$  për ndryshoren e rastit  $X$  me densitet  $f(x)$  jepet me

$$\mu'_r = \int_0^{\infty} x^r f(x) dx.$$

Zëvendësojmë (4.1.1) dhe (4.1.2) në (4.1.10) dhe fitojmë

$$\mu'_r = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \omega_{i,j} \theta \int_0^{\infty} x^{r+1} e^{-\frac{\theta}{2}x^2} \left[ 1 - e^{-\frac{\theta}{2}x^2} \right]^{\beta(i+1)+j-1} dx, \quad (4.3.4)$$

meqë  $0 < 1 - e^{-\frac{\theta}{2}x^2} < 1$  për  $x > 0$ , nga shprehja për serinë binomiale  $\left[ 1 - e^{-\frac{\theta}{2}x^2} \right]^{\beta(i+1)+j-1}$  rrjedh

$$\left[ 1 - e^{-\frac{\theta}{2}x^2} \right]^{\beta(i+1)+j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\beta(i+1)+j-1}{k} e^{-k\frac{\theta}{2}x^2}, \quad (4.3.5)$$

keshtu që

$$\mu'_r = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\beta(i+1)+j-1}{k} \omega_{i,j} \theta \int_0^{\infty} x^{r+1} e^{-(k+1)\frac{\theta}{2}x^2} dx. \quad (4.3.6)$$

Le të jetë  $(k+1)\frac{\theta}{2}x^2 = t$ , gjejmë:

$$\mu'_r = \delta_{i,j,k} \frac{\theta \Gamma(1 + \frac{r}{2})}{2 \left[ \frac{2}{\theta(k+1)} \right]^{1+\frac{r}{2}}}. \quad (4.3.7)$$

ku

$$\delta_{i,j,k} = \sum_{i,j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{i,j} (-1)^k \binom{\beta(i+1)+j-1}{k}.$$

me çka perfundon vërtetimi i teoremës.

Bazuar në teoremën 4.3.1 masa e dispersionit, asimetrisë dhe sheshësisë për shpërndarjen

$WR(x; \alpha, \theta, \beta)$  mund të meren duke u bazuar në relacionet e mëposhtme

$$\begin{aligned}
 CV_{WR} &= \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1}, \\
 CS_{WR} &= \frac{\mu_3(\phi) - 3\mu_1(\phi)\mu_2(\phi) + 2\mu_1^3(\phi)}{[\mu_2(\phi) - \mu_1^2(\phi)]^{\frac{3}{2}}} \\
 \text{dhe } CK_{WR} &= \frac{\mu_4(\phi) - 4\mu_1(\phi)\mu_3(\phi) + 6\mu_1^2(\phi)\mu_2(\phi) - 3\mu_1^4(\phi)}{[\mu_2(\phi) - \mu_1^2(\phi)]^2}.
 \end{aligned}$$

□

**Teoremë 4.3.2.** [76] *Funksioni gjenerues i momenteve për shpërndarjen WR jepet me*

$$M_X(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \delta_{i,j,k} \frac{\theta \Gamma(1 + \frac{r}{2})}{2 \left[ \frac{2}{\theta(k+1)} \right]^{1 + \frac{r}{2}}}. \quad (4.3.8)$$

*Vërtetim.*

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= \int_0^{\infty} e^{tx} f_{WR}(x) dx \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \int_0^{\infty} x^r f_{WR}(x) dx = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \mu_r' \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \delta_{i,j,k} \frac{\theta \Gamma(1 + \frac{r}{2})}{2 \left[ \frac{2}{\theta(k+1)} \right]^{1 + \frac{r}{2}}}. \quad (4.3.9)
 \end{aligned}$$

□

## 4.4 Shpërndarja e statistikës së renditur

Në këtë paragraf, do të marim format e shprehjes për densitetin e  $r$  statistikës së renditur të shpërndarjes  $WR$ , poashtu, asimetrinë dhe sheshësinë e  $r$  statistikës së renditur të zgjedhjes me vëllim  $n$  për zgjedhje të ndryshme  $n$  dhe  $r$ . Le të jetë  $X_1, X_2, \dots, X_n$  një zgjedhje nga shpërndarja  $WR$  me densitet (4.2.1) dhe funksion shpërndarjeje (4.2.2), respektivisht. Le të jenë  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  statistikatat e renditura të fituar nga kjo zgjedhje. Tani japim densitetin e  $X_{r:n}$ , të themi  $f_{r:n}(x, \Phi)$  dhe

momentet e  $X_{r:n}$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$ . Asimetria dhe sheshësia e densitetit të  $X_{r:n}$  janë paraqitur më poshtë. Densiteti i  $X_{r:n}$  jepet me

$$f_{r:n}(x, \Phi) = \frac{1}{B(r, n-r+1)} [F(x, \Phi)]^{r-1} [1 - F(x, \Phi)]^{n-r} f(x, \Phi) \quad (4.4.1)$$

ku  $F(x, \Phi)$  dhe  $f(x, \Phi)$  janë funksioni i shpërndarjes dhe densiteti i  $WR$  të dhënë me (4.2.1), (4.2.2), respektivisht, dhe  $B(., .)$  është funksioni beta. Meqë  $0 < F(x, \Phi) < 1$ , për  $x > 0$ , duke përdorur serinë binomiale për  $[1 - F(x, \Phi)]^{n-r}$ , të dhënë me

$$[1 - F(x, \Phi)]^{n-r} = \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^j \binom{n-r}{j} [F(x, \Phi)]^j, \quad (4.4.2)$$

kemi

$$f_{r:n}(x, \Phi) = \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^j \binom{n-r}{j} [F(x, \Phi)]^{r+j-1} f(x, \Phi), \quad (4.4.3)$$

Duke zëvendësuar (4.2.1) dhe (4.2.2) në (4.4.3), mund të shfaqen shprehjen për momentet e rendit  $k$ -të të statistikës së renditur  $X_{r:n}$  të themi  $E(X_{r:n}^k)$ , si kombinim linear i momenteve të rendit  $k$  të  $WR$ .

Statistika e renditur e  $r$ -të për shpërndarjen e Weibull Rayleigh-it jepet me

$$f_{r:n}(x, \Phi) = \frac{\alpha\beta\theta x e^{\frac{\theta}{2}x^2}}{B(r, n-r+1)} \left[ 1 - e^{-\alpha\left(e^{\frac{\theta}{2}x^2} - 1\right)^\beta} \right]^{r-1} \cdot \left[ e^{-\alpha\left(e^{\frac{\theta}{2}x^2} - 1\right)^\beta} \right]^{n+\beta-r} \left( e^{\frac{\theta}{2}x^2} - 1 \right)^{\beta-1}.$$

Densiteti i statistikës së renditur  $X_{(1)}$  jepet me

$$f_{1:n}(x, \Phi) = n\alpha\beta\theta x e^{\frac{\theta}{2}x^2} \left( e^{\frac{\theta}{2}x^2} - 1 \right)^{\beta-1} \left[ e^{-\alpha\left(e^{\frac{\theta}{2}x^2} - 1\right)^\beta} \right]^{n+\beta-1},$$

dhe densiteti i statistikës së renditur  $X_{(n)}$  është

$$f_{n:n}(x, \Phi) = n\alpha\beta\theta x e^{\frac{\theta}{2}x^2} \left( e^{\frac{\theta}{2}x^2} - 1 \right)^{\beta-1} \left[ e^{-\alpha\left(e^{\frac{\theta}{2}x^2} - 1\right)^\beta} \right]^\beta \cdot \left[ 1 - e^{-\alpha\left(e^{\frac{\theta}{2}x^2} - 1\right)^\beta} \right]^{n-1}.$$

## 4.5 Vlerësimi i parametrave me metodën e katrorëve më të vegjël

Në këtë paragraf do të përdorim regresionin për vlerësimin e parametrave të panjohur të shpërndarjes Weibull-Rayleigh-it; për herë të parë kjo metodë është përdorur nga Swain, Venkatraman and Wilson [120] për vlerësimin e parametrave të shpërndarjes beta. Supozojmë se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  është zgjedhje e rastit me vëllim  $n$  prej funksionit të shpërndarjes  $G(\cdot)$  dhe supozojmë se  $X_{(i)}$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$  shënon zgjedhjen e renditur. Metoda e propozuar përdor shpërndarjen e  $G(X_{(i)})$ . Për zgjedhjen e rastit me vëllim  $n$ , kemi

$$E(G(X_{(i)})) = \frac{i}{n+1}, V(G(Y_{(i)})) = \frac{i(n-i+1)}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$\text{dhe } Cov(G(X_{(i)}), G(X_{(j)})) = \frac{i(n-j+1)}{(n+1)^2(n+2)}; \text{ for } i < j,$$

për më tepër shih Johnson, Kotz and Balakrishnan [51]. Duke përdorur pritjet matematike dhe variancat, kemi dy variante të metodës së katrorëve më të vegjël që mund të përdoren për vlerësimin e parametrave.

Metoda e katrorëve më të vegjël realizohet duke bërë minimizimin e shprehjes

$$\sum_{i=1}^n \left( G(X_{(i)}) - \frac{i}{n+1} \right)^2, \quad (4.5.1)$$

në lidhje me parametrat që do të vlerësohen. Kështu që në rastin e shpërndarjes  $WR$ , metoda e katrorëve më të vegjël për parametrat  $\alpha, \beta$  dhe  $\theta$ , të themi  $\hat{\alpha}_{LSE}, \hat{\beta}_{LSE}$ , dhe  $\hat{\theta}_{LSE}$ , respektivisht, kërkon të minimizohet (4.2.1) dhe (4.5.1):

$$Q(\alpha, \beta, \theta) = \sum_{i=1}^n \left[ 1 - e \left\{ -\alpha \left[ e^{\frac{\theta}{2} x_{(i)}^2} - 1 \right]^\beta \right\} - \frac{i}{n+1} \right]^2. \quad (4.5.2)$$

Për të minimizuar (4.5.2) në lidhje me  $\alpha, \beta$ , dhe  $\theta$ , fillimisht derivojmë në lidhje me

këta parametra me çka fitojmë:

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left[ 1 - e^{\left\{ -\alpha \left[ e^{\frac{\theta}{2} x^2(i)} - 1 \right]^\beta \right\}} - \frac{i}{n+1} \right] \left[ \left[ e^{\frac{\theta}{2} x^2(i)} - 1 \right]^\beta e^{\left\{ -\alpha \left[ e^{\frac{\theta}{2} x^2(i)} - 1 \right]^\beta \right\}} \right], \quad (4.5.3)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \left[ 1 - e^{\left\{ -\alpha \left[ e^{\frac{\theta}{2} x^2(i)} - 1 \right]^\beta \right\}} - \frac{i}{n+1} \right] \left[ \alpha \left[ e^{\frac{\theta}{2} x^2(i)} - 1 \right]^\beta e^{\left\{ -\alpha \left[ e^{\frac{\theta}{2} x^2(i)} - 1 \right]^\beta \right\}} \log \left[ e^{\frac{\theta}{2} x^2(i)} - 1 \right] \right], \quad (4.5.4)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \left[ 1 - e^{\left\{ -\alpha \left[ e^{\frac{\theta}{2} x^2(i)} - 1 \right]^\beta \right\}} - \frac{i}{n+1} \right] \left[ \alpha \beta x e^{\frac{\theta}{2} x^2(i)} \left[ e^{\frac{\theta}{2} x^2(i)} - 1 \right]^{\beta-1} e^{\left\{ -\alpha \left[ e^{\frac{\theta}{2} x^2(i)} - 1 \right]^\beta \right\}} \right]. \quad (4.5.5)$$

Vlerësimet e parametrave merren duke i barazuar ekuacionet e mësipërme me zero. Meqë vlerësimet e parametrave nuk mund të shfaqen në formë të përshtatshme për zgjidhje atëherë duhet të përdorim ndonjë algoritëm të metodës numerike për zgjidhjen e tyre.

## 4.6 Vlerësimi i parametrave me metoden e përgjasisë maksimale

Le të jetë  $X_1, X_2, \dots, X_n$  zgjedhje e rastit ku  $X \sim WR((x, \varphi)$  me vlerat e observuara  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dhe le të jetë  $\Psi = (\alpha, \beta, \theta)^T$  vektori i parametrave të modelit në shqyrtim.

Funksioni i pergjasisë maksimale për (4.1.4) jepet me

$$L(\varphi) = n \log \alpha + n \log \beta + n \log \theta + \sum_{i=1}^n \log x_i + \frac{\theta}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \log \left( e^{\frac{\theta}{2} x_i^2} - 1 \right) - \alpha \sum_{i=1}^n \left[ e^{\frac{\theta}{2} x_i^2} - 1 \right]^\beta. \quad (4.6.1)$$

Duke derivuar  $L(\varphi)$  në bazë të parametrave  $\alpha, \beta$ , dhe  $\theta$  dhe duke barazuar rezultatet me zero, marrim maksimumin e këtij funksioni. Derivatet parciale të  $L(\varphi)$  në lidhje me secilin parametër janë:

$$U_n(\varphi) = \frac{\partial(L)}{\partial \alpha}, \frac{\partial(L)}{\partial \beta}, \frac{\partial(L)}{\partial \theta}$$

ku

$$\frac{\partial(L)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \left[ e^{\frac{\theta}{2} x_i^2} - 1 \right]^\beta = 0, \quad (4.6.2)$$

$$\frac{\partial(L)}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \log \left( e^{\frac{\theta}{2} x_i^2} - 1 \right) - \alpha \sum_{i=1}^n \left[ e^{\frac{\theta}{2} x_i^2} - 1 \right]^\beta \log \left[ e^{\frac{\theta}{2} x_i^2} - 1 \right] = 0, \quad (4.6.3)$$

dhe

$$\begin{aligned} \frac{\partial(L)}{\partial \theta} &= \frac{n}{\theta} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{\frac{\theta}{2} x_i^2}}{2 \left( e^{\frac{\theta}{2} x_i^2} - 1 \right)} \\ &\quad - \frac{\alpha \beta}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 e^{\frac{\theta}{2} x_i^2} \left[ e^{\frac{\theta}{2} x_i^2} - 1 \right]^{\beta-1} = 0 \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

Vlerësimi i parametrave me metodën e pergjasisë maksimale për parametrat  $\alpha, \beta$ , dhe  $\theta$  të themi  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ , dhe  $\hat{\theta}$ , fitohen duke zgjidhur ekuacionet,  $\frac{\partial(L)}{\partial \alpha} = \frac{\partial(L)}{\partial \beta} = \frac{\partial(L)}{\partial \theta} = 0$ . Meqë këtu nuk kemi forma të përshtatshme për zgjidhje përdorim algoritme për zgjidhje me metoda numerike. Nëse për tre parametrat e shpërndarjes  $WR(x; \alpha, \beta, \theta)$ , ekzistojnë derivatatet e rendeve të dyta atëherë kemi matricën

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} \sim N \left[ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widehat{V}_{\alpha\alpha} & \widehat{V}_{\alpha\beta} & \widehat{V}_{\alpha\theta} \\ \widehat{V}_{\beta\alpha} & \widehat{V}_{\beta\beta} & \widehat{V}_{\beta\theta} \\ \widehat{V}_{\theta\alpha} & \widehat{V}_{\theta\beta} & \widehat{V}_{\theta\theta} \end{pmatrix} \right]. \quad (4.6.5)$$

$$V^{-1} = -E \begin{bmatrix} V_{\alpha\alpha} & V_{\alpha\beta} & V_{\alpha\theta} \\ V_{\beta\alpha} & V_{\beta\beta} & V_{\beta\theta} \\ V_{\theta\alpha} & V_{\theta\beta} & V_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (4.6.6)$$

ku

$$\begin{aligned} V_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} = -\frac{n}{\alpha^2} \\ V_{\beta\beta} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} = -\frac{n}{\beta^2} - \alpha \sum_{i=1}^n \left( e^{1/2\theta x_i^2} - 1 \right)^\beta \left( \ln \left( e^{1/2\theta x_i^2} - 1 \right) \right)^2 \\ V_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} - (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} \frac{x_i^4 e^{1/2\theta x_i^2}}{\left( e^{1/2\theta x_i^2} - 1 \right)^2} \\ &\quad - \frac{\alpha}{4} \sum_{i=1}^n \frac{\left( e^{1/2\theta x_i^2} - 1 \right)^\beta \beta x_i^4 e^{1/2\theta x_i^2} \left( \beta e^{1/2\theta x_i^2} - 1 \right)}{\left( e^{1/2\theta x_i^2} - 1 \right)^2} \\ V_{\alpha\beta} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \beta} = -\sum_{i=1}^n \left( e^{1/2\theta x_i^2} - 1 \right)^\beta \ln \left( e^{1/2\theta x_i^2} - 1 \right) \\ V_{\alpha\theta} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \theta} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\left( e^{1/2\theta x_i^2} - 1 \right)^\beta \beta x_i^2 e^{1/2\theta x_i^2}}{e^{1/2\theta x_i^2} - 1} \\ V_{\beta\theta} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{x_i^2 e^{1/2\theta x_i^2}}{e^{1/2\theta x_i^2} - 1} \\ &\quad - \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\left( e^{1/2\theta x_i^2} - 1 \right)^\beta x_i^2 e^{1/2\theta x_i^2} \left( \beta \ln \left( e^{1/2\theta x_i^2} - 1 \right) + 1 \right)}{e^{1/2\theta x_i^2} - 1} \end{aligned}$$

Duke gjetur matricën inverse të matricës së mësipërme do të marrim vlerat asimptotike të variancës dhe kovariancës për vlerësuesit  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  dhe  $\hat{\theta}$ . Duke përdorur (4.6.6), përafrojmë intervalin e besimit  $100(1 - \gamma)\%$  për  $\alpha$ ,  $\beta$  dhe  $\theta$  si më poshtë

$$\hat{\alpha} \pm z_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\widehat{V}_{\alpha\alpha}}, \hat{\beta} \pm z_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\widehat{V}_{\beta\beta}}, \text{ dhe } \hat{\theta} \pm z_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\widehat{V}_{\theta\theta}},$$

ku  $z_\gamma$  është percentili  $100\gamma\%$  i shpërndarjes normale të standardizuar.

Duke përdorur R mund të njehsojmë matricën e Hesianit dhe inversin e saj kështu që marrim gabimet standarde dhe intervalet e besimit për parametrat e vlerësuar.

Do të përdorim testin e raportit të përgjasisë maksimale për të treguar se për të dhëna te ndryshme që do të shqyrtohen, shpërndarja Weibull-Rayleigh është statistikisht më e mirë se shpërndarja e Weibull-it. Në rastin e përgjithshëm, testojmë

hipotezat e tipit  $H_0 : \lambda = \lambda_0$  krahas  $H_0 : \lambda \neq \theta_0$  duke performuar testin LR (ang.likelihood ratio). Në këtë rast testi LR për testimin e hipotezës  $H_0$  kundrejt  $H_1$  është  $\omega = 2(\ell(\hat{\theta}; x) - \ell(\hat{\lambda}_0; x))$ , ku  $\hat{\lambda}$  dhe  $\hat{\lambda}_0$  janë parametra të vlerësuar me metodën e përgjasisë maksimale nën hipotezat  $H_1$  dhe  $H_0$ , respektivisht. Statistika  $\omega$  është asimptotikisht (kur  $n \rightarrow \infty$ ) me shpërndarje  $\chi_k^2$ , ku  $k$  është gjatësia e vektorit  $\lambda$  qe po shqyrtohet. Testi LR hudh poshtë  $H_0$  nëse  $\omega > \chi_{k;\gamma}^2$ , ku  $\chi_{k;\gamma}^2$  shënon kuantilin  $100\gamma\%$  e shpërndarjes  $\chi_k^2$ .

## 4.7 Aplikimi

Në këtë paragraf do të krahasojmë rezultatet e përshtatjes së të dhënave me shpërndarjet e Weibull-Rayleigh, Exponentiated Weibull, Beta-Weibull-it ([108]) dhe Weibull-it. Të dhënat janë marrë nga Meeker dhe Escobar (1998, p. 383, [95]); ato paraqesin kohën e dështimit dhe kohën e punës së pajisjeve nga një sistem i madh pajisjesh. Dy lloje të dështimeve të pajisjeve janë vërejtur: Dështimet nga tensioni i lartë i rrymës gjatë elektricitetit dhe dështimet e tjera nga prodhimet normale. Koha e dështimeve është dhënë mëposhtë:

2.75, 0.13, 1.47, 0.23, 1.81, 0.30, 0.65, 0.10, 3.00, 1.73, 1.06, 3.00, 3.00, 2.12, 3.00, 3.00, 3.00, 0.02, 2.61, 2.93, 0.88, 2.47, 0.28, 1.43, 3.00, 0.23, 3.00, 0.80, 2.45, 2.66.

Matrica e variancë kovariancës  $I(\hat{\lambda})^{-1}$  për shpërndarjen e Weibull-Rayleigh për të dhënat e mëposhtme llogaritet si

$$I(\hat{\lambda})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.012 & 0.001 & -0.040 \\ 0.001 & 0.007 & -0.044 \\ -0.040 & -0.044 & 0.364 \end{pmatrix}.$$

Kështu që, varianca e parametrave  $\alpha, \beta$  dhe  $\theta$  është  $var(\hat{\alpha}) = 0.012, var(\hat{\beta}) = 0.007$  dhe  $var(\hat{\theta}) = 0.364$ . Tutje, intervali i besimit 95% për parametrat  $\alpha, \beta$  dhe  $\theta$  është  $[0.060, 0.490], [0.122, 0.462]$  dhe  $[0.379, 2.745]$  respektivisht. Do të paraqesim edhe grafikisht profilin e funksionit të përgjasisë për parametrin. Paraqesim  $\alpha$  në figurë

Tabela 4.1: Vlerësuesit me metodën e përgjasisë maksimale, katorëve më të vegjël dhe gabimet standarde për të dhënat e shqyrtura

Modeli	ML-Vlerësimi	Gabimi Standard	LL	LSES
Weibull-Rayleigh	$\hat{\alpha} = 0.275$	0.109	35.409	0.628
	$\hat{\beta} = 0.292$	0.086		0.039
	$\hat{\theta} = 1.562$	0.603		1.561
Beta-Weibull	$\hat{\alpha} = 6.104$	0.003	39.562	1.595
	$\hat{\beta} = 0.205$	3.179e-06		0.045
	$\hat{a} = 0.149$	0.029		6.793
	$\hat{b} = 8.114$	3.932		3.933
Exponentiated Weibull	$\hat{\alpha} = 0.314$	0.024	39.463	0.032
	$\hat{\beta} = 5.877$	0.199		5.885
	$\hat{\theta} = 0.156$	0.029		0.038
Weibull	$\hat{\alpha} = 0.449$	0.115	46.158	0.133
	$\hat{\beta} = 1.265$	0.204		0.055

Tabela 4.2: Kriteret e krahasimit për Weibull-Rayleigh-in

Model	-2LL	AIC	AICC
Weibull-Rayleigh	70.818	76.818	77.741
Beta-Weibull	79.124	87.124	88.266
Exponentiated Weibull	78.926	84.926	85.849
Weibull	92.316	96.316	96.760

4.1 për të treguar unicitetin e vlerësimit të këtij parametri.

Testi LR për testimin e hipotezës  $H_0 : \theta = 2$  kundrejt  $H_1 : \theta \neq 2$  për të dhënat është  $\omega = 21.498 > 3.841 = \chi_{2;0.05}^2$ , pra hedhim poshtë hipotezën fillestare.

Nga të dhënat e tabelës 4.1 mund të shohim vlerësimet e parametrave për shpërndarjet e studiuar për të dhënat; tabela 4.2 tregon vlerat e  $-2 \log(L)$ , AIC dhe AICC. Vlerat në tabelën 4.2, tregojnë se shpërndarja e Weibull-Rayleigh është më e përshtatshme për të studiuar këto të dhëna se sa shpërndarjet e tjera në këtë model. Grafikët e densiteteve që paraqesin densitetin empirik me densitetet e shpërndarjeve të shqyrtuara janë dhënë në figurën (Fig. 4.2). Densiteti i shpërndarjes Weibull-Rayleigh

paraqet më mirë të dhënat se sa densitetet e shpërndarjeve tjera. Figura (Fig.4.3) tregon grafikun P-P për WR dhe W për të dhënat e shqyrtuara.

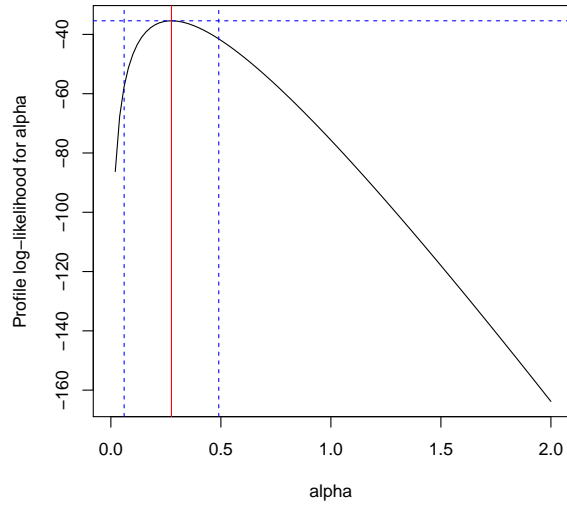


Fig. 4.1: Funkzioni i përgjasisë maksimale për parametrin  $\alpha$  për të dhënat

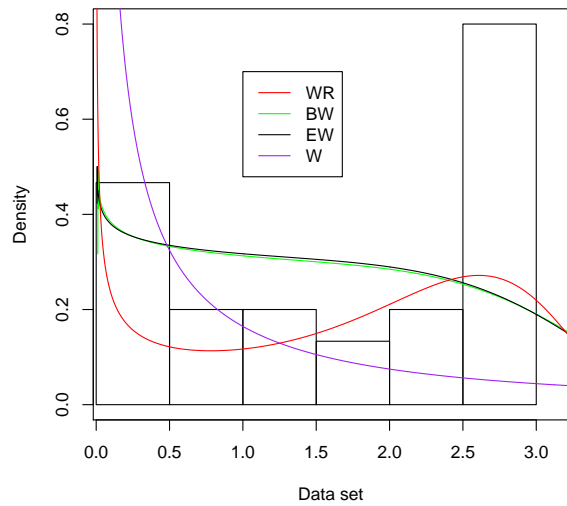


Fig. 4.2: Grafikët e densiteteve që paraqesin densitetin empirik me densitetet e shpërndarjeve të shqyrtuara

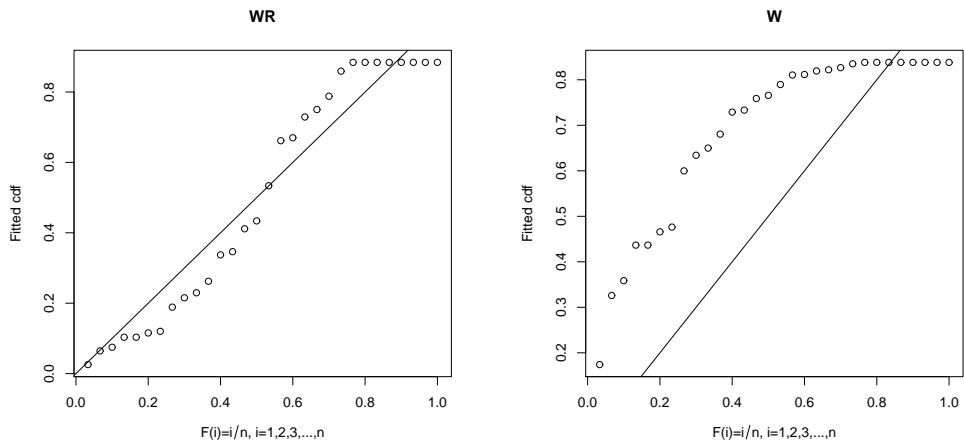


Fig. 4.3: Grafikët PP për Weibull-Rayligh dhe Weibull për të dhënat

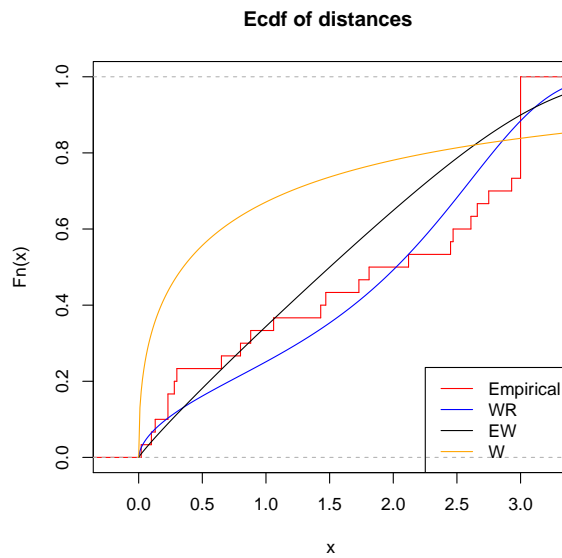


Fig. 4.4: Funkzionet e shpërndarjes empirike, Weibull-Rayleigh-it, Weibullit në fuqi dhe Weibullit për të dhënat

# Kapitulli 5

## Shpërndarja e anuar normale, $t$ -e anuar dhe Dirichle. Varësia bishtore

### 5.1 Hyrje

Idea e shpërndarjeve të anuara është dhënë në vitin 1985 nga Azalini ku si bazë kryesore merret lema

**Lemë 5.1.1.** [2] *Le të jetë  $f$  densitet simetrik rreth origjines 0,  $G$ - densitet - funksion i vazhdueshëm absolut i tillë që  $G'$  është simetrik rreth origjines. Atëherë  $2f(x)G(\lambda x)$ ,  $(-\infty < x < \infty)$  është densitet.*

*Vërtetim.* Duke supozuar se  $f$  dhe  $G$  janë simetrik rreth origjinës, kemi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} 2f(x)G(\lambda x)dx &= 2 \left\{ \int_{-\infty}^0 f(x)G(\lambda x)dx + \int_0^{\infty} f(x)G(\lambda x)dx \right\} \\ &= 2 \left\{ \int_{-\infty}^0 f(x)G(\lambda x)dx + \int_{-\infty}^0 f(x)[1 - G(\lambda x)]dx \right\} \\ &= 2 \int_{-\infty}^0 f(x)dx = 1 \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

□

## 5.2 Shpërndarja normale e anuar

**Përkufizimi 5.2.1.** [2] Themë se ndryshorja e rastit  $X$ , ka shpërndarje normale të anuar nëse densiteti i saj është:

$$f(x, \alpha) = 2\phi(x)\Phi(\alpha x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (5.2.1)$$

ku  $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$  dhe  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t)dt$  janë densiteti i shpërndarjes normale standarde dhe funksioni i shpërndarjes normale standarde respektivisht. Për thjeshtësi do e përdorim shenimin  $X \sim SN(0, 1, \lambda)$ .

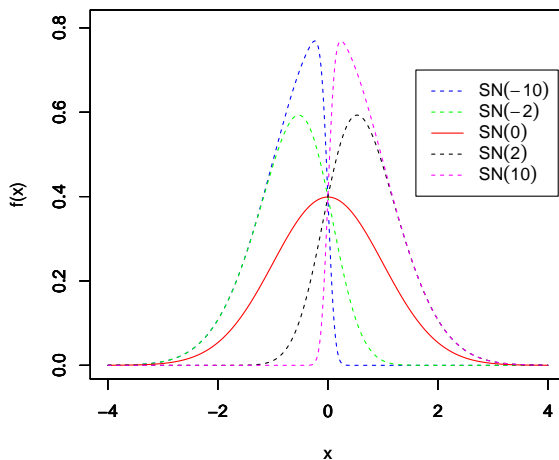


Fig. 5.1: Densiteti i shpërndarjes së anuar normale

Me rritjen e  $|\alpha|$  densiteti gjithnjë e më shumë bëhet më i anuar. Në vazhdim disa veti të kësaj shpërndarje do i japim në lemën e mëposhtme.

**Lemë 5.2.1.** [2] *Le të jetë  $X \sim SN(0, 1, \lambda)$ . Atëherë:*

1. Kur  $\lambda = 0$ ,  $Z \sim N(0, 1)$ ,
2. Kur  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $f_\lambda(x)$  tenton në  $2\phi(x)I_{X>0}$ , që është densiteti i shpërndarjes gjysmë-normale.
3.  $-X \sim SN(0, 1, -\lambda)$ ,

4.  $\Phi(x; -\lambda) = 1 - \Phi(-x; \lambda)$ ,

5.  $\log(f_\lambda(x))$  është funksion konkavë i  $x$  dhe densiteti  $f_\lambda(x)$  është funksion unimodal i  $x$ ,

6.  $X^2 \sim \chi_1^2$ .

**Lemë 5.2.2.** [116] *Le të jetë  $Z \sim N(0, 1)$  dhe  $X \sim SN(0, 1, \lambda)$ . Atëherë  $|X|$  dhe  $|Z|$  kanë shpërndarje të njëjtë.*

*Vërtetim.*

$$\begin{aligned}
 P(|X| \leq x) &= \int_{-x}^x 2\phi(u)\Phi(\alpha u)du \\
 &= \int_0^x 2\phi(u)\Phi(\alpha u)du + \int_{-x}^0 2\phi(u)\Phi(\alpha u)du \\
 &= \int_0^x 2\phi(u)\Phi(\alpha u)du - \int_x^0 2\phi(-u)\Phi(-\alpha u)du \\
 &= \int_0^x 2\phi(u)\Phi(\alpha u)du + \int_0^x 2\phi(u)\Phi(-\alpha u)du \\
 &= \int_0^x 2\phi(u)[\Phi(\alpha u) + \Phi(-\alpha u)]du \\
 &= \int_0^x 2\phi(u)du = P(|Z| \leq x)
 \end{aligned}$$

□

**Lemë 5.2.3.** *Variabla e rastit  $X$  ka densitet (5.1), atëherë dhe vetëm atëherë nëse  $X$  mund të paraqitet në trajtën:*

$$X = \delta|Z_1| + \sqrt{1 - \delta^2}Z_2 \tag{5.2.2}$$

ku  $Z_1, Z_2 \sim N(0, 1)$  dhe

$$\delta = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha}} \tag{5.2.3}$$

### 5.3 Momentet e shpërndarjes normale të anuar univariate

**Lemë 5.3.1.** [4] *Le të jetë  $X$  ndryshore e rastit që ka shpërndarje normale standarde dhe le të jenë  $h$  dhe  $k$  numra real. Atëherë:*

$$E\{\Phi(hX + k)\} = \Phi\left\{\frac{k}{\sqrt{1+h^2}}\right\}, \quad \forall h, k. \quad (5.3.1)$$

*Vërtetim.* Për çdo  $h$  dhe  $k$ , do të shënojmë  $E\{\Phi(hX + k)\}$  si:

$$\Psi(h, k) = E\{\Phi(hX + k)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(hx + k)\phi(x)dx. \quad (5.3.2)$$

Pas derivimit të ekuacionit (5.3.2) sipas  $k$  fitojmë:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(h, k)}{\partial k} &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(hx + k)\phi(x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}[(hx + k)^2 + x^2]\right\} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{k^2}{2(1+h^2)}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1+h^2}{2}\left(x + \frac{hk}{1+h^2}\right)^2\right\} dx. \end{aligned}$$

Pas zëvendësimit të  $u = \sqrt{1+h^2}\left(x + \frac{hk}{1+h^2}\right)$  kemi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(h, k)}{\partial k} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{1+h^2}} \exp\left(-\frac{k^2}{2(1+h^2)}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} \phi\left(\frac{k}{\sqrt{1+h^2}}\right). \end{aligned}$$

Tani pas integrimit sipas  $k$ , kemi:  $\Psi(h, k) = \Phi\left\{\frac{k}{\sqrt{1+h^2}}\right\}$ . □

**Lemë 5.3.2.** [4] *Nëse  $X \sim SN(0, 1, \lambda)$  atëherë funksioni gjenerues i momenteve është:*

$$M_X(t) = 2e^{\frac{t^2}{2}} \Phi\left(\frac{\lambda t}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) \quad (5.3.3)$$

Vërtetim.

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= E(e^{tx}) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \phi(x) \Phi(\lambda x) dx \\
 &= 2e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-t)^2\right\} \Phi(\lambda t) dt \\
 &= 2e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\} \Phi(\lambda(u+t)) du \\
 &= 2e^{\frac{t^2}{2}} E\{\Phi(\lambda(u+t))\},
 \end{aligned}$$

ku  $U \sim N(0, 1)$ .

Nga lema 5.3.1 kemi:

$$M_X(t) = 2e^{\frac{t^2}{2}} \Phi\left(\frac{\lambda t}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right).$$

□

Viteve të fundit janë përcaktuar disa përgjithësime të shpërndarjes asimetrike normale si p.sh.

1. Nadarajah dhe Kotz (2003): Ndryshorja e rastit ka shpërndarja asimetrike normale-normale nëse denistet i saj është:

$$f_X(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \Phi\left(\frac{\lambda x}{\delta}\right), \quad -\infty < x < \infty. \quad (5.3.4)$$

Duke zëvendësuar  $\lambda = \delta = 1$  në (5.3.4) fitojmë shpërndarjen asimetrike normale standarde.

2. Arellano-Valle et al. (2004): Ndryshorja e rastit ka shpërndarja të përgjithësuar asimetrike normale nëse densiteti i saj është:

$$f_X(x) = 2\phi(x)\Phi\left(\frac{\lambda_1 x}{\sqrt{1+\lambda_2 x^2}}\right), \quad \lambda_1 \in R, \lambda_2 \geq 0, -\infty < x < \infty. \quad (5.3.5)$$

Duke zëvendësuar  $\lambda_2 = 0$  në (5.3.5) fitojmë shpërndarjen asimetrike normale.

3. Ma and Genton (2004): Ndryshorja e rastit ka shpërndarje fleksibile asimetrike normale nëse densiteti i saj është:

$$f_X(x) = 2\phi(x)\Phi(\alpha x + \beta x^3), \quad \alpha, \beta \in R - \infty < x < \infty. \quad (5.3.6)$$

Duke zëvendësuar  $\beta = 0$  në (5.3.6) fitojmë shpërndarjen asimetrike normale standarde.

4. M. Sharafi, J. Behboodian(2008): Ndryshorja e rastit ka shpërndarje Balakrishnan asimetrike normale nëse densiteti i saj është:

$$f_n(x) = c_n(\lambda)\varphi(x)\Phi^n(\lambda x), \quad n \geq 1, x \in R, \lambda \in R. \quad (5.3.7)$$

ku  $c_n(\lambda) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\Phi^n(\lambda x)dx} = \frac{1}{E(\Phi^n(\lambda U))}$ ,  $U \sim N(0, 1)$ . Duke zëvendësuar  $n = 1$  në (5.3.7) fitojmë shpërndarjen asimetrike normale.

5. A. Jamalizadeh, J. Behboodian, N. Balakrishnan (2008): Ndryshorja e rastit ka shpërndarje asimetrike normale me dy parametra nëse densiteti i saj është:

$$f(x; \lambda_1, \lambda_2) = c(\lambda_1, \lambda_2)\varphi(x)\Phi(\lambda_1 x)\Phi(\lambda_2 x), \quad x \in R, \lambda_1, \lambda_2 \in R, \quad (5.3.8)$$

ku  $c(\lambda_1, \lambda_2) = E[\Phi(\lambda_1 x)\Phi(\lambda_2 x)]$ ,  $X \sim N(0, 1)$ . ku  $c_n(\lambda) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\Phi^n(\lambda x)dx} = \frac{1}{E(\Phi^n(\lambda U))}$ ,  $U \sim N(0, 1)$ . Duke zëvendësuar  $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 0$  ose  $\lambda_2 = \lambda, \lambda_1 = 0$  në (5.3.8) fitojmë shpërndarjen asimetrike normale.

6. P. Hasanlipour, M. Sharafi (2012): Ndryshorja e rastit ka shpërndarje të përgjithësuar Balakrishnan asimetrike normale nëse densiteti i saj për  $n \in R^+$  është:

$$f_n(x; \lambda_1, \lambda_2) = c_n(\lambda_1, \lambda_2)\phi(x)\Phi^n\left(\frac{\lambda_1 x}{\sqrt{1 + \lambda_2 x^2}}\right), \quad (5.3.9)$$

$x \in R, \lambda_1 \in R, \lambda_2 \geq 0$ , ku koeficienti  $c_n(\lambda_1, \lambda_2)$ , i cili është funksion i  $n$  dhe parametrave  $\lambda_1, \lambda_2$  jepet me:

$$c_n(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)E\left[\Phi^n\left(\frac{\lambda_1 U}{\sqrt{1 + \lambda_2 U^2}}\right)\right]} = \frac{1}{E\left[\Phi^n\left(\frac{\lambda_1 U}{\sqrt{1 + \lambda_2 U^2}}\right)\right]}, \quad U \sim N(0, 1).$$

Duke zëvendësuar  $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 0$  ose  $\lambda_2 = \lambda, \lambda_1 = 0$  në (5.3.8) fitojmë shpërndarjen asimetrike normale.

## 5.4 Shpërndarja asimetrike normale me shumë variabla

Kalimi nga shpërndarja me një variabël në atë me shumë variabël mund te arrihet duke përdorur formulën Farlie-Gumbel-Morgenstern, që në rastin me dy variable merr këtë trajtë:

$$F(x_1, x_2) = F_1(x)F_2(x)[1 + \alpha\{1 - F_1(x_1)\}\{1 - F_2(x_2)\}], \quad (5.4.1)$$

ku  $F_1$  dhe  $F_2$  shenojnë shpërndarjet margjinale (ang. marginal distributions) dhe  $\alpha$  është parametër që merr vlera në intervalin  $(-1, 1)$ .

**Përkufizimi 5.4.1.** [4] Themi se vektori  $X$  që ka dimension  $k$ , ka shpërndarje asimetrike normale me shumë variabla nëse densiteti i tij është:

$$f_X(x) = 2\phi_k(x; \Omega_x)\Phi(\alpha^T x), x \in R^k, \quad (5.4.2)$$

ku  $\phi_k(x; \omega_x)$  është vektor  $k$ -dimensional që ka shpërndarje normale me pritje matematike 0 dhe matricë korelacioni  $\Omega_x$ ;  $\alpha$  është vektor  $k$ -dimensional që kontrollon asimetrinë (ang.skewness).

## 5.5 Shpërndarja e anuar t

William Sealy Gosset(1876-1937) ka patur diplomë në Matematikë dhe Kimi prej Oksfordi, kur me 1899 filloi të punoi për fabrikën e birrës Messrs në Dublin. Gjatë punës së tij në këtë kompani ai ndërtoi teorinë e zgjedhjeve të vogla në statistikë sepse i nevojiteshin për eksperimente në numër të vogël. Meqë me rregullat e kompanisë nuk lejohej të botoheshin rezultatet shkencore nga stafi i kompanisë, Gosset publikoi këtë shpërndarje me pseudonimin "student".

Le të jetë  $Z$  ndryshore e rastit që ka shpërndarje normale standarde  $N(0, 1)$  dhe  $V$

ndryshore e rastit që ka shpërndarje  $\chi^2(n)$ . Atëherë ndryshorja e rastit  $T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n}}}$  ka shpërndarja  $t$  me densitet

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$$

Gomez dhe të tjerë, [43], kanë përkufizuar shpërndarjen e anuar  $t$  – normale me  $n$  shkallë lirie me densitetin

$$f(x) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \Phi(\lambda x).$$

Duke përdorur analogjinë e njëjtë me përkufizimin e shpërndarjes normale të anuar, po ashtu në vitin 2003, u dha përkufizimi i shpërndarjes shumëpërmasore të anuar  $t$ .

**Përkufizimi 5.5.1.** [46] Le të jetë  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim SN_p(\Sigma, \alpha)$  dhe  $W \sim \chi_n^2$

Themi se ndryshorja e rastit ka shpërndarje shumëpërmasore të anuar  $t$  nëse ka densitetin e trajtës:

$$f_n(\mathbf{y}, \alpha) = \frac{2(1 + n^{-1}\mathbf{y}\Sigma^{-1}\mathbf{y})^{-(n+p)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)} F_{T_{n+p}} \left( \frac{\alpha' \mathbf{y}}{\sqrt{n + \mathbf{y}\Sigma^{-1}\mathbf{y}}} \sqrt{n+p} \right) \quad (5.5.1)$$

ku  $F_{T_k}$  është funksioni i shpërndarjes  $t$ .

Demarta dhe McNeil [27] definojnë shpërndarjen e anuar  $t$  në trajtën

$$\mathbf{X} = \theta V^{-1} + V^{-1/2} \mathbf{Z} \quad (5.5.2)$$

ku  $Z \sim N(0, R)$  dhe është e pavarur nga  $V \sim \Gamma\left(\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2}\right)$

**Përkufizimi 5.5.2.** [36] Le të jetë  $(X_1, X_2)$  një ndryshore rasti dypërmasore me funksione marginale të shpërndarjes njëpërmasore  $\Pr(X_1 \leq x) = F_1(x)$  dhe  $\Pr(X_2 \leq x) = F_2(x)$ . Koeficienti i sipërm i varësisë bishtore jepet me:

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} (F_1(X_1) > u | F_2(X_2) > u), \quad (5.5.3)$$

ndërsa koeficienti i poshtëm i varësisë bishtore jepet me:

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} (F_1(X_1) \leq u | F_2(X_2) \leq u), \quad (5.5.4)$$

Përkufizimet e koeficientëve bishtorë mundën poashtu të jepen përmes kopulës të dhënë nga Sklar në vitin 1959, [126]. Termi "kopulë" (ang. copula) është emër latin "copulare" që ka kuptimin "lidhje ose bashkim". Ideja e futjes së kopulës është që të kalohet nga modelet individuale në modelet të përbashkëta. Kopula  $C$  është një funksion i shpërndarjes ku funksionet margjinale kanë shpërndarje uniforme në  $[0, 1]$ . Sklar [126] ka vërtetuar se funksioni i shpërndarjes së ndonjë dysheje  $(X, Y)$  me funksionet e shpërndarjes  $G$  dhe  $H$  respektivisht, mund të shprehet si

$$F(x, y) = C\{G(x), H(y)\},$$

në terma të kopulës  $C$ , paraqitja është e vetme kur  $G$  dhe  $H$  janë të vazhdueshme.

**Përkufizimi 5.5.3.** [54], Nëse  $C$  është kopulë e  $(X, Y)$ , atëherë

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}, \quad (5.5.5)$$

dhe

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} \quad (5.5.6)$$

Le të jetë

$$\mathbf{X} = V^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Z} \quad (5.5.7)$$

ku  $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_d) \sim SN_n(\theta, R)$  and  $V \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$  dhe  $\mathbf{Z}$  janë të pavarura nga  $V$ .

**Teoremë 5.5.1.** [36] *Koeficienti i poshtëm i varësisë bishtore për  $\mathbf{X}$  që ka shpërndarje të dhënë me (5.5.2), ku  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  jepet me:*

1. Nëse  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ , atëherë

$$\lambda_L = 2P\left(t_{n+1} \leq -\sqrt{\frac{(n+1)(1-\rho)}{1+\rho}}\right) \quad (5.5.8)$$

2. Nëse  $\theta_1$  dhe  $\theta_2 > 0$  atëherë  $\lambda_L = 0$ ;

3. Nëse  $\theta_1$  dhe  $\theta_2 < 0$  atëherë  $\lambda_L = 1$ ;

4. Nëse  $\theta_1 > 0$  dhe  $\theta_2 < 0$  atëherë  $\lambda_L = 0$ ;

5. Nëse  $\theta_1 = 0$  dhe  $\theta_2 > 0$  atëherë  $\lambda_L = 0$ ;

6. Nëse  $\theta_1 = 0$  dhe  $\theta_2 < 0$  atëherë  $\lambda_L = 0$ ;

$$\lambda_L = \int_0^1 \left( 1 - \Phi \left( \left( \frac{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n+1}{2})}{2\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{n}} u^{\frac{1}{n}} \right) \right) du \quad (5.5.9)$$

Tani duke marrë në konsideratë densitetin e shpërndarjes normale dypërmasore të anuar të dhënë me

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 2\phi_2(\mathbf{z}, R)\Phi(\theta^T \mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in R \quad (5.5.10)$$

dhe duke marrë në konsiderim densitetin e trajtës (5.5.7), fitojmë densitetin e vektorit të rastit  $\mathbf{X}$  që ka shpërndarje  $t$  të anuar në formën tjetër me densitet të dhënë si më poshtë:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= 2 \int_0^{\infty} \phi_2\left(\mathbf{x}, \frac{R}{y}\right) \Phi(\theta^T \mathbf{x} \sqrt{y}) \frac{\left(\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{\eta}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} y^{\frac{\eta}{2}-1} e^{-\frac{\eta}{2}y} dy \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{y}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}^T R^{-1} \mathbf{x})y} \Phi(\theta^T \mathbf{x} \sqrt{y}) \frac{\left(\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{\eta}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} y^{\frac{\eta}{2}-1} e^{-\frac{\eta}{2}y} dy \\ &= \frac{2\left(\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{\eta}{2}}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} \int_0^{\infty} \Phi(\theta^T \mathbf{x} \sqrt{y}) y^{\frac{\eta+2}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(\eta + \mathbf{x}^T R^{-1} \mathbf{x})y} dy \\ &= \frac{2\left(\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{\eta}{2}}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} (\eta + \mathbf{x}^T R^{-1} \mathbf{x})^{-\frac{\eta+2}{2}} \\ &\quad \times \int_0^{\infty} \Phi\left(\theta^T \mathbf{x} \sqrt{\frac{w}{\eta + \mathbf{x}^T R^{-1} \mathbf{x}}}\right) w^{\frac{\eta+2}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}w} dw \end{aligned}$$

ku  $w = (\eta + \mathbf{x}^T R^{-1} \mathbf{x})y$ ;

$$\begin{aligned} &= \frac{2\Gamma\left(\frac{\eta+2}{2}\right)}{\pi\eta\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} \left(1 + \frac{\mathbf{x}^T R^{-1} \mathbf{x}}{\eta}\right)^{-\frac{\eta+2}{2}} \int_0^{\infty} \Phi\left(\theta^T \mathbf{x} \sqrt{\frac{w}{\eta + \mathbf{x}^T R^{-1} \mathbf{x}}}\right) \frac{w^{\frac{\eta+2}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}w}}{w^{\frac{\eta+2}{2}} \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} dw \\ &= \frac{2\Gamma\left(\frac{\eta+2}{2}\right)}{\pi\eta\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} \left(1 + \frac{\mathbf{x}^T R^{-1} \mathbf{x}}{\eta}\right)^{-\frac{\eta+2}{2}} E_W\left(\Phi\left(\theta^T \mathbf{x} \sqrt{\frac{W}{\eta + \mathbf{x}^T R^{-1} \mathbf{x}}}\right)\right) \end{aligned}$$

ku  $W \sim \Gamma\left(\frac{\eta+2}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{\eta+2}{2}\right)}{\pi\eta\sqrt{1-\rho^2}\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} \left(1 + \frac{\mathbf{x}^T R^{-1} \mathbf{x}}{\eta}\right)^{-\frac{\eta+2}{2}} F_{t_{\eta+2}}\left(\theta^T \mathbf{x} \sqrt{\frac{\eta+2}{\eta + \mathbf{x}^T R^{-1} \mathbf{x}}}\right).$$

Pra, vektori i rastit  $\mathbf{X}$  themi se ka shpërndarje dypërmasore  $t$  të anuar nëse densiteti i tij jepet me:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{2\Gamma(\frac{\eta+2}{2})}{\pi\eta\sqrt{1-\rho^2}\Gamma(\frac{\eta}{2})} \left(1 + \frac{\mathbf{x}^T R^{-1}\mathbf{x}}{\eta}\right)^{-\frac{\eta+2}{2}} F_{t_{\eta+2}}\left(\theta^T \mathbf{x} \sqrt{\frac{\eta+2}{\eta + \mathbf{x}^T R^{-1}\mathbf{x}}}\right)$$

ku  $F_{t_{\eta+2}}(\cdot)$  është funksioni i shpërndarjes  $t$  me  $\eta + 2$  shkallë lirie.

Densiteti marginal i  $X_1$  mund të gjendet si

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2 \int_0^{\infty} \phi_2\left(\mathbf{x}, \frac{R}{y}\right) \Phi(\theta^T \mathbf{x} \sqrt{y}) \frac{(\frac{\eta}{2})^{\frac{\eta}{2}}}{\Gamma(\frac{\eta}{2})} y^{\frac{\eta}{2}-1} e^{-\frac{\eta}{2}y} dy dx_2 \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 2 \frac{y}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{y}{2}\left(\frac{(x_2-\rho x_1)^2}{1-\rho^2} + x_1^2\right)} \Phi(\theta^T \mathbf{x} \sqrt{y}) \frac{(\frac{\eta}{2})^{\frac{\eta}{2}}}{\Gamma(\frac{\eta}{2})} y^{\frac{\eta}{2}-1} e^{-\frac{\eta}{2}y} dx_2 dy \\ &= \int_0^{\infty} 2 \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}x_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}} \Phi\left(\sqrt{y}\theta_1 x_1 + \theta_2 \sqrt{y}\left(\sqrt{\frac{1-\rho^2}{y}}z + \rho x_1\right)\right) \cdot A dx_2 dy \end{aligned}$$

ku

$$A = \frac{(\frac{\eta}{2})^{\frac{\eta}{2}}}{\Gamma(\frac{\eta}{2})} y^{\frac{\eta}{2}-1} e^{-\frac{\eta}{2}y}$$

marrim  $z = \sqrt{\frac{y}{1-\rho^2}}(x_2 - \rho x_1)$ ,

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} 2 \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}x_1^2} E_Z\left(\Phi\left(\theta_2 \sqrt{1-\rho^2} Z + (\theta_1 + \rho\theta_2)\sqrt{y}x_1\right)\right) \frac{(\frac{\eta}{2})^{\frac{\eta}{2}}}{\Gamma(\frac{\eta}{2})} y^{\frac{\eta}{2}-1} e^{-\frac{\eta}{2}y} dy \\ &= \int_0^{\infty} 2 \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}x_1^2} \Phi\left(\frac{(\theta_1 + \rho\theta_2)x_1\sqrt{y}}{\sqrt{1+\theta_2^2(1-\rho^2)}}\right) \frac{(\frac{\eta}{2})^{\frac{\eta}{2}}}{\Gamma(\frac{\eta}{2})} y^{\frac{\eta}{2}-1} e^{-\frac{\eta}{2}y} dy \end{aligned}$$

$$= 2 \frac{\Gamma(\frac{\eta+1}{2})}{(\pi\eta)^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{\eta}{2})} \left(1 + \frac{x_1^2}{\eta}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}} F_{t_{\eta+1}}(\lambda_1 x_1 \sqrt{\frac{\eta+1}{\eta+x_1^2}}),$$

ku

$$\lambda_1 = \frac{\theta_1 + \rho\theta_2}{\sqrt{1+\theta_2^2(1-\rho^2)}}.$$

**Lemë 5.5.2.** [36] *Ndryshorja e rastit  $X_1$  ka varësi bishtore të poshtme të dhënë me:*

$$P(X_1 \leq x_1) \sim 2 \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) n^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) n} |x|^{-n} F_{t_{n+1}}(-\lambda_1 \sqrt{n+1}), \quad \text{kur } x \rightarrow \infty. \quad (5.5.11)$$

## 5.6 Shpërndarja Dirichle

Shpërndarja Dirichle është një përgjithësim shumëpërmasor i shpërndarjes beta. Densiteti i saj jepet me

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right)}{\prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_i-1}, \quad (5.6.1)$$

Nëse  $k = 2$ , atëherë densiteti (5.6.1) merr trajtën e densitetit të shpërndarjes beta. Vërtetë, meqë  $\sum_{i=1}^k x_i = 1 \rightarrow x_2 = 1 - x_1$ , atëherë fitojmë:

$$f(x_1, x_2; \alpha_1, \alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} x_1^{\alpha_1-1} (1 - x_1)^{\alpha_2-1}$$

Densiteti i shpërndarjes Dirichle (shih p.sh. Kotz dhe të tjerë. (2000)) jepet me

$$\frac{\Gamma(\bar{\alpha})}{\prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} u_i\right)^{\alpha_k-1} \prod_{i=1}^{k-1} u_i^{\alpha_i-1},$$

ku  $\sum_{i=1}^{k-1} u_i \leq 1, u_i > 0, i = 1, \dots, k$ . Shënojmë me  $(u_1 \dots u_{k-1})^\top$  vektorin e rastit me densitetin e dhënë mësipër e shkruajmë me  $(U_1 \dots U_{k-1})^\top \sim \mathbf{D}(k, \alpha)$ . Vektori i rastit në trajtën e transformuar  $(u_1^{1/p}, \dots, u_{k-1}^{1/p})^\top$  ka densitetin

$$\frac{p^{k-1} \Gamma(\bar{\alpha})}{\prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} u_i^p\right)^{\alpha_k-1} \prod_{i=1}^{k-1} u_i^{p\alpha_i-1}, \quad u_i > 0, i = 1, \dots, k : \sum_{i=1}^{k-1} |u_i|^p \leq 1.$$

Le të jenë  $\mathbf{I}_1 \dots \mathbf{I}_k$  ndryshoret e rastit të pavaruara që marrin vlerat  $-1, 1$  me densitet  $1/2$ . Vektori i rastit  $(\mathbf{I}_1 U_1^{1/p}, \dots, \mathbf{I}_{k-1} U_{k-1}^{1/p})^\top$  paraqet simetrimin me fuqi  $p$  të  $(U_1 \dots U_{k-1})^\top$ . Densiteti i vektorit simetrik të rastit është

$$h(u_1, \dots, u_{k-1}) := \frac{p^{k-1} \Gamma(\bar{\alpha})}{2^{k-1} \prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} |u_i|^p\right)^{\alpha_k-1} \prod_{i=1}^{k-1} |u_i|^{p\alpha_i-1}, \quad (5.6.2)$$

ku  $\sum_{i=1}^{k-1} |u_i|^p \leq 1$ .

**Përkufizimi 5.6.1.** [56] (Gjeneratori i densitetit) Le të jetë  $g$  një funksion pozitiv i matshëm, dhe  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^\top$ ,  $k \geq 2$ , vektor me komponentet e tij pozitiv. Nëse  $\omega \in (0, \infty]$  funksioni  $g$  plotëson

$$\left(\frac{2}{p}\right)^k \frac{\prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\bar{\alpha})} \int_0^\omega g(x)x^{\bar{\alpha}-1} dx = 1, \quad \bar{\alpha} := \sum_{i=1}^k \alpha_i, \quad (5.6.3)$$

atëherë  $g$  do të jetë një gjenerator densiteti me  $\alpha$ ; shenojmë  $g \sim \mathbf{GSD}(k, p, \alpha, F)$ . Nëse integrali i mësipërm është i fundëm për ndonjë  $\alpha$  (me komponent pozitiv) do t'i referohemi  $g$  si gjenerator universal densitetesh.

Hashorva dhe të tjerë [56] kanë treguar se gjeneratori i densitetit definon në menyrë unike densitetin e LpGSD.

**Teoremë 5.6.1.** [56] *Le të jetë  $g \sim \mathbf{G}(k, \alpha, \omega)$  me  $\alpha \in (0, \infty)^k$ ,  $k \geq 2$ , dhe  $\omega \in (0, \infty]$ , dhe  $\mathbf{x}$  le të jetë vektor i rastit  $k$ -dimensional me densitet funksioni  $h$  të përkufizuar me*

$$h(\mathbf{x}) := g\left(\sum_{i=1}^k |x_i|^p\right) \prod_{i=1}^k |x_i|^{p\alpha_i-1}, \quad \forall \mathbf{X} = (x_1, \dots, x_k)^\top \in \mathbf{R}^k : 0 < \|\mathbf{x}\|_p < \omega, \quad (5.6.4)$$

me  $p > 0$ . Atëherë  $\mathbf{X} \sim \mathbf{GSD}(k, p, \alpha, F)$  ku  $F$  është një funksion i shpërndarjes në  $[0, \omega)$  me densitet funksionin  $f$

$$f(r) = 2 \left(\frac{2}{p}\right)^{k-1} \frac{\prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\bar{\alpha})} g(r^p)r^{p\bar{\alpha}-1}, \quad \forall r \in (0, \omega). \quad (5.6.5)$$

Anasjelltas, nëse  $\mathbf{X} \sim \mathbf{GSD}(k, p, \alpha, F)$  me funksionin e shpërndarjes  $F$  me densitet  $f$  atëherë  $\mathbf{X}$  ka densitet funksionin  $h$  të përcaktuar me (5.6.4) me gjenerator densiteti  $g$  të përkufizuar me densitetin  $f$  (5.6.5).

*Vërtetim.* Transformojmë variablat

$$y_i = x_i r^{-p}, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad \text{dhe } r^p = \sum_{i=1}^k |x_i|^p.$$

Duke llogaritur Jakobianin e këtij transformimi fitojmë densitetin e  $\mathbf{X}$

$$\begin{aligned} h(r, z_1, \dots, z_{k-1}) &= 2g(r^p)r^{p\sum_{i=1}^k \alpha_i-1} \prod_{i=1}^{k-1} |z_i|^{p\alpha_i-1} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} |z_i|^p\right)^{\alpha_k-1} \\ &= \frac{2^k \prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)}{p^{k-1} \Gamma(\bar{\alpha})} g(r^p)r^{p\sum_{i=1}^k \alpha_i-1} c \prod_{i=1}^{k-1} |z_i|^{p\alpha_i-1} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} |z_i|^p\right)^{\alpha_k-1}, \end{aligned}$$

me  $c^{-1} := (2/p)^{k-1} \prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i) / \Gamma(\bar{\alpha})$ . Kështu që, rezultati rrjedh nga forma e densitetit të dhënë me (5.6.6).

Tani, nëse  $\mathbf{X}$  ka densitet  $h$  të dhënë me (5.6.4), atëherë densiteti i  $R\mathbf{U}$  jepet me

$$h(r, u_1, \dots, u_{k-1}) = f(r)q(u_1, \dots, u_{k-1}),$$

me  $q$  të dhënë si në (5.6.2). Duke kryer transformimet e variablave si më lart, rrjedh se  $\mathbf{X}$  ka densitet  $h$  të dhënë me (5.6.4). □

**Shembulli 5.6.2.** [*Dirichle simetrike*] Le të jetë  $\alpha \in (0, \infty)^k$ ,  $k \geq 2$ ,  $c, p$  konstante pozitive dhe  $g(x) = c(1-x)^{\alpha_k-1}$ ,  $\forall x \in (0, 1)$ . Përkufizojmë densitetin  $h$  te vektorit të rastit  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1})^\top$  në  $\mathbf{R}^{k-1}$  ekuacioni (5.6.4) me

$$h(\mathbf{x}) := c \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} |x_i|^p\right)^{\alpha_k-1} \prod_{i=1}^{k-1} |x_i|^{p\alpha_i-1}, \quad \mathbf{X} \in R^{k-1} : 0 < \|\mathbf{X}\|_p^p < 1.$$

Duke marrë në konsideratë 5.6.3 fitojmë:

$$\begin{aligned} c^{-1} &= \left(\frac{2}{p}\right)^{k-1} \frac{\prod_{i=1}^{k-1} \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i)} \int_0^1 x^{\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i-1} (1-x)^{\alpha_k-1} dx \\ &= \left(\frac{2}{p}\right)^{k-1} \frac{\prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\bar{\alpha})}, \quad \bar{\alpha} := \sum_{i=1}^k \alpha_i. \end{aligned}$$

Prej nga rrjedh se për  $\mathbf{x} \in R^{k-1}$  të tillë që  $\|\mathbf{x}\|_p < 1$ ,

$$h(x_1 \dots x_{k-1}) = \left(\frac{p}{2}\right)^{k-1} \frac{\Gamma(\bar{\alpha})}{\prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} |x_i|^p\right)^{\alpha_k-1} \prod_{i=1}^{k-1} |x_i|^{p\alpha_i-1}. \quad (5.6.6)$$

**Shembulli 5.6.3.** [*Kummer-Beta*] Le të jetë  $g$  gjenerator densiteti i shpërndarjes Kummer-Beta  $Lp$ GSD të dhënë me

$$g(x) = c\lambda \geq 0, \gamma > 0.$$

Konstantja e normalizimit  $c$  për konstanten e dhënë  $\alpha_i, i \leq k$  të tillë që  $\bar{\alpha} > 1 - \delta$  percaktohet nga relacionet:

$$\begin{aligned} c^{-1} &= \left(\frac{2}{p}\right)^k \frac{\prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\bar{\alpha})} \int_0^1 x^{\bar{\alpha}-1} \exp(-\lambda x) x^{\delta-1} (1-x)^{\gamma-1} dx \\ &= \left(\frac{2}{p}\right)^k \frac{\prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\bar{\alpha})} \int_0^1 x^{\bar{\alpha}+\delta-2} (1-x)^{\gamma-1} \exp(-\lambda x) dx \\ &= \left(\frac{2}{p}\right)^k \frac{\prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\bar{\alpha})} \frac{{}_1F_1(\bar{\alpha} + \delta - 1; \bar{\alpha} + \delta + \gamma - 1; -\lambda) \Gamma(\bar{\alpha} + \delta - 1) \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\bar{\alpha} + \delta + \gamma - 1)}, \end{aligned}$$

ku  ${}_1F_1$  është funksioni hipergjeometrik i llojit të parë (poashtu njihet edhe si funksioni i Kummer-it i llojit të parë).  ${}_1F_1$  ka trajtën

$${}_1F_1(a, b, x) = 1 + \frac{a}{b}x + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{x^k}{k!},$$

ku  $(a)_k, (b)_k$  janë simbolet e Pochhammer-it.

---

# Literatura

- [1] Arellano-Valle RB, Gomez HW, Quintana FA.(2004). A new class of skew-normal distributions. *Communications in Statistics: Theory and Methods* 33(7): 1465-1480.
- [2] Azzalini A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian journal of statistics* 12:171 - 178.
- [3] Azzalini A.(1986). Further result on a class of distributions which includes the normal ones. *Statistica*, 46, 199-208.
- [4] Azzalini A. (2005). The skew-normal distribution and related multivariate families. *Scandinavian journal of statistics* 32:159 - 200. With discussion by Marc G. Genton and a rejoinder by the author.
- [5] Azzalini A., Capitanio A. (1999). Statistical applications of the multivariate skew normal distribution. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology)* 61:579 - 602.
- [6] Azzalini A., Dalla Valle A. (1996). The multivariate skew-normal distribution. *Biometrika* 83:715 - 726.
- [7] Abd Elfattah, A.M., Hassan A.S., and Ziedan, D.M. (2006). Efficiency of Maximum Likelihood Estimators under Different Censored Sampling Schemes for Rayleigh D istribution, *Interstat*.
- [8] Ariyawansa, K.A. and Templeton, J.G.C. (1984). Structural inference on the parameter of the Rayleigh distribution from doubly censored samples, *Statist. Hefte*, 25, 181–199.

- [9] Al-Babtain A., Fattah A., A-Hadi N. Ahmed, Merovci F. (2015)/ The Kumaraswamy-transmuted exponentiated modified Weibull distribution. *Communication in Statistics- Simulation and Computation*(to appear);
- [10] Al-Babtain A., Merovci F., Elbatal I. (2015). The McDonald exponentiated gamma distribution and its statistical properties. *SpringerPlus* 4:2.
- [11] Barreto-Souza W, Santos A, Cordeiro GM (2011) The beta generalized exponential distribution. *J Stat Comput Simul* 81:645-657.
- [12] Bennett, S. (1983). Log-logistic regression models for survival data. *Applied Statistics*, 165-171.
- [13] Berger, J. O. (1985). *Statistical decision theory and Bayesian analysis*. Springer.
- [14] Brooks, S. (1998). Markov chain Monte Carlo method and its application. *Journal of the royal statistical society: series D (the Statistician)*, 47(1), 69-100.
- [15] Bjerkedal, T. (1960). Acquisition of Resistance in Guinea Pies infected with Different Doses of Virulent Tubercle Bacilli. *American Journal of Hygiene*, 72(1), 130-48.
- [16] Chen, M. H., and Shao, Q. M. (1999). Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 8(1), 69-92.
- [17] Chen, Z. (2000). A new two-parameter lifetime distribution with bathtub shape or increasing failure rate function. *Statistics & Probability Letters*, 49(2), 155-161.
- [18] Cooray K, Ananda MMA. (2008). A generalization of the half-normal distribution with applications to lifetime data. *Commun Stat Theory Methods* 37:1323–1337.
- [19] Cordeiro G.M., Cristino C.T., Hashimoto E.M., Ortega E.M.(2013). The beta generalized Rayleigh distribution with applications to lifetime data *Stat Papers* 54:133–161.

- [20] Cordeiro G.M., Nadarajah S. (2011). Closed form expressions for moments of a class of Beta generalized distributions, *Brazilian Journal of Probability and Statistics* 25 , 1433.
- [21] Cordeiro, G. M., & de Castro, M. (2011). A new family of generalized distributions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81(7), 883-898.
- [22] Cooray, K. (2006). Generalization of the Weibull distribution: the odd Weibull family. *Statistical Modelling* 6, 265-277.
- [23] Cheng, R. C. H., & Amin, N. A. K. (1981). Maximum likelihood estimation of parameters in the inverse Gaussian distribution, with unknown origin. *Technometrics*, 23(3), 257-263.
- [24] Cheng, R. C. H., & Amin, N. A. K. (1983). Estimating parameters in continuous univariate distributions with a shifted origin. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 394-403.
- [25] Deshpande, J. V., & Suresh, R. P. (1990). Non-monotonic ageing. *Scandinavian journal of statistics*, 257-262.
- [26] Dumonceaux, R., & Antle, C. E. (1973). Discrimination between the log-normal and the Weibull distributions. *Technometrics*, 15(4), 923-926.
- [27] Demarta, S., & McNeil, A. J. (2005). The t copula and related copulas. *International statistical review*, 73(1), 111-129.
- [28] Dyer, D. D., Whisenand, C. W. (1973). Best Linear Unbiased estimator of the parameter of the Rayleigh distribution: Part-II optimum theory for selected order statistics. *I.EEE Trans*, Vol.60, 1965.
- [29] DiCiccio TJ, Monti AC. (2004). Inferential aspects of the skew exponential power distribution. *Journal of the American Statistical Association* 99: 439-450.
- [30] Eugene N, Lee C, Famoye F. (2002). Beta-normal distribution and its applications. *Commun Stat Theory Methods* 31:497–512.

- [31] Elbatal I., Merovci F., Elgarhy M. (2013). A new generalized Lindley distribution. *Mathematical Theory and Modeling*. 11/2013; 3(13):30-47.
- [32] Elbatal I., Merovci F., Marzouk W. (2014). McDonald Generalized Linear Failure Rate Distribution. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*. 10/2014; 10(3):267-288.
- [33] Elbatal, I., & Merovci, F. (2014). A Note on a Generalization of the Exponentiated Pareto Distribution. *Economic Quality Control*, 29(1), 77-87.
- [34] Elderton, W. P. (1934). An approximate law of survivorship and other notes on the use of frequency curves in actuarial statistics. *Journal of the Institute of Actuaries*, 1-36.
- [35] Elderton, W. P. (2011). *Frequency curves and correlation*. Cambridge University Press.
- [36] Fung, T., & Seneta, E. (2010). Tail dependence for two skew t distributions. *Statistics & probability letters*, 80(9), 784-791.
- [37] Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. (2000). *Table of integrals, series, and products*. Academic Press, San Diego
- [38] Gelfand, A. E., and Smith, A. F. (1990). Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American statistical association*, 85(410), 398-409.
- [39] Gusmao FRS, Ortega EMM, Cordeiro GM. (2011). The generalized inverse Weibull distribution. *Statistical Papers* 52:591–619.
- [40] Ghitany M.E., Atieh B., Nadarajah S. (2008). Lindley distribution and its application, *Mathematics and Computers in Simulation* 78, 493-506.
- [41] Ghitany, M. E., Al-Mutairi, D. K., Balakrishnan, N., & Al-Enezi, L. J. (2013). Power Lindley distribution and associated inference. *Computational Statistics & Data Analysis*, 64, 20-33.

- [42] Ghitany, M. E., Atieh, B., & Nadarajah, S. (2008). Lindley distribution and its application. *Mathematics and computers in simulation*, 78(4), 493-506.
- [43] Gomez, H. W., Venegas, O., & Bolfarine, H. (2007). Skew symmetric distributions generated by the distribution function of the normal distribution. *Environmetrics*, 18(4), 395-407.
- [44] Gompertz, B. (1825). On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, 513-583.
- [45] Gurvich, M. R., DiBenedetto, A. T. and Ranade, S. V. (1997). A new statistical distribution for characterizing the random strength of brittle materials. *Journal of Materials Science* 32, 2559-2564.
- [46] Gupta, A. K. (2003). Multivariate skew t-distribution. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 37(4), 359-363.
- [47] Gupta, R. D., & Kundu, D. (2009). Introduction of shape/skewness parameter (s) in a probability distribution.
- [48] Gupta R.C.,(2001). *System and Bayesian Reliability: Essays in Honour of Professor R.E. Barlow*. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, World Scientific Press, Singapore.
- [49] Glen, A. G. (2011). On the inverse gamma as a survival distribution. *Journal of quality technology*, 43(2), 158-166.
- [50] Jamalizadeh A., Behboodian J., Balakrishnan N.(2008). A two-parameter generalized skew-normal distribution, *Statistics and Probability Letters* 78 , 17221726.
- [51] Johnson, N. L., Kotz, S and N. Balakrishnan (1995). *Continuous Univariate Distribution*, V(2), 2nd edition, New York, Wiley.
- [52] Jones MC. (2004). Families of distributions arising from distributions of order statistics. *Test* 13:1-43.

- [53] Jodr, P. (2010). Computer generation of random variables with Lindley or PoissonLindley distribution via the Lambert W function. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(4), 851-859.
- [54] Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman and Hall, London.
- [55] Hastings, W. K. (1970). Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika*, 57(1), 97-109.
- [56] Hashorva, E., Kotz, S., & Kume, A. (2007).  $L_p$ -norm generalised symmetrised Dirichlet distributions. *Albanian Journal of Mathematics* (ISSN: 1930-1235), 1(1), 31-56.
- [57] Hasanlipour P. , Sharafi M.(2012). A new generalized Balakrishnan skew-normal distribution, *Statistical Papers* February 2012, Volume 53, Issue 1, pp 219-228
- [58] Henze. N. (1986). A probabilistic representation of the "skew-normal" distribution. *Scandinavian Journal of Statistics*, 13, 271-275.
- [59] Hirano, K. (1986). *Rayleigh Distributions*, New York: Wiley.
- [60] Howlader, H.A. (1985). HPD prediction intervals for Rayleigh distribution, *IEEE Trans. Reliab.*, 34, 121–123.
- [61] Howlader, H.A. and Hossain, A. (1995). On Bayesian estimation and prediction from Rayleigh distribution based on type-II censored data, *Comm. Stat. Theory Methods*, 24(9), 2249–2259.
- [62] Kayid M., Elbatal I., Merovci F.(2015). A new family of generalized quadratic hazard rate distribution with applications. *Journal of Testing and Evaluation* (to appear)
- [63] Krishna, H., & Kumar, K. (2011). Reliability estimation in Lindley distribution with progressively type II right censored sample. *Mathematics and Computers in Simulation*, 82(2), 281-294.

- [64] Marshall, A. W., & Olkin, I. (2007). Life distributions. New York: Springer.
- [65] Maswadah M.,(2010). Conditional confidence interval estimation for the inverse weibull distribution based on censored generalized order statistics, Journal of Statistical Computation and Simulation, 73,887-898.
- [66] Marcelo. B, Silva. R, B, and Cordeiro. G. (2014). The Weibull - G Family of Probability Distributions. Journal of Data Science. 12, 53-68.
- [67] Murthy, D. P., Xie, M., & Jiang, R. (2004). Weibull models (Vol. 505). John Wiley & Sons.
- [68] Mudholkar, G. S., & Srivastava, D. K. (1993). Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. IEEE Transactions on Reliability, 42(2), 299-302.
- [69] Mead, M. E. (2013). Generalized Inverse Gamma Distribution and its Application in Reliability. Communications in Statistics-Theory and Methods, (just-accepted).
- [70] Ma Y, Genton MG. (2004). Flexible class of skew-symmetric distributions. Scandinavian Journal of Statistics 31: 459-468.
- [71] Merovci, F., & Sharma, V. K. (2014). The Beta-Lindley Distribution: Properties and Applications. Journal of Applied Mathematics, vol. 2014, Article ID 198951, 10 pages, 2014.
- [72] Merovci, F., & Sharma, V. K. (2015). The Kumaraswamy-Lindley Distribution: Properties and Applications. (Submitted).
- [73] Merovci F., Elbatal I. (2015). A new generalization of linear exponential distribution: Theory and application. Journal of Statistics Applications & Probability Letters. 2(1):1-14.
- [74] Merovci F., Elbatal I., (2015). A new generalized of exponentiated modified Weibull distribution. Journal of data science: JDS (to appear);

- [75] Merovci F., Elbatal I., Puka L. (2015). The McDonald Quasi Lindley Distribution and its applications. *Acta Universitatis Apulensis*(to appear).
- [76] Merovci F., Elbatal I. (2015). Weibull-Rayleigh Distribution: Theory and Applications. *Applied Mathematics & Information Sciences*, Volume 9, No. 5, 1-11.
- [77] Merovci F., Elbatal I. (2014). Transmuted Weibull-geometric distribution and its applications. *Scientia Magna*. 08/2014; 10(1):68-82.
- [78] Merovci F., Elbatal I., Ahmed A. (2014). The Transmuted Generalized Inverse Weibull Distribution. *Austrian Journal of Statistics*. 43(2):119-131.
- [79] Merovci F., Elbatal I. (2014). Transmuted Lindley-Geometric Distribution and its Applications. *Journal of Statistics Applications & Probability*. 03/2014; 3(1):77-91.
- [80] Merovci F. (2014). Transmuted generalized Rayleigh distribution. *Journal of Statistics Applications & Probability*. 3(1),9-20.
- [81] Merovci F., Puka, LL. (2014). Transmuted Pareto distribution. *ProbStat Forum*. Volume 7(January 2014):1-11.
- [82] Merovci F. (2013). Transmuted exponentiated exponential distribution. *Mathematical Sciences And Applications E-Notes*. 1(2), 112-122.
- [83] Merovci F. (2013) Turn type inequalities for p-polygamma functions. *Le Matematiche*. LXVIII(2):99-106.
- [84] Merovci F., Elbatal I. (2013). The McDonald Modified Weibull Distribution: Properties and Applications. eprint arXiv:1309.2961.
- [85] Merovci F., Elbatal I., Ahmed A. (2014). The transmuted generalized inverse Weibull distribution. *Austrian Journal of Statistics*, 43(2), 119-131
- [86] Merovci F. (2013). Transmuted Rayleigh Distribution. *Austrian Journal of Statistics*. 42(1):21-32.

- [87] Merovci F. (2013). Turan type inequalities for  $(p, q)$ -Gamma function. *Scientia Magna*. 9(1):25-30.
- [88] Merovci F. (2013). Transmuted Lindley Distribution. *International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics (IJOPCM)*. 6(2):63-72.
- [89] Merovci F. (2012). Turan type inequalities for some  $(q, k)$ - special functions. *Acta Universitatis Apulensis*. 34(34):69-76.
- [90] Merovci F. (2014). McDonald Lindley distribution: Properties and Applications, V Congress of Mathematicians of Macedonia, September 24-27, 2014. Ohrid, Republic of Macedonia; 09/2014
- [91] Merovci F. (2014). McDonald new extension exponential distribution, *Statistics, Probability & Numerical Analysis 2014 Methods and Applications*, Tirana, 5-6 December 2014. <http://morixsolutions.com/spna2014/Abstracts.pdf>
- [92] Merovci F.(2013). Transmuted generalized Pareto distribution. 10th Applied Statistics 2013; 09/2013,Slovenia.
- [93] Merovci F. (2012). Transmuted exponentiated exponential distribution. 1ST INTERNATIONAL EURASIAN CONFERENCE ON MATHEMATICAL SCIENCES AND APPLICATIONS PRISTINA-KOSOVA; 09/2012
- [94] Merovci F., Puka L (2012). Transmuted exponential distribution. Third International Conference Information Systems and Technology Innovation: their application in Economy; 08/2012
- [95] Meeker, W. Q. and Escobar, L. A. (1998). *Statistical Methods for Reliability Data*. John Wiley, New York.
- [96] Nadarajah S, Gupta AK. (2004). The beta Frechet distribution. *Far East J Theor Stat* 14:15-24.
- [97] Nadarajah S, Kotz S. (2004). The beta Gumbel distribution. *Math Prob Eng* 10:323-332.

- [98] Nadarajah S, Kotz S. (2005). The beta exponential distribution. *Reliab Eng Syst Saf* 91:689-697.
- [99] Nadarajah S., Bakouch H.S., and Tahmasbi R. (2011). A generalized Lindley distribution, *Sankhya B ,Applied and Interdisciplinary Statistics*, 73:331-359
- [100] Nadarajah S, Kotz S. (2003). Skewed distributions generated by the normal kernel. *Statistics Probability Letters* 65: 269-277.
- [101] Nelson, W. B. (2005). *Applied life data analysis* (Vol. 577). John Wiley & Sons.
- [102] Lalitha, S. and Mishra, A. (1996). Modified maximum likelihood estimation for Rayleigh distribution, *Comm. Stat. Theory Methods*, 25, 389–401.
- [103] Langlands, A. O., Pocock, S. J., Kerr, G. R., & Gore, S. M. (1979). Long-term survival of patients with breast cancer: a study of the curability of the disease. *BMJ*, 2(6200), 1247-1251.
- [104] Lawless, J. F. (2011). *Statistical models and methods for lifetime data* (Vol. 362). John Wiley & Sons.
- [105] Lindley, D.V. (1958). Fiducial distributions and Bayes theorem. *Journal of the Royal Statistical Society B* 20:102-107.
- [106] Lindley D.V. (1965). *Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint, Part II: Inference*, Cambridge University Press, New York.
- [107] Lee E.T. and Wang J.W., *Statistical Methods for Survival Data Analysis*, 3rd ed., Wiley, New York, 2003.
- [108] Lee, C., Famoye, F., & Olumolade, O. (2007). Beta-Weibull distribution: some properties and applications to censored data. *Journal of modern applied statistical methods*, 6(1), 17.
- [109] Upadhyay, S. K., and Gupta, A. (2010). A Bayes analysis of modified Weibull distribution via Markov chain Monte Carlo simulation. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 80(3), 241-254.

- [110] Upadhyay, S. K., Vasishtha, N., and Smith, A. F. M. (2001). Bayes inference in life testing and reliability via Markov chain Monte Carlo simulation. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series A*, 63(1), 15-40.
- [111] Upadhyay, S. K., & Peshwani, M. (2003). Choice between Weibull and lognormal models: A simulation based Bayesian study. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 32(2), 381-405.
- [112] Sharafi M. , Behboodian J., The Balakrishnan skewnormal density, *Statistical Papers*, October 2008, Volume 49, Issue 4, pp 769-778.
- [113] Pescim, R. R., Demtrio, C. G., Cordeiro, G. M., Ortega, E. M., and Urbano, M. R. (2010). The beta generalized half-normal distribution. *Computational statistics and data analysis*, 54(4), 945-957.
- [114] Pearson, K. (1895). Contributions to the mathematical theory of evolution. II. Skew variation in homogeneous material. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A*, 343-414.
- [115] Polovko, A. M. (1968). *Fundamentals of Reliability Theory*, Academic Press, New York.
- [116] Pourahmadi M., Construction of Skew-Normal Random Variables: Are They Linear Combinations of Normal and Half-Normal? <http://www.stat.tamu.edu/~pourahm/skewnorm.pdf>
- [117] Rayleigh, J. (1880). On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and of arbitrary phase, *Philos. Mag.*, 10, 73–78.
- [118] Renyi A., (1961). On measures of entropy and information. In *Fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability* (Vol. 1, pp. 547-561).
- [119] Seshadri, V. (1999). *The inverse Gaussian distribution*. Springer.
- [120] Swain. J, Venkatraman S., and Wilson J. (1988). Least squares estimation of distribution function in Johnson's translation system. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 29 , 271 - 297.

- [121] Siddiqui, M.M. (1962). Some problems connected with Rayleigh distributions, J. Res. Nat. Bur. Stand, 60D, 167–174.
- [122] Sinha, S.K. and Howlader, H.A. (1983). Credible and HPD intervals of the parameter and reliability of Rayleigh distribution, IEEE Trans. Reliab., 32, 217– 220.
- [123] Sharma V.K., SK Sing, Umesh Singh, Merovci F. (2015). Inference of Transmuted Rayleigh wind speed model. (submitted).).
- [124] Sharma V.K, Singh S.K, Singh U., Merovci F. (2015). The generalized inverse Lindley distribution: A new inverse statistical model for the study of upside-down bathtub data. Communication in Statistics- Theory and Methods; In Press(In Press):In Press.
- [125] Singh, S. K., Singh, U., & Sharma, V. K. (2013). Bayesian prediction of future observations from inverse Weibull distribution based on type-II hybrid censored sample. International Journal of Advanced Statistics and Probability, 1(2), 32-43.
- [126] Sklar, A. (1959). Fonctions de repartition ‘a n dimensions et leurs marges. Publications de l’Institut de statistique de l’Universite de Paris 8, 229231.
- [127] Schabe, H. (2011). A Spot of an Upside Down Bathtub Failure Rate Lifetime Distribution in the Wild. J Saf Reliab Soc, 31(3), 74-83.
- [128] Shaked, M., & Shanthikumar, J. G.(1994). Stochastic orders and their applications.
- [129] Team, R. C. (2012). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2012.
- [130] Xie, M., & Lai, C. D. (1996). Reliability analysis using an additive Weibull model with bathtub-shaped failure rate function. Reliability Engineering & System Safety, 52(1), 87-93.

- [131] Xie, M., Tang, Y., & Goh, T. N. (2002). A modified Weibull extension with bathtub-shaped failure rate function. *Reliability Engineering & System Safety*, 76(3), 279-285.
- [132] Weibull W. (1951). A statistical distribution of wide applicability, *J. Appl. Mech.*,18, 293-297.
- [133] Zografos, K. and Balakrishnan, N. (2009). On families of beta- and generalized gamma-generated distributions and associated inference. *Statistical Methodology* 6, 344-362.

## **Përmbledhje**

Në këtë tezë doktorature, kemi dhënë disa version të gjenerimit të shpërndarjeve si shpërndarja beta-Lindley, Kumaraswamy Lindley, inverse të Lindley-it, Weibull-Ryleight dhe koeficientet bishtorë për shpërndarjen e anuar t dhe shpërndarja Dirichle. Janë paraqitur disa veti statistikore si: momentet, funksioni i kuantiles, entropia, radhitja stokastike. Disa metoda të vlerësimit si metoda e përgjasisë maksimale, metoda e katrorëve të vegjël , metoda e prodhimit maksimal të distancave dhe ajo e Bayesit janë përdorur për vlerësimin e parametrave të panjohur tek keto shpërndarje. Dy algoritme janë propozuar për gjenerimin e mostrave të rastit nga shpërndarjet e propozuar dhe kodi në R është dhënë poashtu. Për më tepër, simulimet janë përdorur për të studiuar sjelljen e parametrave të vlerësuar. Në vazhdim kemi dhënë disa përgjithësime të shpërndarjes së përgjithësuar inverse të Lindley-it si GILD në fuqi, beta-GILD dhe Kumaraswamy-GILD janë sugjeruar për përdorim kur shpërndarja e sugjeruar nuk është kompatible për të dhënat që studiohen. Në fund, aplikimi i shpërndarjeve të propozuar është demonstruar me një bashkësi të dhënash reale dhe kemi krahasuar me shpërndarje tjera.

## **Abstract**

In this thesis, we introduced some new distributions like beta-Lindley, Kumaraswamy Lindley, generalized inverse Lindley distribution , Weibull-Rayeigh and we study the tail dependence for skew t distribution and Dirichle distribution. Some statistical properties, e.g. moments, quantile function, entropy, stochastic ordering, stress-strength reliability of those new distributions are explicitly derived. Some methods of estimations, maximum likelihood, least square, maximum product estimation methods and Bayes estimation are approached to use for estimating the unknown parameters. Two algorithms are proposed for generating random sample from the proposed distribution and R codes are also provided. Moreover, a simulation study is conducted to study the behaviour of the discussed estimators. In addition, four generalizations of GILD, exponentiated-GILD, beta-GILD and Kumaraswamy-GILD are suggested to use where proposed distribution seems incompatible to the data. Finally, the applicability of the proposed distribution is demonstrated for a set of real data and compared with competitive two parameters well known inverse distributions.